ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 4253

Р.Денчев

О КОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

P5 - 4253

Р.Денчев

О КОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Направлено в журнал "Математический сборник"

В евклидовом пространстве E_n задана ограниченная связная область Ω с кусочно-гладкой границей ω.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $C^\infty(\bar{\Omega})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω; $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторых компактных множеств, содержащихся в Ω (для каждой функции свое множество); $H_s(\Omega)$ – соболевское пространство функций на Ω, имеющих суммируемые с квадратом производные порядка s, с соответствующей метрикой; $\overset{0}{H}_1(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по метрике $H_1(\Omega)$; $H_{2,0}(\Omega) = \overset{0}{H}_1(\Omega) \cap H_2(\Omega)$.

Заданы формально самосопряженные эллиптические дифференциальные выражения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{A}u = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - au$$

$$a > 0 \quad b > 0 \quad \mathcal{A} \neq \mathcal{B}.$$

$$\mathcal{B}u = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - bu$$

Определим операторы

$$A_0 : C_0^\infty(\Omega) \ni u \to \mathcal{A}u \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$B_0 : C_0^\infty(\Omega) \ni u \to \mathcal{B}u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Операторы A_0 и B_0, очевидно, положительно определенные и симметричные в $L_2(\Omega)$. Обозначим через $\approx{A}$ и $\approx{B}$ их самосопряженные расширения по Фридрихсу /1/.

Очевидно, A_0 и B_0 коммутируют, т.е.

$$A_0 B_0 u = B_0 A_0 u$$

для каждого $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Настоящая работа посвящена изучению следующего вопроса: когда сильно коммутируют x) операторы $\tilde{\tilde{A}}$ и $\tilde{\tilde{B}}$.

Сделаем одно замечание. Согласно известной теореме линейной алгебры /2/, матрицы $(a_{ik})(b_{ik})$ можно привести одновременно к диагональному виду, т.е. существует невырожденная матрица Z такая, что $Z'(a_{ik})Z = (a_k \delta_{ik})$ $Z'(b_{ik})Z = \delta_{ik} = E$. Преобразование $x' = Zx$ отображает область Ω на область Ω'. Пусть

$$T : L_2(\Omega) \supset u(x) \to \frac{1}{\sqrt{|\det Z|}} u(Z^{-1}x') = u(x') \in L_2(\Omega').$$

Оператор T отображает взаимнооднозначно и изометрично $L_2(\Omega)$ на $L_2(\Omega')$. Нетрудно видеть, что

$$A_0 = T^{-1} A_0' T - aI$$

$$B_0 = T^{-1} B_0' T - bI,$$

где

$$A_0' : C_0^\infty(\Omega') \supset u(x') \to \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k'^2} = \mathcal{A}' u$$

$$B_0' : C_0^\infty(\Omega') \supset u(x') \to \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k'^2} = \mathcal{B}' u. \qquad (1)$$

Можно также показать, что

$$\tilde{\tilde{A}} = T^{-1} \tilde{\tilde{A}}' T - aI$$

$$\tilde{\tilde{B}} = T^{-1} \tilde{\tilde{B}}' T - bI, \qquad (2)$$

где $\tilde{\tilde{A}}', \tilde{\tilde{B}}'$ – расширения по Фридрихсу операторов A_0' и B_0'. Из (2) следует, что операторы $\tilde{\tilde{A}}$ и $\tilde{\tilde{B}}$ сильно коммутируют тогда и только тогда, когда сильно коммутируют $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$. Таким образом, достаточно изучить условия сильной коммутации операторов $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$.

Назовем область Ω' неособенной, если она ограничена, имеет кусочно-гладкую границу и выпукла в некоторой окрестности каждой конической точки /3/, если таковые имеются.

x) Говорят, что операторы сильно коммутируют, если их спектральные семейства коммутируют.

Пусть множество коэффициентов a_k из (1) распадается на следующие группы равных между собой коэффициентов.

$$\begin{aligned} &a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_p} \\ &a_{j_1} = a_{j_2} = \ldots = a_{j_q} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{\ell_1} = a_{\ell_2} = \ldots = a_{\ell_r}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Коэффициенты из различных групп не равны. Пусть G_i – неособенная область в p – мерном подпространстве, натянутом на координатных осях $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$. Аналогично $G_j, \ldots G_\ell$ области, соответствующие другим группам равных между собой коэффициентов. Образуем цилиндр

$$\Omega' = G_i \times G_j \times \ldots \times C_\ell. \qquad (4)$$

Справедлива следующая:

Теорема 1. Если область Ω' неособенная и операторы $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ сильно коммутируют, то Ω' – цилиндр вида (4).

Прежде чем приступить к доказательству теоремы докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть операторы A и B, действующие в $L_2(\Omega)$, ~~в себя~~, самосопряжены, сильно коммутируют и $D(A) = D(B)$ x). Если они имеют ограниченные обратные, то $D(A^2) = D(B^2)$.

Доказательство леммы. Пусть $\mu(\xi)$ – некоторая мера Радона на E_1. Обозначим через $L_2(E_1, \mu)$ гильбертово пространство всех измеримых функций $\hat{u}(\xi)$ на E_1 с комплексными значениями, для которых

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 d\mu(\xi) < \infty$$

со скалярным произведением

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \int \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\mu(\xi).$$

Так как A и B сильно коммутируют, то по спектральной теореме /5/ существует некоторая мера μ, унитарное преобразование $U : L_2(\Omega) \to L_2(E_1, \mu)$ и функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ такие, что

x) Через $D(A)$ обозначаем, как обычно, область определения оператора A.

$$A = U^{-1}\hat{A}\,U, \qquad B = U^{-1}\hat{B}\,U, \tag{5}$$

где

$$\hat{A}: L_2(E_1,\mu) \supset \hat{u}(\xi) \to f(\xi)\hat{u}(\xi) \in L_2(E_1,\mu)$$

$$\hat{B}: L_2(E_1,\mu) \supset \hat{u}(\xi) \to g(\xi)\hat{u}(\xi) \in L_2(E_1,\mu).$$

Так как $D(A) = D(B)$, из (5) следует, что

$$D(\hat{A}) = D(\hat{B}). \tag{6}$$

Имеем

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u}: \int|\hat{u}|^2 d\mu < \infty, \ \int|f\hat{u}|^2 d\mu < \infty\}$$

$$D(\hat{B}) = \{\hat{u}: \int|\hat{u}|^2 d\mu < \infty \ \int|g\hat{u}|^2 d\mu < \infty\}. \tag{7}$$

По условиям леммы операторы A^{-1} и B^{-1} определены на всем $L_2(\Omega)$. Тогда, очевидно, $\hat{A}^{-1}$ и $\hat{B}^{-1}$ определены на всем $L_2(E_1,\mu)$, т.е.

$$D(\hat{A}^{-1}) = \{\hat{u}: \int|\hat{u}|^2 d\mu < \infty, \ \int\left|\frac{1}{f}\hat{u}\right|^2 d\mu < \infty\} =$$

$$= L_2(E_1,\mu) = \{\hat{u}: \int|\hat{u}|^2 d\mu < \infty\}.$$

Для $\hat{B}^{-1}$ аналогично.

Отсюда следует, что

$$\int|\hat{u}|^2 d\mu < \infty \Longrightarrow \int\left|\frac{1}{f}\hat{u}\right|^2 d\mu < \infty\ )^{*}$$

или, подставляя $f\hat{u}$ вместо $\hat{u}$, имеем

$$\int|f\hat{u}|^2 d\mu < \infty \Longrightarrow \int|\hat{u}|^2 d\mu < \infty. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

x) Знак $\Longrightarrow$ обозначает логическое следствие.

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u}: \int|f\hat{u}|^2 d\mu < \infty\}$$

и аналогично

$$D(\hat{B}) = \{\hat{u}: \int|g\hat{u}|^2 d\mu < \infty\}.$$

Теперь из (6) следует соотношение эквивалентности

$$\int|f\hat{u}|^2 d\mu < \infty \Longleftrightarrow \int|g\hat{u}|^2 d\mu < \infty. \tag{9}$$

Подставляя в (9) вместо $\hat{u}$ последовательно $f\hat{u}$ и $g\hat{u}$, получаем соответственно

$$\int|f\hat{u}|^2 d\mu < \infty \Longleftrightarrow \int|fg\hat{u}|^2 d\mu < \infty,$$

$$\int|fg\hat{u}|^2 d\mu < \infty \Longleftrightarrow \int|g^2\hat{u}|^2 d\mu < \infty.$$

Из последних двух соотношений вытекает

$$\int|f^2\hat{u}|^2 d\mu < \infty \Longleftrightarrow \int|g^2\hat{u}|^2 d\mu < \infty. \tag{10}$$

Из (10) следует, что

$$D(\hat{A}^2) = D(\hat{B}^2), \tag{11}$$

а отсюда и (5)

$$D(A^2) = D(B^2),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Так как область Ω' неособенная, то из результатов работ /3-4/ вытекает, что

$$D(\tilde{A}') = D(\tilde{B}') = H_{2,0}(\Omega') = \{u: u \in H_2(\Omega'), \ u/\omega = 0\}.$$

Из условий теоремы и из леммы получаем

$$D(\tilde{\tilde{A}}'^{2}) = D(\tilde{\tilde{B}}'^{2}). \tag{12}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} D(\tilde{\tilde{A}}'^{2}) &= \{ u : u \in H_{2,0}(\Omega'), \tilde{\tilde{A}}' u \in H_2(\Omega'), \tilde{\tilde{A}}' u/\omega = 0 \} \\ D(\tilde{\tilde{B}}'^{2}) &= \{ u : u \in H_{2,0}(\Omega'), \tilde{\tilde{B}} u \in H_2(\Omega')\ \tilde{\tilde{B}}' u/\omega = 0 \}. \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $u \in H_4$. Запишем условия $\tilde{\tilde{A}}' u/\omega = 0$, $\tilde{\tilde{B}}' u/\omega = 0$ в локальных координатах на поверхности ω. В окрестности некоторого гладкого куска ω_1 поверхности ω введем систему криволинейных координат

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \xi_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

так, чтобы ω_1 задавалось уравнением $\xi_1 = 0$.

В новых координатах $\mathcal{A}'u$ и $\mathcal{B}'u$ принимают вид:

$$\mathcal{A}' u = \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_\ell} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_k^2}$$

$$\mathcal{B}' u = \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_\ell} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_k^2}.$$

Так как $u/\omega_1 = 0$, то все производные u по $\xi_2 \ldots \xi_n$ обращаются в нуль на границе, и условия $\tilde{\tilde{A}}' u/\omega_1 = 0$ и $\tilde{\tilde{B}}' u/\omega_1 = 0$ принимают вид

$$\Big[\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_\ell} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_k^2} \Big]_{\omega_1} = 0 \tag{14}$$

$$\Big[\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_\ell} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_k^2} \Big]_{\omega_1} = 0. \tag{15}$$

Пусть Ω_1 – подобласть Ω' с границей $\partial\Omega_1$ такая, что $\omega' \cap \partial\Omega_1 = \omega_1$. Обозначим через Ω_1^δ множество точек Ω_1, расстояние которых до $\partial\Omega_1 \setminus \omega_1$ не меньше δ. Пусть $\omega_1^\delta = \omega \cap \partial\Omega_1^\delta \subset \omega_1$. Возьмем n функций $\phi_k(\xi') = \phi_k(\xi_2, \ldots, \xi_n) \in C^\infty(\omega_1)$ $(k=1,\ldots,n)$ обращающихся в нуль вне ω_1^δ и таких, что на ω_1^δ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_n} & \phi_1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_n} & \phi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi_n} & \phi_n \end{vmatrix} \neq 0 \tag{16}$$

Пусть

$$\psi_k(\xi') = \frac{-1}{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \right)^2} \Big[\phi_k \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_k^2} + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_\ell} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} \Big].$$

Построим теперь функции $v_k(x) \in H_4(\Omega_1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$v_k/\omega_1 = 0, \quad \frac{\partial v_k}{\partial \xi_1} / \omega_1 = \phi_k(\xi'), \quad \frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi_1^2} / \omega_1 = \psi_k(\xi')$$

и обращающиеся в нуль вне Ω_1^δ. Продолжим $v_k(x)$ нулем на всей Ω' и полученную функцию обозначим $u_k(x)$. Очевидно, $u_k \in H_4(\Omega)$, $u_k/\omega = 0$. Кроме того, u_k удовлетворяют соотношению (15) на ω_1 и обращаются в нуль вблизи остальной части границы ω так, что $B' u_k/\omega = 0$. Из сказанного следует, что $u_k \in D(\tilde{\tilde{B}}'^{2})$. Но тогда $u_k \in D(\tilde{\tilde{A}}'^{2})$ и, значит, u_k удовлетворяет также (14). Из (16) следует, что для каждой точки ω_1^δ векторы $n+1$ –мерного пространства

$$\chi_k(\xi') = \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi_1^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi_1 \partial \xi_n}, \frac{\partial u_k}{\partial \xi_1} \right), \quad k = 1, \ldots, n$$

линейно независимы. Соотношения (14) и (15) означают, что и векторы χ_k ортогональны векторам

$$\pi(\xi') = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_k^2} \Big)$$

$$\rho(\xi') = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_n}{\partial x}, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_k^2} \Big).$$

Из этого следует, что $\pi(\xi')$ и $\rho(\xi')$ коллинеарны для каждой точки ω_1^δ, значит, существует функция $\kappa(x)$, $x \in \omega_1^\delta$ такая, что

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} (a_k - \kappa(x)) \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} \Big]_{\omega_1^\delta} = 0, \quad \ell = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Обозначим

$$P_k(x) = (a_k - \kappa(x)) \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}. \tag{18}$$

Соотношения (17) принимают вид

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} P_k(x) \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} \Big]_{\omega_1^\delta} = 0, \quad \ell = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Без ограничения общности можно предположить, что уравнение $\xi_1(x) = 0$ разрешено относительно некоторой из переменных $x_1, \ldots, x_n$, например, относительно x_{i_1} (индекс i_1 как в (3)). Тогда

$$\xi_1(x) = x_{i_1} - \zeta(x'), \tag{20}$$

где

$$x' = (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n).$$

Части ω_1^δ границы ω соответствует некоторая область O_1^δ на координатной гиперплоскости, ортогональной оси x_{i_1}. Если $x' \in O_1^\delta$, то

через $M(x')$ будем обозначать точку $(x_1, \ldots, x_{i-1}, \zeta(x'), x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \omega_1^\delta$.
Из (19) и (20) при $\ell = 1$ получаем

$$P_{i_1}(M(x')) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^{n} P_k(M(x')) \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} = 0. \tag{21}$$

При $\ell \neq i_1$ обозначим

$$\eta_\ell(x') = \xi_\ell(M(x')), \quad x' \in O_1^\delta.$$

Дифференцируя, получаем при $k \neq i_1$

$$\frac{\partial \eta_\ell}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial \zeta}{\partial x_k}.$$

Определим отсюда $\dfrac{\partial \xi_\ell}{\partial x_k}$ и подставим полученное выражение в (19). Получим, что для $x' \in O_1^\delta$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^{n} P_k(M(x')) \frac{\partial \eta_\ell}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_{i_1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^{n} P_k(M(x')) \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} + P_{i_1}(M(x')) \frac{\partial \xi_\ell}{\partial x_{i_1}} = 0. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^{n} P_k(M(x')) \frac{\partial \eta_\ell}{\partial x_k} = 0, \quad x' \in O_1^\delta, \quad \ell \neq i_1. \tag{23}$$

Функции $\eta_\ell(x')$, $\ell = 1, \ldots, n$, $\ell \neq i_1$ функционально независимы. Таким образом, линейное уравнение с частными производными первого порядка (23) имеет $n-1$ функционально независимых решений. Из этого следует /6/, что все коэффициенты уравнения равны нулю, т.е.

$$P_k(M(x')) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad k \neq i_1, \quad x' \in O_1. \tag{24}$$

Из (21) и (24) следует, что и

$$P_{i_1}(M(x')) = 0, \quad x' \in O_1. \tag{25}$$

Из (18) и (25), учитывая $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_{i_1}} = 1$ и (3), получаем

$$\kappa(x') = a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_p}.$$

Тогда при $k \neq i_1, \dots, i_p$ из (18) и (24) следует

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}(M(x')) = 0, \quad x' \in O_1,$$

т.е. ξ_1 не зависит от x_k при $k \neq i_1, \dots, i_p$. Таким образом, ω_1^{δ} есть кусок цилиндрической поверхности

$$\xi_1(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}) = 0. \tag{26}$$

Итак, мы получили, что граница области Ω' состоит из кусков цилиндрических поверхностей вида (26). Так как область Ω' неособенная, то из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Нетрудно доказать обратную теорему 2: Если Ω' – цилиндрическая область вида (4), то операторы $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ сильно коммутируют.

Доказательство. Пусть $u^1_\mu(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$, $\mu = 1, 2, \dots$ – полный набор собственных функций оператора Лапласа $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{i_p}^2}$ в области G_1 с нулевыми условиями Дирихле на границе. Аналогично $u^j_\nu(x_{j_1}, \dots, x_{j_q}), \dots, u^\ell_\sigma(x_{\ell_1}, \dots, x_{\ell_r})$, $\nu, \dots, \sigma = 1, 2, \dots$. Тогда функции

$$u_{\mu\nu\dots\sigma}(x) = u^1_\mu(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})\, u^j_\nu(x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) \dots u^\ell_\sigma(x_{\ell_1}, \dots, x_{\ell_r})$$

$$\mu, \nu, \dots, \sigma = 1, 2, \dots$$

образуют полную систему собственных функций, общих для операторов $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$. Действительно $u_{\mu\nu\dots\sigma}(x) \in H_2(\Omega')$, так как

$$u^1_\mu \in H_2(G_1), \quad u^j_\nu \in H_2(G_j) \dots \quad u^\ell_\sigma \in H_2(G_\ell).$$

Функции $u_{\mu\dots\sigma}(x)$ обращаются в нуль на границе Ω, так как $u^1_\mu, u^j_\nu \dots u^\ell_\sigma$ обращаются в нуль на границах, соответственно, $G_1, G_j \dots G_\ell$. Значит $u_{\mu\dots\sigma} \in H_{2,0}(\Omega') = D(\tilde{\tilde{A}}') = D(\tilde{\tilde{B}}')$. Имеем:

$$A' u_{\mu\nu\dots\sigma} = \mathcal{A}' u_{\mu\dots\sigma} = (a_{i_1}\lambda^1_\mu + a_{j_1}\lambda^j_\nu + \dots + a_{\ell_1}\lambda^\ell_\sigma) u_{\mu\dots\sigma}$$

$$\tilde{\tilde{B}}' u_{\mu\dots\sigma} = \mathcal{B}' u_{\mu\dots\sigma} = (\lambda^1_\mu + \lambda^j_\nu + \dots + \lambda^\ell_\sigma) u_{\mu\dots\sigma}.$$

Итак, $u_{\mu\dots\sigma}$ являются действительно общими собственными векторами операторов $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$. Полнота системы $u_{\mu\dots\sigma}$ в $L_2(\Omega')$ следует из полноты систем $u^1_\mu, u^j_\nu, \dots, u^\ell_\sigma$ соответственно в $L_2(G_1), L_2(G_j), \dots, L_2(G_\ell)$.

Из того, что операторы $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ имеют полную систему общих собственных векторов, следует, что они сильно коммутируют.

До сих пор мы рассматривали только неособенные области. Исследуем теперь случай, когда область Ω' не неособенна. Ограничимся рассмотрением случая двух измерений.

Теорема 3. Пусть Ω' – плоская область с кусочно-гладкой границей, имеющая некоторые углы, больше π (входящие углы). Для такой области операторы $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ не коммутируют сильно.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ коммутируют. Тогда /1/ оператор $\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'$ в существенном самосопряжен. Имеем

$$D(\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}') = D(\tilde{\tilde{A}}') \cap D(\tilde{\tilde{B}}').$$

Покажем, что

$$D(\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}') = H_{2,0}. \tag{27}$$

Необходимо доказать только включение $D(\tilde{\tilde{A}}') \cap D(\tilde{\tilde{B}}') \subset H_2$. Пусть $u(x) \in D(\tilde{\tilde{A}}') \cap D(\tilde{\tilde{B}}')$ и P – угловая точка области Ω'. Пусть $\zeta_p(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ обращается в нуль вне некоторой окрестности P, в которой нет других угловых точек, и равна единице внутри некоторой меньшей окрестности. Так как $u(x) \in D(\tilde{\tilde{B}}') \cap D(\tilde{\tilde{A}}')$, то $\zeta_p(x)u(x) \in D(\tilde{\tilde{B}}') \cap D(\tilde{\tilde{A}}')$. Но, как показано в /3-4/, из того, что $\zeta_p u \in D(\tilde{\tilde{B}}')$, следует, что $\zeta_p u$ имеет вид

$$\zeta_p u = C r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega}\phi + u_1,$$

где r и ϕ – полярные координаты в окрестности точки P, $\omega > \pi$ – величина угла в P, C – константа и $u_1 \in H_2(\Omega')$. С другой стороны, так как $\zeta_p u \in D(\tilde{\tilde{A}}')$, , то $\zeta_p u \in D(A_0'^*)$ и значит, функция

$$\mathcal{A}'(\zeta_p u) = \left(a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\zeta_p u) = C(a_1 - a_2)\frac{\pi}{\omega}\left(\frac{\pi}{\omega} - 1\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} - 2\right)\phi + v_1$$
$$v_1 \in L_2(\Omega')$$

должна принадлежать $L_2(\Omega')$. Так как $v_1 \in L_2(\Omega')$, то это возможно только при $C=0$. Значит, $\zeta_p u = u_1 \in H_2(\Omega')$. Таким образом, мы получили, что $u \in H_2$ в окрестности любой угловой точки. Как известно, $u \in H_2$ и в любой подобласти, не содержащей угловых точек. Из сказанного следует, что $u \in H_2(\Omega)$.

Соотношение 27 доказано.

Докажем теперь, что $\overline{\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'}$ совпадает со своим замыканием. Действительно, пусть $u \in D(\overline{\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'})$ и $(\overline{\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'})u = f$. Тогда существует последовательность $u_k \in D(\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}')$ такая, что $u_k \xrightarrow{L_2} u$ и $(\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}')u_k \xrightarrow{L_2} f$. Так как, согласно сказанному $u_k \in H_{2,0}$, то, как показано в /3/, имеет место априорная оценка

$$\| u_k - u_\ell \|_{H_2(\Omega')} \le C\left[\| (\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}')(u_k - u_\ell) \|_{L_2(\Omega')} + \| u_k - u_\ell \|_{L_2(\Omega')}\right].$$

Последнее неравенство показывает, что вместе с u_k принадлежит $H_{2,0}(\Omega')$ и предел u, значит, $\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'$ замкнут. Следовательно, он не только в существенном самосопряжен, но и самосопряжен. Рассмотрим симметричный оператор $K_0 = A_0' + B_0'$, определенный на $C_0^\infty(\Omega')$. Оператор $\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'$ является самосопряженным расширением оператора K_0 и при этом

$$D(\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}') \subset H_1^0 = H_{K_0},$$

где H_{K_0} – замыкание $C_0^\infty(\Omega')$ в смысле K_0 – сходимости /7/. Согласно одной теореме М.Г.Крейна /7/, $\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}'$ совпадает с расширением по Фридрихсу $\tilde{K}$. Это, однако, невозможно, так как область определения $\tilde{K}$ содержит /4/ функции с особенностями в углах, не принадлежащие $H_2 \supset D(\tilde{\tilde{A}}' + \tilde{\tilde{B}}')$. Полученное противоречие показывает, что допущение о коммутации $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ неверно. Теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекает следующее

Следствие: На плоскости единственные области с кусочно-гладкой границей, для которых операторы $\tilde{\tilde{A}}'$ и $\tilde{\tilde{B}}'$ сильно коммутируют, являются прямоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям.

Автор благодарит академика Хр. Христова и Г.Ласснера за плодотворные обсуждения.

Литература

1. К. Морен. Методы Гильбертова пространства. Издательство "Мир", Москва, 1965.
2. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. Издательство "Наука", Москва, 1967.
3. В.А. Кондратьев. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Моск. матем. о-ва, т. 16, 1967.
4. Н.Ш. Бирман, Г.Е. Скворцов. О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей. Известия высших учебных заведений. Математика №5 (30), 1962.
5. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. Уравнения с частными производными. Издательство "Мир", Москва, 1966.
6. Э. Камке. Справочник по диф. у-ям в частных производных первого порядка. Издательство "Наука", Москва, 1966.
7. Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве. Издательство "Наука", Москва, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1969 года.