ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5 - 3711

М.Л.Краснов , Г.И.Макаренко, А.И.Киселев

СИСТЕМЫ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛВТА

Р5 - 3711

М.Л.Краснов*), Г.И.Макаренко, А.И.Киселев*)

СИСТЕМЫ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

х) Московский энергетический институт

1. В прямоугольнике $D\{0<x\le 1, 0\le t\le T\}$ рассматривается смешанная краевая задача для системы квазилинейных параболических уравнений 2-го порядка, матричная запись которой имеет вид (модельное уравнение):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[A\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u = h(x,t), \quad (1)$$

где для простоты будем считать, что u и h – двухкомпонентные вектор-функции:

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}; \qquad h(x,t) = \begin{pmatrix} h_1(x,t) \\ h_2(x,t) \end{pmatrix};$$

A – диагональная матрица вида

$$A\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} x^{\alpha}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 & 0 \\ 0 & 1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0;$$

$B(x,t)$, $C(x,t)$ – симметрические матрицы, удовлетворяющие условиям:

1) $C(x,t)$ – положительно-определенная матрица,

2) $\frac{\partial C(x,t)}{\partial t}$ – ограниченная матрица.

II . Решение ищем в классе $H_\alpha(D)$ – функций, имеющих конечный интеграл

$$J_\alpha = \iint_D \left[x^\alpha \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right] dx\, dt < +\infty , \qquad (2)$$

где

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 .$$

III . Теорема вложения

1) Если $0 < \alpha < 3$, то компонента $u_1(x,t)$ вектор-функции $u(x,t) \in H_\alpha(D)$ при $x = 0$ принимает в среднем нулевое значение в смысле $L_4(0,T)$, т.е.

$$\lim_{x \to 0} \int_0^T u_1^4(x,t)\, dt = 0 .$$

2) Для компоненты $u_1(x,t)$ имеет место оценка

$$\iint_D \sigma_1(x)\, u_1^4(x,t)\, dx\, dt < C_1^2 J_\alpha ,$$

где $\sigma_1(x) > 0$ определяется так:

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 0\left(x^{\alpha-4}\, |\ln x|^{-1-\epsilon_0}\right) & \text{при } \alpha \neq 3, \\ 0\left(x^{-1} |\ln x|^{-4} (\ln|\ln x|)^{-1-\epsilon_0}\right) & \text{при } \alpha = 3, \ \epsilon_0 > 0 \end{cases}$$

вблизи $x = 0$.

3) Для компоненты $u_2(x,t)$ справедлива оценка

$$\iint_D \sigma_2(x)\, u_2^4(x,t)\, dx\, dt \le C_2^2 J_\alpha ,$$

где

$$\sigma_2(x) = 0\left(x^{-4}\, |\ln x|^{-1-\epsilon_0}\right), \quad \epsilon_0 > 0 ,$$

вблизи $x = 0$.

IV . Постановка задачи

Найти решение системы (1) в классе $H_\alpha(D)$, удовлетворяющее условиям:

1) при $t = 0$ $u_1(x,t) = u_2(x,t) = 0$ в смысле $L_2(0,1)$,

2) при $x = 1$ $u_1(x,t) = u_2(x,t) = 0$ в смысле $L_4(0,T)$, (3)

3) при $x = 0$ в случае $0 < \alpha < 3$

$u_1(x,t) = u_2(x,t) = 0$ смысле $L_4(0,T)$;

в случае $\alpha \geq 3$ при $x = 0$ $u_1(x,t)$ не задается.

V. Ищем обобщенное решение задачи (1) - (3), т.е. функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(A\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(B \frac{\partial u}{\partial x}, v\right) + \right. \qquad (4)$$

$$\left. + (Cu, v) \right] dx\, dt = \iint_D (h, v)\, dx\, dt$$

для любой функции $v(x,t) \in C^{(1,0)}(D)$ и удовлетворяющей условиям $v|_{x=0} = 0$ и $v = 0$ вблизи $x = 0$.

VI . Теорема существования обобщенного решения.

Пусть выполняются условия:

а) $\int_0^1 \left(A\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \geq C_3^2 \int_0^1 \left[x^\alpha \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^4 \right] dx;$

б) $\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, A\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx\, dt \geq C_4^2 \iint_D \left[x^\alpha \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^4 \right] dx\, dt ;$

в) Матрица $B(x,t)=\begin{pmatrix} b_{11}(x,t) & b_{12}(x,t) \\ b_{21}(x,t) & b_{22}(x,t) \end{pmatrix}$ такова, что $b_{11}(x,t)=O(x^{\frac{\alpha-1}{4}}|\ln x|^{-\frac{1+\varepsilon_0}{4}})$ (аналогичное условие накладывается и на $b_{12}(x,t)=b_{21}(x,t)$; на $b_{22}(x,t)$ никакого условия при $x=0$ не накладывается;

г) оператор $A(x,\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x}$ является монотонным в том смысле, что

$$\iint\limits_D \Big[A(x,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial x} - A(x,\frac{\partial v}{\partial x})\frac{\partial v}{\partial x}\Big]\frac{\partial (u-v)}{\partial x}\,dx\,dt \geq 0 \tag{5}$$

для любых вектор - функций $v(x,t)\in W^{(1,1)}_{4,2}(D)$,

$$u(x,t)\in H_\alpha(D).$$

Тогда поставленная краевая задача имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Доказательство существования обобщенного решения ведется с помощью аналога метода Галеркина. Приближенное решение $\tilde{u}_n(x,t)$ задачи ищем в виде $\tilde{u}_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, Z_k(x)$, где $C_k(t)=\begin{pmatrix} C_k^{(1)}(t) \\ C_k^{(2)}(t)\end{pmatrix}$ – неизвестные вектор-функции; $\{ Z_k(x)\}$ – полная ортонормированная система функций в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}(0,1)$.

Вектор-функции $C_k(t)$ определяются из системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}_n(x,t)}{\partial t} z_k(x)\,dx + \int_0^1 A(x,\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x})\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\frac{dz_k}{\partial x}dx + \int_0^1 B\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} z_k(x)\,dx +$$
$$+\int_0^1 C\,\tilde{u}_n\, z_k(x)\,dx = \int_0^1 h(x,t)\, z_k(x)\,dx \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

или

$$\frac{dC_k^{(1)}(t)}{dt} + F_k^{(1)}(C_1^{(1)}(t),\dots,C_n^{(1)}(t),C_1^{(2)}(t),\dots,C_n^{(2)}(t)) = h_k^{(1)}(t),$$

$$\frac{dC_k^{(2)}(t)}{dt} + F_k^{(2)}(C_1^{(1)}(t),\dots,C_n^{(1)}(t),C_1^{(2)}(t),\dots,C_n^{(2)}(t)) = h_k^{(2)}(t)$$

причем в силу условий (3) полагаем

$$C_k^{(1)}(0) = C_k^{(2)}(0) = 0 \qquad (k=1,2,\dots,n).$$

Доказывается, что эта система разрешима на любом конечном интер ле $[0,T]$.

VII. Единственность обобщенного решения

Если оператор $A(x,\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x}$ является монотонным в указа ном выше смысле (5) и матрицы B и C таковы, что

$$(B\zeta,\zeta) \leq 0,$$

$$((C-\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x})\zeta,\zeta) > c_s^2(\zeta,\zeta),$$

$$\zeta=\{\zeta_1,\zeta_2\},$$

то поставленная задача имеет единственное решение. При доказатель ве единственности решения используется методика, примененная М.И. шиком для случая линейных вырождающихся эллиптических уравнен

Полученные результаты непосредственно переносятся на более щие системы квазилинейных параболических уравнений с любым чис пространственных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Литература

1. *М.И.Вишик. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Мат.Сб., т.35(77);3 (1954), 513–568.*
2. *Ю.А.Дубинский. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Мат.сб., т.67 (109);4(1965), 609–642.*

3. *М.Л.Краснов. Квазилинейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области. Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964–1965 гг., серия математическая. МЭИ, 1965 г., 120–128.*

4. *Г.И.Макаренко. Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений. Труды МЭИ, вып.* **XXVIII** *(1956), 5–24.*

5. *С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, Ленинград, 1950 г.*

Рукопись поступила в издательский отдел
15 февраля 1968 года.