БЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

убна

Р5 - 4128

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко

СТАБИЛИЗАЦИЯ
ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1968

Объединенный институт
ядерных исследований

ЛВТА

P5 - 4128

Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

В работе [I] доказана следующая

Теорема I. Пусть $y=\varphi(x)$ – непрерывная функция, отображающая банахово пространство X в банахово пространство Y.

Пусть уравнение

$$\varphi(x)=0$$

имеет единственное решение x^* в области $\mathcal{D}$:

$$\|x-x^*\|\le M.$$

Предположим, что в $\mathcal{D}$ существуют непрерывные производные Фреше $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, а также обратный оператор $\varphi'(x)^{-1}$, для которого выполняется неравенство

$$\|\varphi'(x)^{-1}\|\le B.$$

Тогда существует сфера S : $\|x-x^*\|<\varepsilon$, $\varepsilon<M$, такая, что для любого $x_0\in S$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt}=-\varphi'(x)^{-1}\varphi(x),$$

где t – вещественный параметр, с начальным условием

$$x(0)=x_0$$

имеет единственное решение $x=x(t)$ в промежутке $0\le t<+\infty$ и

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x^*. \qquad (*)$$

Отметим, что соотношение (*) надо понимать так:

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*\|_X=0.$$

В работах [1], [2], [3], [4] теорема 1 использовалась при решении граничных задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и n-го порядков, при решении нелинейных интегральных уравнений, а также при решении обратной задачи в теории рассеяния.

В настоящей работе метод стабилизации по параметру применяется к решению краевой задачи для нелинейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка.

В разделе I дается постановка задачи, формулируется и доказывается теорема о введении непрерывного параметра.

В разделе II приводится схема приближенного метода решения поставленной задачи.

I

Рассмотрим уравнение

$$\Delta z(x,y) + f(x,y,z) = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $f(x,y,z)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Ищется решение уравнения (1), заданного в ограниченной плоской области G, удовлетворяющее на границе Γ условию

$$z(x,y)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Предполагаем, что граница Γ области G достаточно гладкая. Рассмотрим полное линейное нормированное пространство $X(G,H)$ дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{G}$ функций $z(x,y)$, обращающихся в нуль на границе и таких, что вторые производные от $z(x,y)$ удовлетворяют в $\bar{G}$ условию Гёльдера с показателем λ $(0<\lambda<1)$.

Норма элемента $z(x,y)$ в пространстве $X(G,H)$ определена так:

$$\|z(x,y)\|_X = \max_{\bar{G}}|z(x,y)| + \max_{\bar{G}}|z'_x(x,y)| + \max_{\bar{G}}|z'_y(x,y)| + \\ + \max_{\bar{G}}|z''_{x^2}(x,y)| + \max_{\bar{G}}|z''_{xy}(x,y)| + \max_{\bar{G}}|z''_{y^2}(x,y)| + H_{z''_{x^2}} + H_{z''_{xy}} + H_{z''_{y^2}}, \tag{3}$$

где через $H_{z''_{x^2}}$, $H_{z''_{xy}}$, $H_{z''_{y^2}}$ обозначены нижние грани констант Гёльдера с показателем λ соответственно для функций $z''_{x^2}(x,y)$, $z''_{xy}(x,y)$, $z''_{y^2}(x,y)$ в области $\bar{G}$.

Для краткости иногда будем писать

$$\|z\|_X = \|z\|_{C^2} + H_{z''},$$

где $\|z(x,y)\|_{C^2}$ обозначает норму $z(x,y)$ в пространстве $C^2(G)$, а

$$H_{z''} = H_{z''_{x^2}} + H_{z''_{xy}} + H_{z''_{y^2}}.$$

Введем банахово пространство $Y(G,H)$ непрерывных в $\bar{G}$ функций $w(x,y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем λ $(0<\lambda<1)$. Норму в $Y(G,H)$ определим соотношением

$$\|w(x,y)\|_Y = \max_{\bar{G}} |w(x,y)| + H_w, \tag{4}$$

где H_w – нижняя грань констант Гёльдера для функции $w(x,y)$ в области $\bar{G}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Пусть дана последовательность непрерывных функций $\{z_n(P)\}$, равномерно сходящаяся к функции $z(P)$. Если каждая из функций $z_n(P)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ $(0<\lambda<1)$, причем последовательность констант Гёльдера H_{z_n} сходится к числу H, то константа Гёльдера H_z для предельной функции $z(P)$ не превосходит H :

$$H_z \leq H. \tag{5}$$

Имеет место следующая

<u>Теорема 2</u>. Пусть в области $\mathcal{D}$:

$$\|z - z^*\|_X \leq M \tag{6}$$

пространства $X(G,H)$ краевая задача (I) – (2) имеет, и притом единственное, решение $z^*(x,y)$.

Предположим, что для любого $z(x,y) \in \mathcal{D}$ и любого

$w(x,y) \in Y(G,H)$ краевая задача

$$\Delta v(x,y) + f'_z(x,y,z)v(x,y) = w(x,y), \tag{7}$$

$$v(x,y)\big|_{\Gamma} = 0 \tag{8}$$

имеет единственное решение $v(x,y) \in X(G,H)$.

Тогда существует сфера S :

$$\| z - z^* \|_X \le N \quad , \quad N < M,$$

такая, что для любого $z_0(x,y) \in S$ в цилиндре $\Omega = G \times [0 \le t < +\infty)$ существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta v + f'_z(x,y,z)v = -\left[\Delta z + f(x,y,z)\right], \\ \dfrac{\partial z(x,y,t)}{\partial t} = v(x,y,t), \end{cases} \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} v(x,y,t)\big|_{Б} = 0 \,, & \text{(Б - боковая поверхность цилиндра } \Omega \text{)} \\ z(x,y,t)\big|_{t=0} = z_0(x,y) \,, \quad z_0(x,y)\big|_{\Gamma} = 0 \,, & \end{cases} \tag{10}$$

причем $$\lim_{t\to\infty} \| z(x,y,t) - z^*(x,y) \|_X = 0 . \tag{11}$$

<u>Доказательство</u>.

I. Отметим, что для краевой задачи (I)-(2) оператор φ теоремы I имеет вид

$$\varphi(z) = \Delta z + f(x,y,z) .$$

Согласно определению производной Фреше (см., например, [5] , [6]) имеем

$$\varphi'(z) = \Delta + f'_z(x,y,z),$$

$$\varphi''(z) = f''_{zz}(x,y,z) .$$

Поскольку $f(x,y,z)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то условие теоремы I о существовании в области $\mathcal{D}$ непрерывных производных Фреше $\varphi'(z)$ и $\varphi''(z)$ выполнено.

2. Из предположения, что краевая задача (7)–(8) имеет единственное решение, получаем существование в области $\mathcal{D}$ оператора $\varphi'(z)^{-1}$, обратного к оператору $\varphi'(z)$.

3. Докажем ограниченность оператора $\varphi'(z)^{-1}$, т.е. убедимся, что существует константа $\mathcal{K}$ – одна и та же для всех $z(x,y)\in\mathcal{D}$, – такая, что

$$\| \varphi'(z)^{-1} \| \leq \mathcal{K} .$$

Считая, что норма функций $w(x,y)$, на которых рассматривается оператор $\varphi'(z)^{-1}$ не превосходит единицы, т.е.

$$\|w(x,y)\|_Y = \max_{\bar{G}} |w(x,y)| + H_w \leq 1,$$

и учитывая, что

$$v(x,y) = \varphi'(z)^{-1} w(x,y), \tag{I2}$$

мы сводим нашу задачу к тому, чтобы для любого $z(x,y)\in\mathcal{D}$ и любого $w(x,y)\in Y$, $\|w\|_Y \leq 1$, установить существование константы $\mathcal{K}$ такой, что

$$\| v(x,y) \|_X \leq \mathcal{K} .$$

Сначала покажем, что $v(x,y)$ ограничено в норме $C^2(G)$:

$$\| v(x,y) \|_{C^2} \leq \mathcal{K}_1 . \tag{I3}$$

Предположим противное. Тогда для любого номера n можно указать функции

$$z_n(x,y)\in\mathcal{D},\ w_n(x,y)\in Y(G,H),\ \|w_n(x,y)\|_Y \leq 1,$$

такие, что соответствующая им функция $v_n(x,y)$, получающаяся по формуле (I2), будет удовлетворять условию

$$\| v(x,y) \|_{C^2} \geq n . \tag{I4}$$

Легко доказать, что из последовательности функций $\{w_n(x,y)\} \subset Y$, $\|w_n(x,y)\|_Y \le 1$, можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность, причем предельная функция $w(x,y)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ и $\|w(x,y)\|_Y \le 1$, так что

$$w(x,y) \in Y .$$

Покажем, что последовательность $\{z_n(x,y)\} \subset \mathcal{D}$ сходится к функции $z(x,y)^*$ и что предельная функция принадлежит области $\mathcal{D}$, определенной соотношением (6).

Из условия, что $z_n \in \mathcal{D}$, вытекает

$$\| z_n(x,y) - z^*(x,y)\|_X \le M,$$

или, что то же,

$$\max_{\bar G}|z_n - z^*| + \max_{\bar G}|z'_{nx} - z^{*\prime}_x| + \max_{\bar G}|z'_{ny} - z^{*\prime}_y| +$$
$$+ \max_{\bar G}|z''_{nx^2} - z^{*\prime\prime}_{x^2}| + \max_{\bar G}|z''_{nxy} - z^{*\prime\prime}_{xy}| + \max_{\bar G}|z''_{ny^2} - z^{*\prime\prime}_{y^2}| + \tag{15}$$
$$+ H_{(z''_{nx^2} - z^{*\prime\prime}_{x^2})} + H_{(z''_{nxy} - z^{*\prime\prime}_{xy})} + H_{(z''_{ny^2} - z^{*\prime\prime}_{y^2})} \le M.$$

Отсюда согласно теореме Арцела получаем равномерную сходимость

$$\begin{aligned} &z_n(x,y) \rightrightarrows z(x,y), &\quad& z''_{nx^2}(x,y) \rightrightarrows z''_{x^2}(x,y),\\ &z'_{nx}(x,y) \rightrightarrows z'_x(x,y), && z''_{nxy}(x,y) \rightrightarrows z''_{xy}(x,y),\\ &z'_{ny}(x,y) \rightrightarrows z'_y(x,y), && z''_{ny^2}(x,y) \rightrightarrows z''_{y^2}(x,y). \end{aligned} \tag{16}$$

В самом деле, из (15) следует равномерная ограниченность модулей

$$|z_n(x,y)|,\ |z'_{nx}(x,y)|,\ |z'_{ny}(x,y)|,\ |z''_{nx^2}(x,y)|,$$
$$|z''_{nxy}(x,y)|,\ |z''_{ny^2}(x,y)| \le M_1 . \tag{17}$$

Равностепенная непрерывность последовательности функций $\{z_n(x,y)\}$ следует из ограниченности первых производных $|z'_{nx}(x,y)|$ и $|z'_{ny}(x,y)|$; равностепенная непрерывность последовательностей $\{z'_{nx}(x,y)\}$ и $\{z'_{ny}(x,y)\}$ следует из ограниченности вторых производных, а равностепенная непрерывность последовательностей $\{z''_{nx^2}(x,y)\}$, $\{z''_{nxy}(x,y)\}$ и $\{z''_{ny^2}(x,y)\}$ обеспечивается равномерной ограниченностью констант Гёльдера: $H_{z''} < M$.

Покажем, например, что последовательность $\{z''_{nx^2}(x,y)\}$ равностепенно непрерывна.

Согласно выбору метрики в пространстве $X(C,H)$ каждая из функций последовательности $\{z''_{nx^2}(x,y)\}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ, т.е.

$$|z''_{nx^2}(P) - z''_{nx^2}(Q)| \le H_{z''_{nx^2}} [\rho(P,Q)]^\lambda,$$

где $\rho(P,Q)$ – расстояние между точками P и Q.

Но $H_{z''_{nx^2}} \le H_{(z''_{nx^2} - z''_{x^2})} + H_{z''_{x^2}} \le M + H_{z''_{x^2}} = M_2$.

Пусть ε – произвольное положительное число.

Выбирая $\rho < \delta$, где $\delta = \frac{1}{M_2^{\lambda}} \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$,

получим

$$|z''_{nx^2}(P) - z''_{nx^2}(Q)| \le \varepsilon.$$

Значит, $\{z''_{nx^2}\}$ равностепенно непрерывна.

Аналогично доказывается равностепенная непрерывность последовательностей $\{z''_{nxy}\}$ и $\{z''_{ny^2}\}$.

Итак, имеем равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность последовательностей $\{z_n(x,y)\}, \ldots, \{z''_{ny^2}(x,y)\}$, так что применимость теоремы Арцела обоснована.

Докажем, что $z(x,y) \in D$.

Исходя из того, что

$$z_n(x,y),\ z'_{nx}(x,y),\ z'_{ny}(x,y),\ z''_{nx^2}(x,y),\ z''_{nxy}(x,y),\ z''_{ny^2}(x,y)$$

равномерно сходятся соответственно к

$$z(x,y),\ z'_x(x,y),\ z'_y(x,y),\ z''_{x^2}(x,y),\ z''_{xy}(x,y),\ z''_{y^2}(x,y),$$

можем утверждать, что

$$\max_{\bar{G}} |z_n - z^*| \Rightarrow \max_{\bar{G}} |z - z^*|,$$
$$\max_{\bar{G}} |z'_{nx} - z^{*\prime}_x| \Rightarrow \max_{\bar{G}} |z'_x - z^{*\prime}_x|,$$
$$\max_{\bar{G}} |z'_{ny} - z^{*\prime}_y| \Rightarrow \max_{\bar{G}} |z'_y - z^{*\prime}_y|,$$
$$\max_{\bar{G}} |z''_{nx^2} - z^{*\prime\prime}_{x^2}| \Rightarrow \max_{\bar{G}} |z''_{x^2} - z^{*\prime\prime}_{x^2}|, \qquad (18)$$
$$\max_{\bar{G}} |z''_{nxy} - z^{*\prime\prime}_{xy}| \Rightarrow \max_{\bar{G}} |z''_{xy} - z^{*\prime\prime}_{xy}|,$$
$$\max_{\bar{G}} |z''_{ny^2} - z^{*\prime\prime}_{y^2}| \Rightarrow \max_{\bar{G}} |z''_{y^2} - z^{*\prime\prime}_{y^2}|.$$

Складывая почленно левые и правые части и учитывая определение нормы в пространстве $X(G,H)$,получим

$$\|z_n - z^*\|_X - H_{(z_n - z^*)''} \Longrightarrow \|z - z^*\|_X - H_{(z - z^*)''}. \qquad (19)$$

Из (15) видим, что последовательность констант Гёльдера $H_{(z_n - z^*)''}$ ограничена, а значит, можно выбрать подпоследовательность $H_{(z_{n_k} - z^*)''}$, имеющую предел, скажем, ℓ $(\ell \le M)$. Заменим в (19) $\|z_n - z^*\|_X$ бо́льшим числом M, перенесем влево $H_{(z - z^*)''}$ и перейдем к пределу при $k \to \infty$.

В результате получим (см. ф-лу (5)):

$$M - \ell + H_{(z - z^*)''} \geqslant \|z - z^*\|_X ,$$

откуда очевидно

$$\|z - z^*\|_X \le M.$$

Итак,

$$z(x,y) \in \mathcal{D}.$$

Возвращаемся теперь к доказательству ограниченности нормы $V(x,y)$ в пространстве $C^2(G)$.

Воспользуемся следующей теоремой (см. [5] , стр. 157).

Пусть оператор A имеет обратный A^{-1}, и оператор ΔA таков, что
$$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}. \qquad (20)$$

Тогда оператор $B = A + \Delta A$ имеет обратный B^{-1}, причем

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \|A^{-1}\|^2. \qquad (21)$$

В нашем случае оператору А соответствует оператор $\varphi'(z)$, $\varphi'(z) = \Delta + f'_z(x,y,z)$, а оператору A^{-1} соответствует оператор $\varphi'(z)^{-1}$.

В качестве ΔA возьмем

$$\Delta_n \varphi'(z) = \varphi'(z_n) - \varphi'(z) = f'_z(x,y,z_n) - f'_z(x,y,z);$$

тогда оператору В будет соответствовать $\varphi'(z_n)$.

Очевидно, что $\Delta_n \varphi'(z)$, начиная с некоторого n, удовлетворяет условию (20), так как

$$\Delta_n \varphi'(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Оценка (21) в нашем случае принимает вид

$$\| \varphi'(z_n)^{-1} - \varphi'(z)^{-1} \| \le \frac{\|\Delta_n \varphi'(z)\| \cdot \|\varphi'(z)^{-1}\|^2}{1 - \|\Delta_n \varphi'(z)\| \cdot \|\varphi'(z)^{-1}\|} ; \qquad (22)$$

правая часть стремится к нулю, если $n\to\infty$, ибо $\Delta_n \varphi'(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а $\varphi'(z)^{-1}$ для конкретного $z(x,y)$ ограничена.

Здесь $z(x,y)$ – предельный элемент последовательности $\{z_n(x,y)\}$ в метрике пространства $C^2(G)$.

Итак, имеем

$$\|v_n(x,y)\|_{C^2} = \| \varphi'(z_n)^{-1} w_n(x,y) \| \le$$

$$\le \|\varphi'(z)^{-1} w_n(x,y)\| + \|[\varphi'(z_n)^{-1} - \varphi'(z)^{-1}] w_n(x,y)\| . \qquad (23)$$

Норма $\|\varphi'(z)^{-1} w_n(x,y)\|$ ограничена при любом n. Второй член справа в (23) стремится к нулю при $n\to\infty$, так что правая часть неравенства (23) ограничена при $n\to\infty$, а левая часть $\|v_n(x,y)\|_{C^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ по предположению. Противоречие. Значит, наше допущение неверно, а, следовательно, существует такая константа K_1, что

$$\|v(x,y)\|_{C^2} \le K_1$$

для любого $z(x,y) \in \mathcal{D}$ и $w(x,y) \in Y(G,H)$, $\|w(x,y)\|_Y \le 1$.

Покажем, наконец, что норма $v(x,y)$ ограничена в пространстве $X(G,H)$.

Так как

$$\|v(x,y)\|_X = \|v(x,y)\|_{C^2} + H_{v''} \quad , \quad \|v(x,y)\|_{C^2} \le K_1 ,$$

то необходимо установить ограниченность $H_{v''}$ при любом $z(x,y)\in\mathcal{D}$. Для этого воспользуемся теоремой о непрерывности по Гёльдеру решений эллиптического уравнения (см. [7], стр. 144)

$$\Delta v(x,y) + f_z'(x,y,z)v(x,y) = w(x,y) \tag{24}$$

и о равномерности оценки величины $H_{v''}$ для решения $v(x,y)$ задачи Дирихле (см. [8], стр. 142):

$$H_{v''} = O\Big(\big(F_0 + F_{0,\lambda}\big)\max_{\bar G}|v(x,y)| + \max_{\bar G}|v_x'(x,y)| + \max_{\bar G}|v_y'(x,y)| + \max_{\bar G}|v_{x^2}''(x,y)| + \max_{\bar G}|v_{xy}''(x,y)| + \max_{\bar G}|v_{y^2}''(x,y)| + \max_{\bar G}|w(x,y)|\Big) , \tag{25}$$

где

$$F_0 = \sup_{z\in\mathcal{D}}\max_{\bar G}|f_z'(x,y,z(x,y))| ,$$

$$F_{0,\lambda} = \sup_{z\in\mathcal{D}} H_{f_z'(x,y,z)} ,$$

$H_{f_z'(x,y,z)}$ – константа Гёльдера функции $f_z'(x,y,z(x,y))$ при фиксированной функции $z(x,y)$ из $\mathcal{D}$.

Как видно из (25), оценка $H_{v''}\le K_2$ не зависит от функции z, т.е. она равномерная относительно $z(x,y)\in\mathcal{D}$.

Итак, получили оценку

$$\|v(x,y)\|_X = \|v(x,y)\|_{C^2} + H_{v''} \le K_1 + K_2 = K ,$$

что равносильно ограниченности нормы оператора $\varphi'(z)^{-1}$ в области $\mathcal{D}$.

Таким образом, удовлетворены все предположения теоремы I. Значит, краевая задача (9)-(10) имеет решение $z = z(x,y,t)$ в цилиндре $\Omega = G\times[0\le t<+\infty)$, причем $\lim\limits_{t\to\infty}\|z(x,y,t) - z^*(x,y)\|_X = 0$.

Теорема 2 доказана.

Схема численного решения задачи (9)-(10).

Выберем шаг движения по параметру t, обозначим его через τ. Разобъем область $\Omega = G \times [0 \le t \le T]$ на n частей плоскостями, параллельными плоскости XOY:

$$t_0 = 0,\ t_1 = \tau,\ t_2 = 2\tau,\ \dots,\ t_n = n\tau = T.$$

Имея начальное значение $z(x,y,0) = z_0(x,y)$, $z_0(x,y) \in S$, и подставляя его в первое уравнение системы (9), получим линейное эллиптическое уравнение относительно $V(x,y,0)$:

$$\Delta V(x,y,0) + f_z'(x,y,z_0(x,y))V(x,y,0) = -[\Delta z_0(x,y) + f(x,y,z_0(x,y))] \tag{26}$$

с краевым условием

$$V(x,y,0)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{27}$$

Решая краевую задачу (26)-(27) любым известным методом (например, методом сеток), получим значение функции $V(x,y,t)$ на слое $t_0 = 0$. Заменим теперь второе уравнение системы (9) разностным соотношением

$$\frac{z(x,y,t_1) - z_0(x,y)}{\tau} = V(x,y,0),$$

откуда находим значение функции $z(x,y,t)$ на слое $t = t_1$.

Вообще, если функция $z(x,y,t)$ известна на слое $t = t_k$, то функция $V(x,y,t)$ на этом слое определяется решением линейной краевой задачи относительно $V(x,y,t_k)$ как функции x и y:

$$\begin{aligned} \Delta V(x,y,t_k) + f_z'(x,y,z(x,y,t_k))V(x,y,t_k) = \\ = -[\Delta z(x,y,t_k) + f(x,y,z(x,y,t_k))], \end{aligned} \tag{28}$$

$$V(x,y,t_k)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{29}$$

Найдя отсюда $V(x,y,t_k)$ определяем функцию $z(x,y,t)$ на следующем слое $t = t_{k+1}$:

$$Z(x, y, t_{k+1}) \doteq Z(x, y, t_k) + \tau \cdot V(x, y, t_k) \qquad (30)$$

и так далее.

В заключение заметим, что на основании теоремы 2 из [I] можно сделать следующий вывод.

Если допустить, что решение краевой задачи (28)-(29) осуществляется точно, то при $\tau \to 0$ получаем сходимость приближенного решения к точному.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, 180, № 1 (1968), стр. 18-21.
2. Е.П.Жидков, Г.А.Ососков. ДАН СССР, 180, № 6 (1968), стр. 1279-1282.
3. Е.П.Жидков, Чой Зай Хен. Препринт ОИЯИ, 11-3427, Дубна, 1967.
4. Я.Визнер, Е.П.Жидков, В.Лелек. Препринт ОИЯИ, Р5-3895, Дубна, 1968.
5. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа, "Наука", М, 1965.
6. Функциональный анализ, Справочная математическая библиотека, "Наука", М, 1964.
7. Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер. Уравнения с частными производными, "Мир", М, 1966.
8. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 октября 1968 г.