ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3781

В.К.Мельников

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

Р5 - 3781

В.К.Мельников

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

Направлено в ДАН СССР

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m)),$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)) \tag{1}$$

с 2π-периодической по q функцией Гамильтона и предположим, что система (1) обладает условно-периодическим решением

$$x = f(\phi), y = g(\phi), p = r(\phi), q = \phi + s(\phi), \dot{\phi} = \omega, \tag{2}$$

где f, g, r, s – 2π-периодические функции ϕ, а $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_n)$ – константы. Предположим далее, что f, g, r, s – аналитические функции ϕ в полосе $|\mathrm{Im}\,\phi| < \rho$ $(\rho > 0)$, определитель

$$\det \left| E_n + \frac{\partial s}{\partial \phi} \right|$$

отличен от нуля в этой полосе, а функция H – аналитическая по x, y, p, q в некоторой окрестности решения (2). В этих условиях замена переменных

$$x = f(\phi) + \xi, \quad y = g(\phi) + \eta$$

$$p = r(\phi) + \left(E_n + \frac{\partial s}{\partial \phi}\right)^{-1}\left(I - \frac{\partial g}{\partial \phi}\xi + \frac{\partial f}{\partial \phi}\eta\right), \quad q = \phi + s(\phi)$$

приводит систему (1) к виду

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I},$$

где

$$\mathcal{H} = H\left(f(\phi) + \xi, q(\phi) + \eta; r(\phi) + \left(E_n + \frac{\partial s}{\partial \phi}\right)^{-1}\left(I - \frac{\partial g}{\partial \phi}\xi + \frac{\partial f}{\partial \phi}\eta\right), \phi + s(\phi)\right),$$

и, согласно равенствам (1), (2), при $\xi = \eta = I = 0$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega .$$

Возьмем теперь в качестве исходного пункта приведенных выше рассуждений какое-либо из полученных в работе /1/ условно-периодических решений. В этом случае, как следует из результатов работы /1/, существует каноническая замена переменных

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad v = \frac{\partial V}{\partial u}, \quad I = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad \psi = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{3}$$

с производящей функцией V вида

$$V = u\eta + z\phi + \tfrac{1}{2}\alpha(\phi)u^2 + \beta(\phi)u\eta + \tfrac{1}{2}\gamma(\phi)\eta^2 + \kappa(\phi)uz + r(\phi)\eta z + \tfrac{1}{2}\chi(\phi)z^2, \tag{4}$$

такая, что матрицы $\alpha, \beta, \nu, \kappa, r, \chi$ – 2π – периодические функции, аналитические по ϕ в полосе $|\mathrm{Im}\,\phi| < \rho'$ $(\rho' > 0)$, определитель $\det|E_m + \beta|$ отличен от нуля в этой полосе и разложение $\mathcal{H}$ в ряд по степеням u, v, z имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \omega z + \tfrac{1}{2} a u^2 + b u v + \tfrac{1}{2} c v^2 + \tfrac{1}{2} d z^2 + \ldots, \tag{5}$$

где точками обозначены члены более высокого порядка, а $\mathcal{H}_0$ и матрицы a, b, c, d не зависят от ψ.

Предположим теперь, что все собственные значения матрицы

$$\begin{vmatrix} -b' & -c \\ a & b \end{vmatrix} \tag{6}$$

– простые, причем среди них имеется 2ℓ $(1 \le \ell \le m)$ число мнимых собственных значений $\lambda_1 = i\nu_1, \ldots, \lambda_\ell = i\nu_\ell, \lambda_{m+1} = -i\nu_1, \ldots, \lambda_{m+\ell} = -i\nu_\ell$. В этом случае каноническую замену переменных (3) с производящей функцией вида (4) можно выбрать так, что разложение (5) примет вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \omega z + \tfrac{1}{2}\nu\hat{u}^2 + \tfrac{1}{2}A_0\check{u}^2 + B_0\check{u}\check{v} + \tfrac{1}{2}C_0\check{v}^2 + \tfrac{1}{2}\nu\hat{v}^2 + \tfrac{1}{2}dz^2 + \ldots, \tag{7}$$

где

$\hat{u} = (u_1, \ldots, u_\ell)$, $\hat{v} = (v_1, \ldots, v_\ell)$, $\check{u} = (u_{\ell+1}, \ldots, u_m)$, $\check{v} = (v_{\ell+1}, \ldots, v_m)$,
$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_\ell)$,
а матрицы A_0, B_0, C_0 не зависят от ψ.

Для большинства полученных в работе /1/ условно-периодических решений существует константа $K > 0$ такая, что при любом целочисленном $k = (k_1, \ldots, k_n) \neq 0$ справедливы неравенства

$$\left|\sum_{j=1}^{5} \lambda_{\alpha_j} + i(\omega, k)\right| \ge \frac{K}{|k|^{n+1}}, \quad \left|\sum_{j=1}^{6} \lambda_{\alpha_j} + i(\omega, k)\right| \ge \frac{K}{|k|^{n+1}}, \tag{8}$$

где

$$|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|, \quad (\omega, k) = \omega_1 k_1 + \ldots + \omega_n k_n,$$

а λ_{α_i} – произвольные собственные значения матрицы (6). Исходя из этого, предположим, что для решения (2) выполнены неравенства (8). Предположим, далее, что сумма $\sum_{j=1}^{5} \lambda_{\alpha_j}$ отлична от нуля при любых $\alpha = 1, \ldots, 2m$, и сумма $\sum_{j=1}^{6} \lambda_{\alpha_j}$ обращается в нуль только в том случае, когда собственные значения λ_{α_j} комбинируются попарно так, что сумма каждой пары равна нулю. Отсюда следует существование канонической замены переменных (см. равенство (7)):

$$u = \frac{\partial V}{\partial v}, \quad y = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad z = \frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial p}$$

с производящей функцией V вида

$$V = xv + p\psi + \sum_{s=3}^{6} V_s(x, v, p, \psi),$$

где V_s – однородный по переменным x, v, p полином s – той степени, коэффициенты которого 2π –периодические функции ψ, аналитические по ψ в полосе $|\operatorname{Im} \psi| < \rho'$ такие, что в новых переменных справедливо равенство

$$\mathcal{H} = \sum_{s=0}^{6} \mathcal{H}_s(p, r) + \tfrac{1}{2} \sum_{s=0}^{4} \{ A_s(p, r)\check{x}^2 + 2B_s(p, r)\check{x}\check{y} + C_s(p, r)\check{y}^2 \} + P_4(\check{x}, \check{y}, p, r) + \mathcal{H}^*(x, y, p, q), \tag{9}$$

где

$$2r = (x_1^2 + y_1^2, \ldots, x_\rho^2 + y_\rho^2), \quad \check{x} = (x_{\rho+1}, \ldots, x_m), \quad \check{y} = (y_{\rho+1}, \ldots, y_m),$$

$\mathcal{H}_s$, A_s, B_s, C_s – однородные полиномы s –той степени от переменных p, r полином P_4 не содержит степеней $\check{x}$, $\check{y}$ ниже четвертой и разложение $\mathcal{H}^*$ в ряд по степеням x, y ; p не содержит членов ниже седьмой степени. Исходя из равенства (9), положим

$$\mathcal{H} = H(J) + \tfrac{1}{2} A(J) z^2 + B(J) + \tfrac{1}{2} C(J) w^2 + H^*(z, w, J, \theta), \qquad (10)$$

где

$$z = \check{x}, \quad w = \check{y}, \quad J = (p, r), \ \theta = (q, \sigma), \ \sigma = \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y_1}{x_1}, \dots, \operatorname{arc\,tg} \frac{y_\ell}{x_\ell} \right),$$

$$H = \sum_{s=0}^{6} \mathcal{H}_s, \quad A = \sum_{s=0}^{4} A_s, \quad B = \sum_{s=0}^{4} B_s, \quad C = \sum_{s=0}^{4} C_s.$$

В этой ситуации имеет место следующая

Теорема. Пусть дана система Гамильтона

$$\dot{z} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w}, \quad \dot{w} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \quad (z = (z_1, \dots, z_m), \ w = (w_1, \dots, w_m)),$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} \quad (J = (J_1, \dots, J_{n'}), \ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n'})) \qquad (11)$$

с функцией Гамильтона (10), удовлетворяющей следующим условиям:

1. $\mathcal{H}$ – 2π – периодическая функция θ, аналитическая по z, w J, θ в области вида $|z, w| \le R_0$, $|J_1| \le \epsilon, \dots, |J_n| \le \epsilon$, $|J_{n+1} - 2\epsilon| < \epsilon, \dots, |J_{n'} - 2\epsilon| < \epsilon$, $|\operatorname{Im} \theta| < \rho_0$ ($R_0 > 0$, $\rho_0 > 0, 0 < \epsilon < \epsilon_0, 0 \le n \le n'$).

2. При $0 < \epsilon < \epsilon_0$ и $z = w = 0$ в области $|J_1| < \epsilon, \dots, |J_n| < \epsilon$,

$$|J_{n+1} - 2\epsilon| \le \epsilon, \dots, |J_{n'} - 2\epsilon| \le \epsilon, \quad |\operatorname{Im} \theta| \le \rho_0$$

справедливы неравенства

$$|H^*| \le \epsilon^3 \mu , \quad \left|\frac{\partial H^*}{\partial \chi}\right| \le \epsilon^{3/2}\mu , \quad \left|\frac{\partial^2 H^*}{\partial \chi^2}\right| \le \epsilon^2 \mu , \quad \left|\frac{\partial^3 H^*}{\partial \chi^3}\right| \le \epsilon^{3/2},$$

где $\chi = (z, w)$ $\mu = 0(\sqrt{\epsilon})$.

3. H, A, B, C – аналитические функции J в некоторой окрестности $J = 0$, причём при $J = 0$

$$\det \left| \frac{\partial^2 H}{\partial J^2} \right| \ne 0 , \tag{13}$$

а все собственные значения $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(J)$ матрицы

$$\Gamma = \begin{vmatrix} -B' & -C \\ A & B \end{vmatrix}$$

при $J = 0$ – простые и удовлетворяют неравенству вида

$$\sum_{s=1}^{n'} \left(\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial J_s} + \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial J_s} + i \sum_{r=1}^{n'} k_r \frac{\partial^2 H}{\partial J_r \, \partial J_s} \right)^2 \ne 0 , \tag{13'}$$

где k_r – произвольные целые числа.

Тогда существует разложение $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ области

$$\epsilon = \{ -\epsilon \le J_1 \le \epsilon , \dots , -\epsilon \le J_n \le \epsilon , \ \epsilon \le J_{n+1} \le 3\epsilon , \dots , \epsilon \le J_{n'} \le 3\epsilon \}$$

такое, что $\dfrac{\mathrm{mes}\, \mathcal{E}_2}{\mathrm{mes}\, \mathcal{E}} \to 0$ при $\epsilon \to 0$, а для любого $J^* \in \mathcal{E}_1$ существует инвариантный относительно движений системы (11) тор T_{J^*} , обладающий следующими свойствами:

1. Инвариантные торы T_{J^*} задаются параметрическими уравнениями

$$z = Z_{J^*}(Q),\ w = W_{J^*}(Q),\ J = F_{J^*}(Q),\ \theta = Q + G_{J^*}(Q),$$

где Z_{J^*}, W_{J^*}, F_{J^*}, G_{J^*} – 2π – периодические функции Q, аналитические по Q в полосе $|\mathrm{Im}\, Q| < \frac{1}{2}\rho_0$.

2. Движение на торе T_{J^*} условно-периодическое с n частотами $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n'})$, т.е. $\dot{Q} = \omega$, где $\omega = \dfrac{\partial H}{\partial J}$ при $J = J^*$.

Доказательство этой теоремы основано на следующем.

Пусть H_0, H_χ, $H_{\chi\chi}$ означают соответственно значение функции H^* и ее частных производных по $\chi = (z, w)$ при $z = w = 0$. Положим

$$\bar{H} = H + \bar{H}_0,\ \tilde{H}_0 = H_0 - \bar{H}_0,\ \tilde{H}_{\chi\chi} = H_{\chi\chi} - \bar{H}_{\chi\chi},$$

где

$$\bar{H}_0 = (2\pi)^{-n'} \oint H_0(J, \theta)\, d\theta,\quad \bar{H}_{\chi\chi} = (2\pi)^{-n'} \oint H_{\chi\chi}(J, \theta)\, d\theta$$

и интеграл взят по поверхности n'-мерного тора.

Совершим теперь каноническую замену переменных

$$z = \frac{\partial V}{\partial w},\quad w' = \frac{\partial V}{\partial z'},\quad J = \frac{\partial V}{\partial \theta},\quad \theta' = \frac{\partial V}{\partial J'} \tag{14}$$

с производящей функцией V вида

$$V = z'w + J'\theta + S_0(J', \theta) + S_{z'}(J', \theta) z' + S_w(J', \theta) w +$$

$$+ \tfrac{1}{2} S_{z'z'}(J', \theta) z'^2 + S_{z'w}(J', \theta) z' w + \tfrac{1}{2} S_{ww}(J', \theta) w^2,$$

удовлетворяющей следующей системе уравнений:

$$\left(\omega, \frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right) + [\tilde{H}_0(J', \theta)]_N = 0,$$

$$\left(\omega, \frac{\partial S_{\chi}}{\partial \theta}\right) + \bar{\Gamma}' S_{\chi} + [\, H_{\chi}(J', \theta)\,]_N = 0,$$

$$\left(\omega, \frac{\partial S_{\chi\chi}}{\partial \theta}\right) + \bar{\Gamma}' S_{\chi\chi} + S_{\chi\chi}\bar{\Gamma} + [\, \tilde{H}_{\chi\chi}(J', \theta)\,]_N + \Delta(J') - \tag{15}$$

$$-\left[\sum_{\alpha=1}^{m'} \left(S_{z_\alpha} \frac{\partial H_{\chi\chi}}{\partial w_\alpha} - S_{w_\alpha} \frac{\partial H_{\chi\chi}}{\partial z_\alpha} \right)\right]_N + \sum_{\alpha=1}^{n'} L \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial J'_\alpha} \frac{\partial S_0}{\partial \theta_\alpha} = 0,$$

где

$$\omega = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J'}, \quad \bar{\Gamma} = \Gamma - L\, \bar{H}_{\chi\chi}, \quad S_{\chi} = (S_{z'}, S_w),$$

$\dfrac{\partial H_{\chi\chi}}{\partial z_\alpha}$ и $\dfrac{\partial H_{\chi\chi}}{\partial w_\alpha}$ – производные третьего порядка от H^*

при $z = w = 0$,

$$\Delta = (2\pi)^{-n'} \sum_{\alpha=1}^{m'} \oint \left(S_{z_\alpha} \frac{\partial H_{\chi\chi}}{\partial w_\alpha} - S_{w_\alpha} \frac{\partial H_{\chi\chi}}{\partial z_\alpha} \right) d\theta,$$

$$L = \begin{vmatrix} 0 & E_{m'} \\ -E_{m'} & 0 \end{vmatrix}, \quad S_{\chi\chi} = \begin{vmatrix} S_{z'z'} & S_{z'w} \\ S'_{z'w} & S_{ww} \end{vmatrix}$$

и для функции f вида $f = \sum_{|k|=0}^{\infty} f_k e^{i(k,\theta)}$ символ $[\, f\,]_N$

означает сумму $\sum_{|k|<N} f_k e^{i(k,\theta)}$.

Возьмем область $\mathcal{E}^* = \{\, |J_1| \le \epsilon, \dots, |J_n| \le \epsilon,$

$$|J_{n+1} - 2\epsilon| \le \epsilon, \dots, |J_{n'} - 2\epsilon| \le \epsilon \,\}$$

и пусть в области $\mathcal{E}_N^\delta \subset \mathcal{E}^* - \epsilon\beta$ x/ выполнены неравенства

$$|(\omega, k)| > \epsilon\delta |k|^{-(n'+1)}, \quad |\lambda_\alpha + i(\omega, k)| > \epsilon\delta |k|^{-(n'+1)},$$

$$|\lambda_\alpha + \lambda_\beta + i(\omega, k)| > \epsilon\delta |k|^{-(n'+1)}$$

для всех целочисленных $k = (k_1, \dots, k_{n'})$ таких, что $0 < |k| < N$, и произвольных собственных значений матрицы $\bar{\Gamma}$. Тогда, согласно неравенствам (12), при достаточно малых $\beta > 0, \delta > 0$ система уравнений (15) имеет аналитическое в области $J' \in \mathcal{E}_N^\delta$, $|\mathrm{Im}\,\theta| \leq \rho_0 - 2\delta$ решение, удовлетворяющее в этой области неравенствам

$$|S_0| < \epsilon^2 \mu \delta^{-\kappa}, \quad |S_{z'}, S_w| < \epsilon^{3/2} \mu \delta^{-\kappa},$$

$$|S_{z'z'}, S_{z'w}, S_{ww}| < \epsilon \mu \delta^{-2\kappa},$$

где $\kappa = 2n' + 5$. Отсюда следует, что при достаточно малых

$\epsilon > 0$ и $\mu \beta^{-1} \delta^{-2(\kappa+1)}$ равенства (14) определяют взаимно-однозначную в области $|z', w'| < R_0 - \delta$, $J' \in \mathcal{E}_N^\delta - 2\epsilon\beta$, $|\mathrm{Im}\,\theta'| < \rho_0 - 4\delta$ замену переменных.

Положим теперь $N = -\frac{1}{\gamma} \ln \mu$, $\mu = \delta^{8\kappa+2}$.

Тогда в новых переменных функция $\mathcal{H}$ будет иметь вид

$$\mathcal{H} = H(J') + \tfrac{1}{2}(A(J') + a(J'))z'^2 + (B(J') + b(J'))z'w' +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(C(J') + c(J'))w'^2 + H'(z', w', J', \theta),$$

---

x/ *Область $\mathcal{E}^* - \epsilon\beta$ содержит те точки области $\mathcal{E}^*$, расстояние от которых до границы области $\mathcal{E}^*$ больше $\epsilon\beta$ $(\epsilon\beta > 0)$.*

где матрицы a, b, c связаны с матицей Δ равенством

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a & b \\ b' & c \end{vmatrix}, \quad \bar{\Gamma} = \begin{vmatrix} -\bar{B} & -\bar{C} \\ \bar{A} & B \end{vmatrix},$$

а функция H' и ее производные по $\chi' = (z', w')$ при $z' = w' = 0$ в области

$$J' \in \mathcal{E}_N^{\delta} - 3\epsilon\beta, \quad |\operatorname{Im} \theta'| < \rho_0 - 3\gamma \quad (\gamma > 2\delta > 0)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|H'| \leq \epsilon^3 \mu', \quad \left| \frac{\partial H'}{\partial \chi'} \right| \leq \epsilon^{5/2} \mu',$$

$$\left| \frac{\partial^2 H'}{\partial \chi'^2} \right| \leq \epsilon^2 \mu', \quad \left| \frac{\partial^3 H'}{\partial \chi'^3} \right| \leq (1+\delta)\epsilon^{3/2}$$

с $\mu' = \mu^{3/2}$. С другой стороны, из неравенств (13) и (13') следует, что при $\beta = \delta^8$, $\gamma = \delta^{\frac{1}{4n}}$, и любом фиксированном $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ имеем

$$\operatorname{mes} (\mathcal{E} \setminus (\mathcal{E}_N^{\delta} - 3\epsilon\beta)) \to 0$$

при $\delta \to 0$. Отсюда следует, что описанная выше конструкция может применяться неограниченное число раз. Сходимость этого процесса доказывается аналогично тому, как это сделано в работе[2].

Неравенство (13') в настоящей работе заменяет использованное в работе[1] требование отсутствия тождественных соотношений вида

$$\lambda_a + \lambda_\beta + i(\omega, k) \equiv 0$$

с целочисленными $k = (k_1, \dots, k_n)$. В связи с этим замечу, что содержащиеся в работе[3] возражения против этого требования основаны, видимо, на недоразумении. Существенно заметить, что при фиксированных H и Γ неравенство (13') нетривиально только для конечного числа значений k, так как при $|k|$, достаточно больших, справедливость неравенства (13') следует из неравенства (13).

Рассмотренная в настоящей работе ситуация является довольно общей. Она включает в себя многие из рассмотренных ранее случаев[1-6].

Л и т е р а т у р а

1. В.К.Мельников. ДАН СССР, 165, №6, 1245-1248.
2. В.И.Арнольд. Успехи матем. наук., XVIII 5: (113), 13-40, 1963.
3. I.Moser. Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions, Mathem.Annalen, 169, 1, 1967, 136-176.
4. А.Н.Колмогоров. ДАН СССР, 98, №4, 1954, 527-530.
5. В.И.Арнольд. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, Успехи матем. наук, **XVIII**, 6 (114), 91-192 (1963).
6. Ю.Мозер. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь, Сб. перев. "Математика", 6, вып. 5, 1962, 51-67.

Рукопись поступила в издательский отдел

28 марта 1968 года.