СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P5 - 4254

Р.Денчев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

P5 - 4254

Р.Денчев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Введение

Исследуя колебания вращающейся жидкости, С.Л.Соболев рассмотрел [1] уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

с условиями на $\Phi(x,y,z)$:

$$\Phi/_{t=0}=\psi_0(x,y,z),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}/_{t=0}=\psi_1(x,y,z),$$

$$\Phi/\omega=0.$$

Здесь ω – граница некоторой области Ω, ψ_0 и ψ_1 – заданные функции.

С.Л.Соболев поставил вопрос о почти периодичности решений этой задачи. Этот вопрос сводится [2] к следующему.

При каких значениях λ задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\lambda\Delta u=0,\quad u/\omega=0, \tag{1}$$

где $u=u(x,y,z)$, имеет ненулевые решения.

Обозначим через $G(x,y,z;x',y',z')$ функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω. Умножим (1) на G и проинтегрируем по Ω. Получим уравнение

$$S_0 u - \lambda u = 0 \quad , \tag{2}$$

где

$$S_0 u = \int_{\Omega} G(x,y,z;x',y',z') \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} dx'dy'dz'. \tag{3}$$

Таким образом, задача состоит в исследовании спектра оператора S_0.

Интегрируя по частям, учитывая $u/\omega = 0$, можно записать (3) в виде

$$Su = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 G}{\partial z'^2} u\, dx'dy'dz'. \tag{4}$$

При этом дифференцирование G производится в пространстве обобщенных функций [5]. Функция $\frac{\partial^2 G}{\partial z'^2}$ имеет особенность типа $\frac{1}{r^3} + \delta(x)$, так что интеграл в (4) является сингулярным.

Таким образом, возникает задача об изучении спектра сингулярных интегральных операторов на ограниченной области. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

В §1 исследуется существенный[x] спектр сингулярных интегральных операторов. Задача эта по существу решается существующими [6,7] необходимыми и достаточными условиями для нетеровости сингулярных интегральных операторов на ограниченной области. Полученный результат (теорема 1) применяется к изучению существенного спектра оператора S и одного одномерного сингулярного оператора, рассмотренного ранее Дж. Шварцем [8].

[x] Существенным спектром оператора A называется множество точек λ, для которых оператор $A - \lambda I$ (I – единичный оператор) не является нетеровым. Оператор B называется нетеровым, если удовлетворяет следующим условиям: 1. Размерность $\operatorname{Ker} B$ конечна, $\operatorname{Ker} B$ – множество нулей B. 2. $\operatorname{Jm} B$, т.е. множество значений B, – замкнуто. 3. Коразмерность $\operatorname{Jm} B$ конечна.

Второй параграф посвящен более детальному изучению структуры спектра оператора S_0, зависящей от области Ω. Указываются области, для которых спектр состоит из всюду плотного множества собственных значений, а также строятся области, для которых спектр содержит интервалы без собственных значений.

§1. Существенный спектр сингулярных интегральных операторов

Пусть Ω – область m – мерного евклидова пространства E_m, ограниченная конечным числом простых замкнутых поверхностей типа Ляпунова, не пересекающихся между собой. Введем оператор продолжения вне Ω

$$P_\Omega : L_2(\Omega) \ni f(x) \to (P_\Omega f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{для } x \in \Omega \\ 0 & \text{для } x \notin \Omega \end{array} \right\} \in L_2(E_m)$$

и оператор сужения на Ω

$$R_\Omega : L_2(E_m) \ni f(x) \to (R_\Omega f)(x) = \{ f(x) \ \text{для } x \in \Omega \} \in L_2(\Omega) .$$

Пусть $\mathcal{A}$ – сингулярный интегральный оператор с символом $\sigma(x,\xi)$. Функция $\sigma(x,\xi)$ определена при всех x и $\xi \in E_m, \xi \neq 0$, положительно однородна по ξ степени нуль и на единичной сфере $\Sigma = \{\xi : \xi \in E_m, |\xi| = 1\}$ принадлежит пространству $H_2(\Sigma)$. Предположим, что по x функция $\sigma(x,\xi)$ достаточно гладкая. Как известно, оператор $\mathcal{A}$ отображает $L_2(E_m)$ в себя.

Будем изучать существенный спектр оператора $A = R_\Omega \mathcal{A} P_\Omega$.

Мы воспользуемся необходимым и достаточным условием для нетеровости сингулярных интегральных операторов, содержащееся в [6].

Пусть $m \geq 0$ и x_0 точка границы Ω. Проведем в x_0 единичные нормали: внутреннюю $n^i_{x_0}$ и внешнюю $n^e_{x_0}$. Перенесем $n^i_{x_0}$ и $n^e_{x_0}$ в начало координат. Концы их отметят на единичной сфере Σ две точки. Соединим эти точки всевозможными полукругами ℓ_{x_0}. Введем величину

$$d_{x_0}^{\ell_0}(\lambda) = \{ \arg[\sigma(x,\xi) - \lambda] \}_{\ell_{x_0}} ,$$

где в правой части равенства находится изменение величины в фигурных скобках, когда ξ меняется вдоль полукруга ℓ_{x_0}.

В случае $m > 2$ все пути ℓ_{x_0} гомотопны и $d_{x_0}^{\ell_{x_0}}(\lambda)$ не зависит от ℓ_{x_0}. Общее значение $d_{x_0}^{\ell_{x_0}}(\lambda)$ обозначим через $d_{x_0}(\lambda)$.

В случае $m = 2$ имеется два класса негомотоных путей и мы получаем два числа: $d_{x_0}^{+}(\lambda)$ и $d_{x_0}^{-}(\lambda)$. В случае $m = 1$ обозначим

$$d_{x_0}(\lambda) = \arg[\sigma(x_0, 1) - \lambda] - \arg[\sigma(x_0, -1) - \lambda] .$$

Используя результаты [6], нетрудно получить следующее предложение:

Теорема 1. Существенный спектр оператора A состоит из значений функции $\sigma(x,\xi)$ при $x \in \Omega, \xi \in \Sigma$ и из тех точек λ, для которых $|d_{x_0}(\lambda)| \geq \pi$ ($|d^{\pm}_{x_0}(\lambda)| \geq \pi$) при некотором x_0 на границе Ω.

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$T : L_2(0,1) \supset u(x) \to m(x)u(x) + \int_0^1 \frac{K(x,t)}{x-t} u(t)\,dt ,$$

где $m(x)$ и $K(x,t)$ имеют непрерывные первые производные. Этот оператор изучался в [8]. Запишем T в виде

$$T = A + C .$$

где

$$A : L_2(0,1) \supset u(x) \to m(x)u(x) + k(x)\int_0^1 \frac{u(t)}{x-t}\,dt , \quad k(x) = K(x,x) ,$$

и

$$C : L_2(0,1) \supset u(x) \to \int_0^1 \frac{K(x,t) - K(x,x)}{x-t} u(t)\,dt .$$

Легко видеть, что C – вполне непрерывный оператор. Следовательно, операторы T и A имеют одинаковый существенный спектр. Пусть

$$\mathfrak{A} : L_2(-\infty,\infty) \supset u(x) \to m(x)u(x) + k(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{x-t}\,dt .$$

Тогда

$$A = R_\Omega \, \mathfrak{A} \, P_\Omega ,$$

где $\Omega = (0,1)$. Для символа оператора $\mathfrak{A}$ получаем

$$\sigma(x,\xi) = m(x) + i\pi k(x) \operatorname{sgn} \xi .$$

Множество значений $\sigma(x,\xi)$ для $x \in (0,1)$ и $|\xi| = 1$ состоит из двух кривых:

$$M_1N_1 = \{ z : z = m(x) + i\pi k(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \} ,$$

$$M_2N_2 = \{ z : z = m(x) - i\pi k(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \}.$$

Граница области Ω в этом случае составлена из двух точек, 0 и 1, так что

$$| d_{x_0}(\lambda) | = | \arg[m(0) + i\pi k(0) - \lambda] - \arg[m(0) - i\pi k(0) - \lambda] ,$$

если $x_0 = 0$, и

$$|d_{x_0}(\lambda)| = | \arg[m(1) + i\pi k(1) - \lambda] - \arg[m(1) - i\pi k(1) - \lambda] ,$$

если $x_0 = 1$.

Точки λ, для которых $|d_{x_0}(\lambda)| \geq \pi$, заполняют два прямолинейных отрезка M_1M_2 и N_1N_2, где $M_1 = m(0) + i\pi k(0)$, $M_2 = m(0) - i\pi k(0)$, $N_1 = m(1) + i\pi k(1)$, $N_2 = m(1) - i\pi k(1)$.

Таким образом, существенный спектр оператора T состоит из точек криволинейного четырехугольника $M_1N_1M_2N_2$. Это совпадает с результатом [8], полученным при помощи теории нормированных колец.

Пример 2. Пусть $m \geq 2$, Ω – ограниченная область в m -мерном евклидовом пространстве E_m с достаточно гладкой границей ω. Обозначим через $G(x;y)$, $x=(x_1, \dots, x_m)$, $y=(y_1 \dots, y_m)$ функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа на области Ω. Рассмотрим оператор

$$S: L_2(\Omega) \supset u(x) \to \int_\Omega \frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2} u(y)dy \subset L_2(\Omega). \tag{5}$$

Дифференцирование под интегралом производится в пространстве обобщенных функций. При $m=3$ это оператор (4), обсуждавшийся во введении.

Как известно,

$$G(x;y) = \mathcal{E}(x;y) + g(x;y),$$

где

$$\mathcal{E}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{r^{m-2}}, & m>2, \\ & \qquad r=|x-y|, \\ C_2 \ln r, & m=2, \end{cases}$$

а $g(x;y)$ – решение уравнения

$$\Delta_y g(x;y) = 0$$

при условии на границе

$$g(x;y)/y \in \omega = -\mathcal{E}(x;y)/y \in \omega$$

для любого $x \in \Omega$.

Таким образом, оператор S представляется в виде

$$S = A + K,$$

где

$$A = R_\Omega \mathfrak{A} P_\Omega, \qquad K = R_\Omega \mathcal{K} P_\Omega.$$

$$\mathfrak{A}: L_2(E_m) \supset u(x) \to \int_{E_m} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x;y)}{\partial y_1^2} u(y)dy,$$

$$\mathcal{K}: L_2(E_m) \supset u(x) \to \int_{E_m} \frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y_1^2} u(y)dy.$$

Используя известную формулу /5/ для дифференцирования однородной функции степени $-m+1$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \mathcal{E}(x;y) = a\,\delta(y-x) + b\,\frac{N(y-x)}{r^m},$$

где

$$N(y-x) = m\left(\frac{y_1-x_1}{r}\right)^2 - 1,$$

a и b – константы.

$$b = \begin{cases} (m-2)C_1 & \text{при } m>2, \\ \frac{1}{2} C_2 & \text{при } m=2, \end{cases}$$

$$a_m = \begin{cases} C_1(2-m)\displaystyle\int_\Gamma \frac{y_1-x_1}{r^m} dy_2 \dots dy_m & \text{при } m>2, \\ C_2 \displaystyle\int_\Gamma \frac{y_1-x_1}{r^2} dy_2 & \text{при } m=2. \end{cases}$$

Γ – сфера с центром в точке x. Оператор $\mathfrak{A}$ представляется в виде

$$\mathfrak{A}u = au(x) + b\int_{E_m} \frac{N(y-x)}{r^m} u(y)dy. \tag{6}$$

Докажем, что оператор K вполне непрерывен. Действительно, ядро $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} g(x;y)$ непрерывно везде в $\Omega \times \Omega$, кроме точек $x=y \in \omega$, в которых имеется особенность типа $\frac{1}{r^m}$. K отображает $L_2(\Omega)$ в себя.

Пусть Ω' – область, содержащаяся в Ω, такая, что расстояние между границами Ω' и Ω не превосходит δ. Тогда оператор

$$K' = R_{\Omega'} K P_{\Omega'}$$

вполне непрерывен (ввиду непрерывности $\frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2}$ в Ω'). Пусть $\mathfrak{M}$ – ограниченное множество в $L_2(\Omega)$. Покажем, что множество $K\mathfrak{M}$ компактно в $L_2(\Omega)$. Действительно, множество $K'R_{\Omega'}\mathfrak{M}$ компактно в $L_2(\Omega')$. Значит, существует некоторая ϵ –сеть Ξ'. Пусть $\Xi = R_\Omega P_{\Omega'} \Xi'$. Покажем, что Ξ является ϵ –сетью в $K\mathfrak{M}$. Пусть $Ku \in K\mathfrak{M}$. Тогда $K'R_{\Omega'}u \in K'R_{\Omega'}\mathfrak{M}$. Существует $v' \in \Xi'$, такое, что $\|K'R_{\Omega'}u - v'\|_{L_2(\Omega)} < \epsilon$. Пусть $v = R_\Omega P_{\Omega'} v'$. Очевидно, $v \in \Xi$. Имеем

$$Ku - v = Ku - R_\Omega P_{\Omega'} K' R_{\Omega'} u + R_\Omega P_{\Omega'} K' R_{\Omega'} u - R_\Omega P_{\Omega'} v'$$

$$Ku - R_\Omega P_{\Omega'} K' R_{\Omega'} u = R_\Omega K P_\Omega u - R_\Omega P_{\Omega'} R_{\Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u =$$

$$= R_\Omega K (P_{\Omega'} R_{\Omega'} + P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'}) u - R_\Omega P_{\Omega'} R_{\Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u =$$

$$= R_\Omega (I - P_{\Omega'} R_{\Omega'}) K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u + R_\Omega K P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'} u =$$

$$= P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u + R_\Omega K P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'} u$$

$$\|Ku - R_\Omega P_{\Omega'} K' R_{\Omega'} u\|_\Omega^2 < \|P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u\|_\Omega^2 +$$

$$+ \|R_\Omega K P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'} u\|_\Omega^2 < \int_{\Omega\setminus\Omega'} |K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u|^2 dx + \|K\|^2 \|P_{\Omega\setminus\Omega'} R_{\Omega\setminus\Omega'} u\|^2$$

$$\le \mathrm{mes}^2(\Omega\setminus\Omega') \int_\Omega |K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u|^2 dx + \|K\|^2 \int_{\Omega\setminus\Omega'} |u|^2 dx \le$$

$$\le \mathrm{mes}^2(\Omega\setminus\Omega') \|K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u\|_\Omega^2 + \|K\|^2 \mathrm{mes}(\Omega\setminus\Omega') \|u\|_\Omega^2 \le$$

$$< 2\,\mathrm{mes}^2(\Omega\setminus\Omega') \|K\|^2 \|u\|_\Omega^2 < \epsilon$$

при достаточно малом δ. Мы использовали ограниченность оператора K. Имеем также

$$\|R_\Omega P_{\Omega'} K' R_{\Omega'} u - R_\Omega P_{\Omega'} v'\|_\Omega = \|K'R_{\Omega'} u - v'\|_{\Omega'} < \epsilon.$$

Таким образом, получаем, что если δ достаточно мало, то

$$\|Ku - v\|_\Omega < 2\epsilon.$$

Это показывает, что Ξ есть 2ϵ – сеть для $K\mathfrak{M}$, и значит, $K\mathfrak{M}$ компактно, т.е. оператор K вполне непрерывен.

Из этого следует, что операторы S и A имеют одинаковый существенный спектр. Нетрудно подсчитать, что оператор $\mathfrak{A}$ имеет символ $\sigma(x,\xi) = \xi_1^2|\xi|^{-2}$.

Применяя теорему, получаем, что существенный спектр оператора S заполняет интервал $[0,1]$.

§2. Спектр оператора S_0.

Будем использовать обозначения примера 2 предыдущего параграфа. Через $\overset{0}{H}_2(\Omega)$ обозначаем подпространство соболевского пространства $H_2(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на границе ω. Множество точек спектра оператора X будем обозначать через $\mathrm{sp}\,X$, а множество точек существенного спектра через $\mathrm{esp}\,X$. Рассмотрим оператор

$$S_0:\ \overset{0}{H}_2(\Omega) \ni u(x) \to \int_\Omega G(x;y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\,dy \in \overset{0}{H}_2(\Omega). \qquad (7)$$

Интегрируя два раза по частям, видим, что $S_0 u = Su$, если $u \in \overset{0}{H}_2(\Omega)$, т.е. S_0 является сужением S на $\overset{0}{H}_2(\Omega)$. Мы докажем следующее предложение:

Теорема 2. $\operatorname{sp} S_0 = \operatorname{esp} S_0 = [0,1]$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что вне интервала /0,1/ нет точек спектра оператора S_0. Действительно, если $\lambda \notin [0,1]$, то существует $(S_0 - \lambda)^{-1}$ и задается формулой

$$R_\lambda : \overset{0}{H}_2(\Omega) \ni v \to R_\lambda v = \frac{1}{\lambda} \int_\Omega G_\lambda(x;y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} dy - \frac{1}{\lambda} v \in \overset{0}{H}_2(\Omega), \tag{9}$$

где $G_\lambda(x;y)$ – функция Грина задачи Дирихле для оператора $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \lambda\Delta$ на области Ω. Последний оператор эллиптический при указанных значениях λ, так что $G_\lambda(x;y)$ существует. Оператор R_λ – сингулярный интегральный оператор, и, следовательно, ограничен в $\overset{0}{H}_2(\Omega)$.

Докажем, что, действительно, R_λ является обратным $S_0 - \lambda$. Пусть $v \in \overset{0}{H}_2(\Omega)$. Применяем оператор $\Delta(S_0 - \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \lambda\Delta$ к $R_\lambda v$ и получаем

$$\Delta(S_0 - \lambda) R_\lambda v = \Delta v .$$

Так как $v \in \overset{0}{H}_2(\Omega)$, отсюда следует

$$(S_0 - \lambda) R_\lambda v = v . \tag{10}$$

Аналогично доказывается, что

$$R_\lambda (S_0 - \lambda) v = v ,$$

а это означает, что $R_\lambda = (S_0 - \lambda)^{-1}$. Так как R_λ ограничен, λ не принадлежит спектру оператора S_0. Таким образом, мы доказали, что

$$\operatorname{sp} S_0 \subset [0,1]. \tag{11}$$

Докажем теперь, что

$$[0,1] \subset \operatorname{esp} S_0 . \tag{12}$$

Для этой цели рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \lambda \Delta u = f , \tag{13}$$

$$u/\omega = 0 ,$$

и определим оператор

$$P_\lambda : \overset{0}{H}_2(\Omega) \ni u \to P_\lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \lambda \Delta u \in L_2(\Omega) .$$

Если $\lambda \in [0,1]$, задача (13) не эллиптическая /9/ и, следовательно, оператор P_λ не является нетеровым, так как эллиптичность необходима для нетеровости P_λ /10/. Из этого следует, что и $S_0 - \lambda$ не есть нетеров. Докажем, например, что если $\operatorname{Jm} P_\lambda$ не замкнуто, то $\operatorname{Jm}(S_0 - \lambda)$ тоже не замкнуто. Действительно, допустим, что $\operatorname{Jm}(S_0 - \lambda)$ замкнуто. Тогда мы докажем, что $\operatorname{Jm} P_\lambda$ тоже замкнуто. Очевидно, $S_0 - \lambda = \Delta^{-1} P_\lambda$. Пусть $f_n \in \operatorname{Jm} P_\lambda$, $f_n \xrightarrow{L_2} f$. Нужно доказать, что $f \in \operatorname{Jm} P_\lambda$. Обозначим

$$\phi_n = \Delta^{-1} f_n = \int_\Omega G(x;y) f_n(y) dy .$$

Тогда $\phi_n \in \operatorname{Jm}(S_0 - \lambda) \subset \overset{0}{H}_2$ и $\phi_n \xrightarrow{H_2} \Delta^{-1} f = \phi$. Так как $\operatorname{Jm}(S_0 - \lambda)$ замкнуто, то $\phi \in \operatorname{Jm}(S_0 - \lambda)$. Но тогда

$$f = \Delta\phi \in \Delta \operatorname{Jm}(S_0 - \lambda) = \operatorname{Jm} \Delta (S_0 - \lambda) = P_\lambda ,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, так как $S_0 - \lambda$ не есть нетеров, то λ – точка существенного спектра и (12) доказано.

Из (11) и (12) и очевидного включения $\operatorname{esp} S_0 \subset \operatorname{sp} S_0$ следует теорема 2.

Займемся теперь бóлее детальным исследованием структуры спектра оператора S_0.

Еще в 1949 г. Р.А. Александрян показал/2/, что в случае двух переменных структура спектра оператора S_0 зависит от области Ω. Так, например, если Ω – круг, то спектр – точечный, но можно немного деформировать круг, и спектр будет содержать интервалы без собственных значений. В/11,12/ доказано, что такое же явление имеет место и в многомерном случае. Если Ω – эллипсоид или цилиндр, спектр состоит из всюду плотного множества собственных значений с бесконечной кратностью. Здесь мы построим многомерные области, для которых спектр содержит интервалы без собственных значений.

Предположим, что для некоторого $0<\lambda<1$ и $u \in \overset{0}{H}_2(\Omega)$ имеет место

$$S_0 u - \lambda u = 0.$$

Тогда следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \lambda \Delta u = 0. \tag{14}$$

Сделаем подстановку:

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{2(1-\lambda)}} x_1, \quad x_2' = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} x_2, \ldots, x_n' = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} x_n. \tag{15}$$

Этим функция $u(x_1,\ldots,x_n)$ переходит в $\hat{u}_\lambda(x_1',\ldots,x_n')$, область Ω – в некоторую новую Ω_λ и (14) в

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_\lambda}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_\lambda}{\partial x_2'^2} - \cdots - \frac{\partial^2 \hat{u}_\lambda}{\partial x_n'^2} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, $\hat{u}_\lambda$ удовлетворяет волновому уравнению и обращается в нуль на границе Ω_λ. Чтобы доказать, что λ не является собственным значением, достаточно доказать, что из (16) следует $\hat{u}_\lambda \equiv 0$. Последнее означает единственность решения задачи Дирихле для волнового уравнения в $H_2(\Omega)$ (в дальнейшем будем коротко говорить только "единственность").

Прежде всего рассмотрим двумерный случай, и пусть Ω –треугольник. Область Ω_λ – тоже треугольник для каждого $\lambda \in [0,1]$. Мы докажем, что для любого треугольника имеет место "единственность", откуда следует, что у S_0 нет собственных значений.

Итак, пусть Ω – произвольный треугольник. По меньшей мере один из углов Ω должен лежать в характеристическом угле (угле, заключенном между двумя характеристиками волнового уравнения). Действительно, проведем три прямые, параллельные сторонам треугольника, через начало координатной системы (рис. 1). Так как имеются два характеристических угла и три прямых, то по меньшей мере две из этих последних должны находиться в одном характеристическом угле.

Пусть P – произвольная точка треугольника. Проведем через P характеристики, как показано на рис. 2. Предположим, что $u \in \overset{0}{H}_2$ удовлетворяет волновому уравнению. Тогда имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &u(P) + u(P_1) = u(A_1) + u(B_1), \\ &u(P_1) + u(P_2) = u(A_2) + u(B_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &u(P_{n-1}) + u(P_n) = u(A_n) + u(B_n). \end{aligned} \tag{17}$$

Правые частицы (17) равны нулю, так как u исчезает на границе Ω. Умножим первое из уравнений (16) на +1, второе – на –1, третье – на +1 и т.д. и сложим все вместе. Тогда получаем

$$u(P) + (-1)^{n-1} u(P_n) = 0. \tag{18}$$

Очевидно, P_n стремится к A, и так как u непрерывна в силу теоремы вложения С.Л.Соболева, из (18) следует, что $u(P)=0$. Этим доказана "единственность".

Подобным образом можем поступить и в трехмерном случае. Рассмотрим конус Ω, ограниченный поверхностями (рис. 3).

$$\omega_1 : x_1^2 - (1+a^2)(x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

$$\omega_2 : x_1 = h,$$

где a и h – произвольные константы. Ω лежит внутри характеристического конуса волнового уравнения

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Мы докажем "единственность" для произвольного конуса указанного вида.

Пусть P – точка Ω. Проведем характеристический конус с вершиной в P. Обозначим через ω_1' часть ω_1, отрезанную характеристическим конусом, и через σ – часть характеристического конуса, отрезанную ω_1 (рис. 3).

Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2 = 0 \qquad \text{на} \quad \sigma,$$

$$\nu_1^2 - \frac{1}{1+a^2}(\nu_2^2 + \nu_3^2) = 0 \qquad \text{на} \quad \omega_1',$$

где ν_k – направляющие косинусы нормали рассматриваемых поверхностей.

Пусть $u \in \overset{0}{H}_2(\Omega)$ и удовлетворяет волновому уравнению. Воспользуемся тождеством

$$0 = 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\Box u = \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$$

Интегрируя по области Ω', ограниченной поверхностями σ и ω_1', получаем

$$0 = \int_{\Omega'} 2\frac{\partial u}{\partial x_3}\Box u \, d\Omega = \int_{\omega_1'+\sigma}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\right]\nu_1 - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_2 - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_3\right\}d\omega$$

$$= \int_\sigma \frac{1}{\nu_1}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\right]\nu_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2(\nu_2^2+\nu_3^2) - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1\nu_2 - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_1\nu_3\right\}d\omega$$

$$+ \int_{\omega_1'} \frac{1}{\nu_1}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\right]\nu_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2(\nu_2^2+\nu_3^2) - \beta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2(\nu_2^2+\nu_3^2) - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1\nu_2 -\right.$$

$$\left.- 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_1\nu_3\right\}d\omega = \int_\sigma \frac{1}{\nu_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_2\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_3\right)^2\right]d\omega$$

$$-\beta^2\int_{\omega_1'}\frac{1}{\nu_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2(\nu_2^2+\nu_3^2)\,d\omega \qquad (19)$$

$$+ \int_{\omega_1'}\frac{1}{\nu_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_2\right)^2 +\right.$$

$$\left.+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_3\right)^2\right]d\omega.$$

Мы использовали обозначение

$$\frac{1}{1+a^2} = 1 - \beta^2 .$$

Последний интеграл в (19) исчезает из-за присутствия под интегралом касательных производных u на ω'. Так как Ω лежит внутри характеристического конуса, то $\nu_1 > 0$ на σ и $\nu_1 < 0$ на ω_1'. Ввиду этого из (19) следует, что

$$\int_\sigma \frac{1}{\nu_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_2\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_3\right)^2\right]d\omega = 0 ,$$

и, таким образом, обе линейно независимые внутренние производные $\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_2$ и $\frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_3$ равняются нулю на σ. Поэтому функция u – константа на σ, и так как она исчезает на пересечении σ и ω_1, то на всем σ равняется нулю. Следовательно, $u(P)=0$ и "единственность" доказана.

Подстановкой (15) Ω преобразуется в конус Ω_λ, ограниченный поверхностью

$$x_1'^2 - (1+\alpha^2)\frac{1-\lambda}{\lambda}(x_2'^2 + x_3'^2) = 0.$$

Очевидно, Ω_λ находится внутри характеристического конуса тогда и только тогда, когда

$$0 \le \lambda \le \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}, \tag{20}$$

и значит, для всех таких λ имеет место "единственность" в Ω_λ. Следовательно, интервал (20) не содержит собственных значений.

Ю.М.Березанский[13] предложил метод для построения некоторых областей, где задача Дирихле для волнового уравнения имеет слабое решение и при этом разрешимость устойчива относительно малых деформаций области. Легко видеть, что для таких областей спектр содержит некоторый интервал без собственных значений. Мы опишем коротко этот метод в применении к нашему случаю.

Введем обозначения:

$$\mathfrak{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \qquad c_1 = 1, c_2 = \dots = c_m = -1.$$

Предположим, что $u \in \overset{0}{H}_2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению $\mathfrak{L}u = 0$. Пусть $A_1(x), \dots, A_m(x)$, $A(x)$ – вещественные достаточно гладкие функции. Интегрированием по частям может быть доказано следующее тождество:

$$0 = \int_\Omega \mathfrak{L}u\Big(\sum_{k=1}^m A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Au\Big)dx$$

$$= \int_\Omega \Big\{\sum_{j=1}^m c_j\Big(\sum_{k=1}^m \frac{\partial A_k}{\partial x_k} - 2\frac{\partial A_j}{\partial x_j} - 2A\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^m \Big(-c_j\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - c_k\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big\}dx \tag{21}$$

$$+ \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial^2 A}{\partial x_j^2}\Big)u^2\,dx + \int_\omega N_u^2 \sum_{k=1}^m A_k\nu_k \sum_{j=1}^m c_j \nu_j^2,$$

где ν_k – координаты единичной нормали поверхности ω – границы области Ω. Функция $N_u(x)$ такая, что $\frac{\partial u}{\partial x_j} = N_u(x)\nu_j$ на ω. (Так как $u/\omega = 0$, то $N_u(x)$ существует). Подберем функции $A_k(x)$ и $A(x)$ так, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{j=1}^m c_j\Big(\sum_{k=1}^m \frac{\partial A_k}{\partial x_k} - 2\frac{\partial A_j}{\partial x_j} - 2A\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 + \sum_{j,k=1}^m \Big(-c_j\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - c_k\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \tag{22}$$

была строго положительно определенной и выполнялось неравенство

$$\sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial^2 A}{\partial x_j^2} \ge 0. \tag{23}$$

Дальше определим область Ω так, чтобы на границе ω

$$\sum_{k=1}^m A_k\nu_k \sum_{j=1}^m c_j \nu_j^2 \ge 0. \tag{24}$$

Из (21) для такой области следует, что $u \equiv 0$ и, следовательно, имеет место "единственность". При этом, если сделаем малые изменения Ω и $A_k(x)$, то положительная определенность (22) и неравенства (23), (24) сохраняются, так что "единственность" продолжает иметь место.

Как видно из (15), $\Omega_\lambda = \Omega$ при $\lambda = \frac{1}{2}$, так что когда λ находится в достаточно малой окрестности 1/2, Ω_λ отличается мало от Ω и имеет место "единственность". Это означает, что в достаточно малой окрестности точки $\lambda = \frac{1}{2}$ нет собственных значений.

Как пример рассмотрим одну область, построенную в /13/ описанным методом. Возьмем $A_1 = -x_1, A_k = x_k (k = 2, \dots, m)$. Рассмотрим на плоскости $x_1 o x_2$ четыре ветви гиперболы $x_1 x_2 = h$, где h – некоторая константа (рис. 4), и замкнем их кривыми $AA_1, AA_2, BB_1, \dots$ Эти последние могут быть произвольными, удовлетворяющими только следующему условию: через произвольную точку M любой из этих кривых проведем гиперболу вида $x_1 x_2 = h$. Получаем два угла α и β, заключенных между координатной осью и тангентой к кривой или к гиперболе соответственно. Упомянутое условие состоит в том, что α и β должны удовлетворять неравенству $\beta < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, получаем некоторую ограниченную область $\tilde{\tilde{\Omega}}_1$ на плоскости $x_1 o x_2$. Рассмотрим теперь цилиндр $\Omega_1 = \tilde{\tilde{\Omega}}_1 \times E_{m-2}$, где E_{m-2} обозначает $m-2$ – мерное пространство, натянутое на всех координатных осях, кроме ox_1 и ox_2. Аналогично строим $\tilde{\tilde{\Omega}}_2$ на плоскости $x_1 o x_3$ и соответствующий цилиндр Ω_2 и т.д. Пусть $\Omega = \overset{m-1}{\underset{k=1}{}} \Omega_k$. Область Ω ограничена, и ее граница состоит из конечного числа гладких поверхностей. Ограниченность Ω следует из того, что x_1 и x_2 ограничены на Ω_1, x_1 и x_3 ограничены на Ω_2 и т.д. Выбирая константы h в уравнениях гипербол достаточно малыми по модулю и точки A, B, C, D достаточно близкими к 0, получаем область, для которой квадратичная форма (22) строго положительно определена и неравенства (23), (24) выполнены, так что имеет место "единственность". В то же время это свойство не меняется при малых деформациях построенной области. Следовательно, для этой области спектр не содержит собственных значений в некоторой окрестности точки $\lambda = \frac{1}{2}$.

Итак, мы можем сформулировать следующее предложение:

Теорема 3. При любой размерности пространства E_m существуют области Ω, для которых спектр оператора S_0 содержит интервалы без собственных значений. При этом при достаточно малых изменениях области Ω это свойство сохраняется.

Уточним понятие "малое изменение области Ω". Область Ω мы называем близкой к Ω, если ее граница ω' близка к ω в смысле равномерной близости функций, задающих поверхность вместе с первыми их производными. Кроме того, вблизи $n-2$-мерных граней, порожденных точками типа $A, B, \dots$, граница ω' имеет такой же вид, как и ω.

Литература

1. С.Л.Соболев. Изв. АН СССР, серия матем., 18, №1 (1954).
2. Р.А.Александрян. Диссертация, МГУ, 1949.
3. Р.А.Александрян. Труды Московского математического общества, т. 9 (1960).
4. Р.А.Александрян. Диссертация, МГУ, 1960.
5. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции, вып. 1, Москва, 1958.
6. И.Б.Симоненко. Известия Академии наук СССР, серия матем., 29, №№ 3 и 4 (1965).
7. М.И.Вишик, Г.И.Эскин. УМН, т. XX, вып. 3 (123), 1965.
8. J. Schwartz. Communications on pure and applied mathematics, vol. XV, 75-90 (1962).
9. Л.Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы. Издательство "Мир". Москва, 1965.
10. С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. ИЛ., Москва, 1962.
11. Р.Денчев. ДАН СССР, 126, №2 (1959).

12. Р.Денчев. Диссертация, МГУ, 1960.

13. Ю.М.Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд. "Наукова думка". Киев, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1969 года.

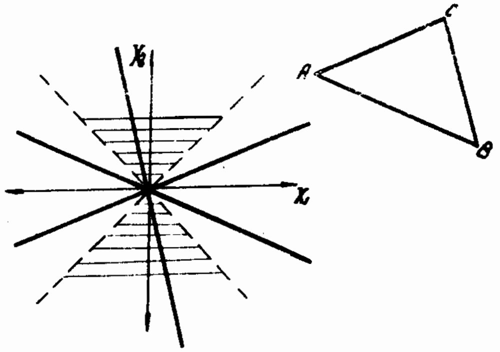

Рис. 1

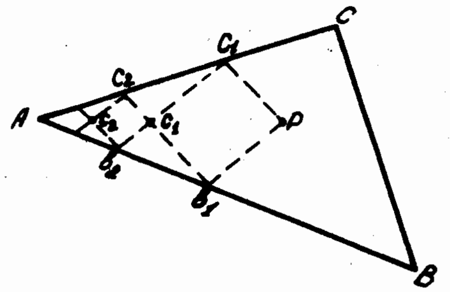

Рис. 2

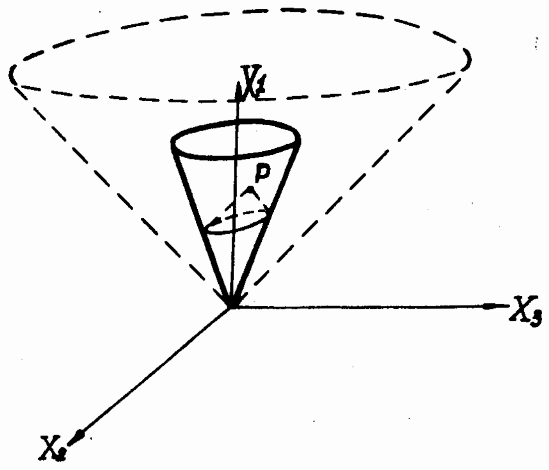

Рис. 3

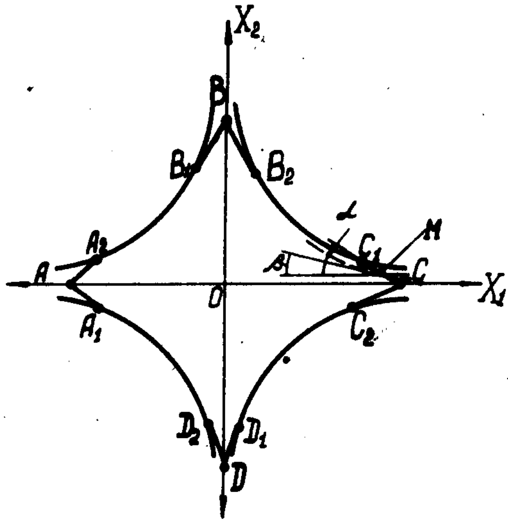

Рис. 4