ДАН СССР, 1969, т. 187 №1, с. 18-20

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 4005

Р.Денчев

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦЕЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

Р5 - 4005

Р.Денчев

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦЕЙ

Пусть Ω -область m -мерного пространства, ограниченная конечным числом простых замкнутых поверхностей типа Ляпунова, не пересекающихся между собой.

Настоящая работа существенно опирается на результаты /1/. Приведем некоторые определения из /1/. Обозначим через P_Ω оператор продолжения нулем вне Ω:

$$P_\Omega : L_2(\Omega) \ni f(x) \to (R_\Omega f)(x) = \left\{ \begin{matrix} f(x) & \text{для} & x \in \Omega \\ 0 & \text{для} & x \notin \Omega \end{matrix} \right\} \in L_2(E_m)$$

и через R_Ω – оператор сужения на Ω:

$$R_\Omega : L_2(E_m) \ni f(x) \to (R_\Omega f)(x) = \{ f(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega \} \in L_2(\Omega).$$

Пусть

$$\Pi_\Omega = P_\Omega R_\Omega .$$

Пусть A -линейный оператор, отображающий $L_2(E_m)$ в себя. <u>Существенной нормой</u> оператора A назовем величину

$$|||A||| = \inf_k \| A - K \| ,$$

где k пробегает множество всех вполне непрерывных операторов.

Операторы A и B назовем <u>эквивалентными</u>, если $|||A - B||| = 0$.

Операторы A и B будем называть <u>эквивалентными</u> в точке x_0, если для каждого ϵ существует окрестность U точки x_0 такая, что

$$|||A\Pi_U - B\Pi_U||| < \epsilon \quad \text{и} \quad |||\Pi_U A - \Pi_U B||| < \epsilon .$$

Оператор $A: L_2(E_m) \to L_2(E_m)$ называется оператором локального типа, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2 оператор $\Pi_{F_1} A \Pi_{F_2}$ вполне непрерывен.

Обозначим через H_2 множество однородных функций нулевой степени, непрерывных на единичной сфере. Через Q_2 обозначим класс операторов вида

$$A: L_2(E_m) \ni u \to Au = F^{-1}\tilde{A} F u \in L_2(E_m),$$

где F –преобразование Фурье, а $\tilde{A}$ –оператор умножения на некоторую функцию из H_2, которую будем обозначать тоже через $\tilde{A}$ и называть символом оператора A.

Оператор A локального типа называем обобщенным сингулярным оператором, если в каждой точке x оператор A эквивалентен некоторому оператору $A_x \in Q_2$.

Символом обобщенного сингулярного оператора A называем функцию $\phi(x,\xi) = \tilde{A}_x(\xi)$, где $x \in E_m$, $\xi \in S$, а $\tilde{A}_x(\xi)$ –символ оператора A_x.

Настоящая работа посвящена изучению существенного спектра оператора

$$\mathcal{G} = R_\Omega A P_\Omega ;$$

где A –обобщенный сингулярный интеграл. Как известно, существенный спектр оператора $\mathcal{G}$ –это множество точек λ, для которых оператор $\mathcal{G} - \lambda I$ не является нетеровым.

Лемма. Оператор $\mathcal{G} - \lambda I$ нетеров тогда и только тогда, когда оператор

$$\mathfrak{S} = I\Pi_{E_m/\Omega} + (A - \lambda I)\Pi_\Omega : L_2(E_m) \to L_2(E_m) \quad \text{нетеров.}$$

Доказательство. Установим сначала, что [x)] $\mathrm{Ker}(\mathcal{G} - \lambda I)$ и $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{S}$ одновременно конечномерны. Обозначим

$$T: L_2(\Omega) \ni u \to \hat{u} = P_\Omega u - (A - \lambda) P_\Omega u \in L_2(E_m).$$

Преобразования T и P_Ω устанавливают взаимооднозначное соответствие между $\mathrm{Ker}(\mathcal{G} - \lambda I)$ и $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{S}$. Действительно, $Tu \in \mathrm{Ker}\,\mathfrak{S}$, если $u \in \mathrm{Ker}(\mathcal{G} - \lambda I)$, так как

$$\mathfrak{S}T = \Pi_{E_m/\Omega}[P_\Omega u - (\mathcal{G} - \lambda I)P_\Omega u] + (A - \lambda I)\Pi_\Omega[P_\Omega u - (\mathcal{G} - \lambda I)P_\Omega u] =$$

$$= -\Pi_{E_m/\Omega}(A - \lambda I)P_\Omega u + (A - \lambda I)P_\Omega u - (A - \lambda I)\Pi_\Omega(A - \lambda I)P_\Omega u =$$

$$= (1 - \Pi_{E_m/\Omega})(A - \lambda I)P_\Omega u = \Pi_\Omega(A - \lambda I)P_\Omega u = 0 .$$

Точно так же $R_\Omega \hat{u} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{G} - \lambda I)$ при $\hat{u} \in \mathrm{Ker}\,\mathfrak{S}$. Действительно, из

$$\Pi_{E_m/\Omega}\hat{u} + (A - \lambda I)\Pi_\Omega \hat{u} = 0$$

следует

$$R_\Omega \Pi_{E_m/\Omega}\hat{u} + R_\Omega (A - \lambda I)\Pi_\Omega \hat{u} = 0 ,$$

и, значит,

$$R_\Omega (A - \lambda I) P_\Omega R_\Omega \hat{u} = 0.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$R_\Omega T u = u \quad \text{и} \quad T R_\Omega \hat{u} = \hat{u} ,$$

если $u \in \mathrm{Ker}(\mathcal{G} - \lambda I)$ и $u \in \mathrm{Ker}\,\mathfrak{S}$ и, таким образом, взаимооднозначное соответствие между $\mathrm{Ker}(\mathcal{G} - \lambda I)$ и $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{S}$ установлено.

[x)] Через $\mathrm{Ker}\,L$ обозначим множество нулей оператора L.

Таким же образом можно показать, что коразмерности множеств значений операторов $\mathfrak{A}-\lambda\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{B}$ одновременно конечны.

Покажем, что $\operatorname{Im}(\mathfrak{A}-\lambda I)$ и $\operatorname{Im}\mathfrak{B}$ одновременно замкнуты. Пусть, например, замкнуто $\operatorname{Im}(\mathfrak{A}-\lambda I)$. Пусть $g_n\in\operatorname{Im}\mathfrak{B}$, $g_n\to g$. Покажем, что $g\in\operatorname{Im}\mathfrak{B}$. Существуют $\hat{u}_n\in L_2(E_m)$ такие, что $\mathfrak{B}\hat{u}_n=g_n$. Пусть $u_n=R_\Omega\hat{u}_n$. Тогда из $\Pi_{E_m/\Omega}\hat{u}_n+(A-\lambda I)\Pi_\Omega\hat{u}_n=g_n$ следует $R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega u_n=R_\Omega g_n\to R_\Omega g$. Так как $\operatorname{Im}R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega$ замкнуто, то $R_\Omega g\in\operatorname{Im}R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega$, т.е. существует $u\in L_2(\Omega)$ такое, что $R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega u=R_\Omega g$. Пусть

$$\hat{u}=Tu=P_\Omega u-(A-\lambda I)P_\Omega u,$$

тогда

$$\mathfrak{B}\hat{u}=-\Pi_{E_m/\Omega}(A-\lambda I)P_\Omega u+(A-\lambda I)P_\Omega u-(A-\lambda I)P_\Omega R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega u=$$

$$=P_\Omega R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega u-(A-\lambda I)P_\Omega R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega u=P_\Omega R_\Omega g-(A-\lambda I)P_\Omega R_\Omega g=$$

$$=(I-\Pi_{E_m/\Omega})g-(A-\lambda I)T\Pi_\Omega g=g-\mathfrak{B}g.$$

Значит,

$$\mathfrak{B}(\hat{u}+g)=g$$

и, следовательно, $g\in\operatorname{Im}\mathfrak{B}$, что надо было доказать. Лемма доказана.

Мы воспользуемся необходимым и достаточным условием для нетеровости операторов типа оператора $\mathfrak{B}$, содержащимся в /1/.

Пусть $m\geq 2$ и x_0 –точка границы Ω. Проведем в x_0 единичные нормали: внутреннюю $n^i_{x_0}$ и внешнюю $n^e_{x_0}$. Перенесем $n^i_{x_0}$ и $n^e_{x_0}$ в начало координат. Концы их отметят на единичной сфере Σ две точки. Соединим эти точки всевозможными полукругами ℓ_{x_0}. Введем величину

$$d^{\ell_{x_0}}_{x_0}(\lambda)=\{\arg[\tilde{\tilde{A}}(x_0,\xi)-\lambda]\}_{\ell_{x_0}},$$

где в правой части равенства находится изменение величины в фигурных скобках, когда ξ меняется вдоль полукруга ℓ_{x_0}.

В случае $m>2$ все пути ℓ_{x_0} гомотопны, и $d^{\ell_{x_0}}_{x_0}(\lambda)$ не зависит от ℓ_{x_0}. Общее значение $d^{\ell_{x_0}}_{x_0}$ обозначим через $d_{x_0}(\lambda)$.

В случае $m=2$ имеется два класса негомотопных путей, и мы получаем два числа: $d^+_{x_0}(\lambda)$ и $d^-_{x_0}(\lambda)$.

В случае $m=1$ обозначим

$$d_{x_0}(\lambda)=\arg[\tilde{\tilde{A}}(x_0,1)-\lambda]-\arg[\tilde{\tilde{A}}(x_0,-1)-\lambda].$$

В /1/ доказано следующее утверждение.

Для того, чтобы оператор $\mathfrak{B}$ был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Функция $\tilde{\tilde{A}}(x,\xi)-\lambda$ и ее предельные значения на границе области Ω не обращались в нуль ни при каких $x\in\Omega$ и $\xi\in\Sigma$.

2. Для точек x_0, принадлежащих границе $|d_{x_0}|<\pi$ $(|d^\pm_{x_0}|<\pi)$.

Отсюда следует.

<u>Теорема. Существенный спектр оператора $\mathfrak{A}$ состоит из значений функции $\tilde{\tilde{A}}(x,\xi)$ при $x\in\Omega$, $\xi\in\Sigma$ из тех точек λ, для которых $|d_{x_0}(\lambda)|>\pi$ $(|d^\pm_{x_0}(\lambda)|>\pi)$ при некотором x_0 на границе Ω.</u>

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$T:L_2(0,1)\ni u(x)\to m(x)u(x)+\int_0^1\frac{K(x,t)}{x-t}u(t)\,dt,$$

где $m(x)$ и $K(x,t)$ имеют непрерывные первые производные. Этот оператор изучался в /2/. Запишем T в виде

$$T=\mathfrak{A}+C,$$

где

$$\mathfrak{A}:L_2[0,1]\ni u(x)\to m(x)u(x)+K(x)\int_0^1\frac{u(t)}{x-t}\,dt,\quad k(x)=K(x,x)$$

и

$$C:L_2[0,1]\ni u(x)\to\int_0^1\frac{K(x,t)-K(x,x)}{x-t}u(t)\,dt.$$

Легко видеть, что C -вполне непрерывный оператор. Следовательно, операторы T и $\mathfrak{A}$ имеют одинаковый существенный спектр. Пусть

$$A: L_2(-\infty, \infty) \ni u(x) \to m(x)u(x) + K(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{x-t}\, dt.$$

Тогда

$$\mathfrak{A} = R_\Omega A P_\Omega ,$$

где $\Omega = (0,1)$. Для символа оператора A получаем

$$\tilde{A}(x,\xi) = m(x) + i\pi k(x) \operatorname{sgn} \xi .$$

Множество значений $\tilde{A}(x,\xi)$ для $x \in (0,1)$ и $|\xi| = 1$ состоит из двух кривых

$$A_1 B_1 : m(x) + i\pi k(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$A_2 B_2 : m(x) - i\pi k(x) \qquad 0 \le x \le 1 .$$

Граница Ω в этом случае состоит из двух концов интервала $[0,1]$, так что

$$|d_{x_0}(\lambda)| = |\arg[m(0) + i\pi k(0) - \lambda] - \arg[m(0) - i\pi k(0) - \lambda]|,$$

елси $x_0 = 0$ и

$$|d_{x_0}(\lambda)| = |\arg[m(1) + i\pi k(1) - \lambda] - \arg[m(1) - i\pi k(1) - \lambda]|,$$

если $x_0 = 1$.

Точки λ, для которых $|d_{x_0}(\lambda)| \ge \pi$ заполняют два прямолинейных отрезка A_1A_2 и B_1B_2, где $A_1 = m(0)+i\pi k(0)$, $A_2 = m(0)-i\pi k(0)$, $B_1 = m(1)+i\pi k(1)$, $B_2 = m(1)-i\pi k(1)$.

Таким образом, существенный спектр оператора T состоит из точек криволинейного четырехугольника $A_1B_1A_2B_2$. Это совпадает с результатом /2/, полученным при помощи теории нормированных колец.

Пример 2. Пусть $m \ge 2$, Ω -ограниченная область в m -мерном эвклидовом пространстве с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $G(x;y)$, $x = (x_1,\dots,x_m)$, $y = (y_1,\dots,y_m)$ функцию Грина задачи

$$\begin{cases} D\Delta u = f \\ u/\partial\Omega = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} .$$

Рассматриваем оператор

$$T: L_2(\Omega) \ni u(x) \to \int_\Omega \frac{\partial^2 G(x;y)}{\partial y_1^2} u(y)\, dy .$$

Дифференцирование под интегралом производится в пространстве обобщенных функций. Этот оператор изучался в /3-5/.

Как известно,

$$G(x;y) = \mathcal{E}(x;y) + g(x;y),$$

где

$$\mathcal{E}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{r^{m-2}} & m > 2 \\ C_2 \ln r & m = 2 \end{cases} \qquad r = |x-y|,$$

а $g(x;y)$ -решение уравнения

$$\Delta_y g(x;y) = 0$$

при условии на границе

$$g(x;y)/_{y\in\partial\Omega} = -\mathcal{E}(x;y)/_{y\in\partial\Omega}$$

при любом $x \in \bar{\Omega}$.

Таким образом, оператор T представляется в виде

$$T = \mathcal{A} + \mathcal{K} ,$$

где

$$\mathcal{A} = R_\Omega A P_\Omega , \quad \mathcal{K} = R_\Omega K P_\Omega$$

$$A : L_2(E_m) \ni u(x) \to \int_{E_m} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \mathcal{E}(x,y) \tfrac{1}{2} u(y)\, dy$$

$$K : L_2(E_m) \ni u(x) \to \int_{E_m} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} g(x;y) u(y)\, dy .$$

Докажем, что оператор $\mathcal{K}$ вполне непрерывен. Действительно, ядро $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} g(x;y)$ непрерывно везде в $\Omega \times \Omega$, кроме точек $x = y \in \partial\Omega$, в которых имеется особенность типа $\frac{1}{r^m}$. $\mathcal{K}$ отображает $L_2(\Omega)$ в себя, Пусть Ω' -область, содержащаяся в Ω, такая, что расстояние между границами Ω' и Ω не превосходит δ. Тогда оператор

$$\mathcal{K}' = R_{\Omega'} K P_{\Omega'}$$

вполне непрерывен (ввиду непрерывности $\frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2}$ в Ω'). Пусть $\mathfrak{M}$ - ограниченное множество в $L_2(\Omega)$. Покажем, что множество $\mathcal{K}\mathfrak{M}$ компактно в $L_2(\Omega)$. Действительно, множество $\mathcal{K}' R_{\Omega'} \mathfrak{M}$ компактно в $L_2(\Omega')$. Значит, существует некоторая ϵ -сеть Ξ'. Пусть $\Xi = R_\Omega P_{\Omega'} \Xi'$. Покажем, что Ξ ϵ -сеть в $\mathcal{K}\mathfrak{M}$. Пусть $\mathcal{K} u \in \mathcal{K}\mathfrak{M}$. Тогда $\mathcal{K}' R_{\Omega'} u \in \mathcal{K}' R_{\Omega'} \mathfrak{M}$. Существует $v' \in \Xi'$ такое, что $\| \mathcal{K}' R_{\Omega'} u - v' \|_{L_2(\Omega)} < \epsilon$. Пусть $v = R_\Omega P_{\Omega'} v'$. Очевидно, $v \in \Xi$. Имеем

$$\mathcal{K} u - v = \mathcal{K} u - R_\Omega P_{\Omega'} \mathcal{K}' R_{\Omega'} u + R_\Omega P_{\Omega'} \mathcal{K}' R_{\Omega'} u - R_\Omega P_{\Omega'} v'$$

$$\mathcal{K} u - R_\Omega P_{\Omega'} \mathcal{K}' R_{\Omega'} u = R_\Omega K P_\Omega u - R_\Omega P_{\Omega'} R_{\Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u =$$

$$= R_\Omega K (P_{\Omega'} R_{\Omega'} + P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'}) u - R_\Omega P_{\Omega'} R_{\Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u =$$

$$= R_\Omega (I - P_{\Omega'} R_{\Omega'}) K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u + R_\Omega K P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'} u =$$

$$= P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u + R_\Omega K P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'} u$$

$$\| \mathcal{K} u - R_\Omega P_{\Omega'} \mathcal{K}' R_{\Omega'} u \|_\Omega^2 < \| P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'} K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u \|_\Omega^2 +$$

$$+ \| R_\Omega K P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'} u \|_\Omega^2 < \int_{\Omega\ \Omega'} | K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u |_\Omega^2\, dx + \| \mathcal{K} \|^2 \| P_{\Omega\ \Omega'} R_{\Omega\ \Omega'} u \|^2$$

$$\le \operatorname{mes}^2 (\Omega / \Omega') \int_\Omega | K P_{\Omega'} R_{\Omega'} u |^2\, dx + \| \mathcal{K} \|^2 \int_{\Omega\ \Omega'} | u |^2\, dx \le$$

$$\le \operatorname{mes}^2 (\Omega\ \ \Omega', \| \mathcal{K} P_{\Omega'} R_{\Omega'} u \|_\Omega^2 + \| \mathcal{K} \|^2 \operatorname{mes} (\Omega\ \ \Omega') \| u \|_\Omega^2 \le$$

$$\le 2 \operatorname{mes}^2 (\Omega\ \ \Omega') \| \mathcal{K} \|^2 \| u \|_\Omega^2 < \epsilon ,$$

при достаточно малом δ мы использовали ограниченность оператора $\mathcal{K}$. Имеем также

$$\| R_\Omega P_{\Omega'} \mathcal{K}' R_{\Omega'} u - R_\Omega P_{\Omega'} v' \|_\Omega = \| \mathcal{K}' R_{\Omega'} u - v' \|_{\Omega'} < \epsilon .$$

Таким образом, получаем, что если δ достаточно мало, то

$$\| \mathcal{K} u - v \|_\Omega < 2\epsilon .$$

Это показывает, что Ξ - 2ϵ -сеть для $\mathcal{K}\mathfrak{M}$ и, значит, $\mathcal{K}\mathfrak{M}$ компактно, т.е. оператор $\mathcal{K}$ вполне непрерывен.

Из этого следует, что операторы T и $\mathcal{A}$ имеют одинаковый существенный спектр. Нетрудно подсчитать, что оператор A имеет символ $| \tilde{A}(x, \xi) = \xi_1^2 | \xi |^{-2}$.

Применяя теорему, получаем, что существенный спектр оператора **T** заполняет интервал $[0,1]$.

Литература

1. И.Б.Симоненко. Известия Академии Наук СССР. Серия математическая, т.29, №№3 и 4 (1965).
2. J.Schwartz. Communications on pure and applied mathematics, vol. XV, 75-90 (1962).
3. С.Л.Соболев. Изв. АН СССР, сер. матем., 18, №1 (1954).
4. Р.А.Александрян. Труды московского математического общества, т.9 (1960).
5. Р.Денчев, ДАН СССР, 126. №2 (1959).
6. Р.Денчев. Известия на Математическия институт на БАН, 1968. (в печати).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 июня 1968 года.