ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3643

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Фан Ван Хап

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЗАМЕНЫ ИНТЕГРАЛА КОНЕЧНОЙ СУММОЙ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1967.

P5 - 3643

Фан Ван Хап

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЗАМЕНЫ ИНТЕГРАЛА КОНЕЧНОЙ СУММОЙ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопрос о приближенном решении с.и.у. был рассмотрен в работах [1,2]. Однако, возможность применения метода замены интеграла конечной суммой к приближенному решению таких уравнений пока еще не доказана. В настоящей статье рассматривается этот вопрос.

Пусть дано с.и.у.

$$K\phi \equiv a(t)\phi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_\gamma k(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{1}$$

в котором $a(t), b(t), f(t)$ – заданные непрерывные на γ функции по Гельдеру, а γ –окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Ядро $k(t,\tau)$ также удовлетворяет условию Гельдера всюду на γ, кроме, может быть, точек $\tau = t$, где справедлива оценка $|k(t,\tau)| < \frac{C}{|t-\tau|^{1-\mu}}$.

Пусть уравнение (1) имеет единственное решение. Замечая, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = 1,$$

можем переписать (1) в виде

$$[a(t)+b(t)]\phi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{[\phi(\tau)-\phi(t)]}{\tau - t}d\tau + \int_\gamma k(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{1'}$$

В случае нормального разрешимого уравнения (1) мы всегда можем предполагать, что выполняется следующее условие

$$a(t) + b(t) \equiv 1. \tag{2}$$

Итак, пусть (2) выполнено, уравнение (1') имеет вид:

$$\phi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau-t}d\tau+\int_{\gamma}k(t,\tau)\phi(\tau)d\tau=f(t). \tag{3}$$

Наряду с (3) рассмотрим уравнение

$$\phi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\sum_{\substack{k=1\\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n}\frac{\phi(t_k)-\phi(t)}{t_k-t}\Delta t_k+\sum_{\substack{k=1\\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n}k(t,t_k)\phi(t_k)\Delta t_k=f(t), \tag{4}$$

где $t_k(k=1,2,\dots,n)$ делят окружность γ на n равных частей, а $t\in t_j t_{j+1}$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$.

При таких предположениях, если уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение, справедлива следующая теорема.

Теорема. При достаточно большом n уравнение (4) имеет единственное ограниченное решение, и при стремлении n к бесконечности это решение стремится равномерно к решению уравнения (3) или, все равно, уравнения (1).

Для доказательства этой теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть Y –банахово пространство, X – подпространство (банахово) пространства Y, A – ограниченный линейный оператор в X, и $A_n(n=1,2,\dots)$ линейные операторы в Y, удовлетворяющие следующим условиям:

1). A_n компактны

2). $\|A_n\|\le M<\infty$ $(n=1,2,\dots)$

3). $\|A_n\phi-A\phi\|\to 0$ при $n\to\infty$ каково бы ни было $\phi\in X$.

4). Если $\|\phi_n\|\le m<\infty$, $\phi_n\in Y\,(n=1,2,\dots)$, то из последовательности $\{A_n\phi_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{A_{n_p}\phi_{n_p}\}$, что

$$\lim_{p\to\infty}A_{n_p}\phi_{n_p}=\phi\in X.$$

При этих условиях, если существует $(E-A)^{-1}=E+B$, то при достаточно большом n существует и $(E-A_n)^{-1}=E+B_n$, и $B_n\phi$ равномерно стремится к $B\phi$ при $n\to\infty$ для любого $\phi\in X$.

Доказательство этой леммы имеется в [3].

Теперь возвращаемся к доказательству нашей теоремы.

Обозначим через

$$A_{\phi} = \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(r) - \phi(t)}{r - t} d r + \int_{\gamma} k(t, r)\phi(r)\, dr ,$$

$$A_n \phi = \frac{b(t)}{\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \frac{\phi(t_k) - \phi(t)}{t_k - t} \Delta t_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} k(t, t_k)\phi(t_k)\, \Delta t_k ,$$

где $\phi \in H_\mu$ - пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $0 < \mu \leq 1$. Норма в H_μ определяется следующим образом

$$\|\phi\| = M + M_0 ,$$

где

$$M = \max_{t \in \gamma} |\phi(t)| , \quad M_0 = \sup \frac{|\phi(t_2) - \phi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}} , \quad t_2, t_1 \in \gamma .$$

С такой нормой H_μ становится B - пространством. Нетрудно видеть, что A - ограниченный линейный оператор в H_μ, и условие 1) леммы выполнено. Что касается условия (2)., то имеем

$$\left\| \frac{b(t)}{\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \frac{\phi(t_k) - \phi(t)}{t_k - t} \Delta t_k \right\| \leq \frac{\|b\| M_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu}} \leq \frac{2^{\mu} \|b\| \|\phi\|}{\mu \pi^{1-\mu}} ,$$

$$\left\| \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} k(t, t_k)\phi(t_k)\, \Delta t_k \right\| \leq C \|\phi\| \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu}} = \frac{(2\pi)^{\mu}}{\mu} C \|\phi\| ,$$

где C - постоянная величина, определяемая следующим соотношением

$$k(t, r) = \frac{k^*(t, r)}{|t - r|^{1-\mu}} , \quad |k^*(t, r)| \leq C .$$

Итак, имеем

$$\|A_n \phi\| < \frac{2^{\mu}}{\mu} \|\phi\| \left(\pi^{\mu} C + \frac{\|b\|}{\pi^{1-\mu}} \right) ,$$

т.е. условие 2) удовлетворяется.

Теперь проверим условие 3) леммы.

Пусть $t \in \widehat{t_j\, t_{j+1}}$, тогда

$$\| A\phi - A_n\phi \| < \| \frac{b(t)}{\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big[\frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau - t} - \frac{\phi(t_k)-\phi(t)}{t_k - t} \Big] d\tau \| +$$

$$+ \| \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [k(t,\tau)\phi(\tau) - k(t,t_k)\phi(t_k)]\, d\tau \| + \| \frac{b(t)}{\pi i} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau - t}\, d\tau \| +$$

$$+ \| \int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} k(t,\tau)\phi(\tau)\, d\tau \| .$$

Рассмотрим сначала значение $\max | A\phi - A_n\phi |$ при $n \to \infty$. Так как $\phi(t) \in H_\mu$, мы имеем

$$\frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{(\tau - t)^{\mu}} = g(\tau, t),$$

где $g(\tau, t)$ – непрерывная функция $(\tau \neq t)$ и $| g(\tau, t) | \leq M_0$. При достаточно большом n имеем

$$| g(\tau, t) - g(t_k, t) | < \epsilon , \quad | k^*(t, \tau) - k^*(t, t_k) | < \epsilon .$$

Поэтому

$$| \frac{b(t)}{\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big[\frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau - t} - \frac{\phi(t_k)-\phi(t)}{t_k - t} \Big] d\tau | \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} |b| \; | \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau, t) \Big[\frac{1}{(\tau - t)^{1-\mu}} - \frac{1}{(t_k - t)^{1-\mu}} \Big] d\tau | +$$

$$+ \frac{1}{\pi} |b| \; | \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\, k>j+1}}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(t_k - t)^{1-\mu}} [g(\tau, t) - g(t_k, t)]\, d\tau | \leq$$

$$< \frac{1}{\pi} |b|\, 2M_0 (1-\mu) \frac{2\pi}{n} \int_{2\pi/n}^{2\pi} \frac{d\xi}{\xi^{2-\mu}} + \frac{1}{\pi} |b| \epsilon \int_{2\pi/n}^{2\pi} \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} |b| [O(\frac{1}{n^{\mu}}) + O(\epsilon)] \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty . \tag{5}$$

Далее

$$\left| \frac{b(t)}{\pi i} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{\phi(\tau)-\phi(t)}{\tau - t} d\tau \right| \leq \frac{|b| M_0}{\pi} \int_0^{\frac{6\pi}{n}} \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu}} = \frac{6^{\mu} |b| M_0}{\mu(\pi)^{1-\mu} n^{\mu}} = O(\frac{1}{n^{\mu}}), \tag{6}$$

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1, k>j+1}}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [k(t,\tau)\phi(\tau) - k(t,t_k)\phi(t_k)] d\tau \right| \leq 2C(1-\mu)\frac{2\pi}{n} \int_{2\pi/n}^{2\pi} \frac{d\xi}{\xi^{2-\mu}} + \tag{7}$$

$$+ C\epsilon \int_{2\pi/n}^{2\pi} \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu}} = O(\frac{1}{n^{\mu}}) + O(\epsilon),$$

$$\left| \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} k(t,\tau)\phi(\tau) d\tau \right| \leq C \int_0^{6\pi/n} \frac{d\xi}{\xi^{1-\mu}} = O(\frac{1}{n^{\mu}}). \tag{8}$$

Складывая эти неравенства, имеем

$$\max | A\phi - A_n \phi | \leqslant O(\frac{1}{n^{\mu}}) + O(\epsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty . \tag{9}$$

Обозначая через $\omega_n(t) = A\phi - A_n\phi$;

$$b(t) \frac{\phi(\tau) - \phi(t)}{\tau - t} = \psi(\tau, t), \tag{10}$$

рассмотрим разность $\omega_n(t'') - \omega_n(t')$. Пусть $t' \in \overset{\frown}{t_i t_{i+1}}$, $t'' \in \overset{\frown}{t_j t_{j+1}}$ где $i < j$, тогда

$$\omega_n(t'') - \omega_n(t') = \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{k<i-1, k>j+1 \\ i+1<k<j-1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{[\psi(\tau, t'') - \psi(t_k, t'')] - [\psi(\tau, t') - \psi(t_k, t')]\} d\tau +$$

$$+ \sum_{\substack{k<i-1, k>j+1 \\ i+1<k<j-1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{[k(t'',\tau)\phi(\tau) - k(t'',t_k)\phi(t_k)] - [k(t',\tau)\phi(\tau) - k(t',t_k)\phi(t_k)]\} d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+2}}\psi(\tau,t'')\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\psi(\tau,t')\,d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t_{i+2}}k(t'',\tau)\phi(\tau)\,d\tau-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}k(t',\tau)\phi(\tau)\,d\tau.$$

Докажем, что

$$\sup\frac{|\omega_n(t'')-\omega_n(t')|}{|t''-t'|^{\mu}}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$.

Для простоты записи мы рассмотрим только, например, выражение

$$\frac{1}{|t''-t'|^{\mu}}\Big|\frac{1}{\pi i}\sum_{\substack{k<i-1,\,k<j+1\\ i+1<k<j-1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\{[\psi(\tau,t'')-\psi(t_k,t'')]-[\psi(\tau,t')-\psi(t_k,t')]\}\,d\tau\Big|=\Psi(n).$$

Имеем

$$[\psi(\tau,t'')-\psi(\tau,t')]-[\psi(t_k,t'')-\psi(t_k,t')]=b(t'')g(\tau,t'')\Big[\frac{1}{(\tau-t'')^{\alpha}}-\frac{1}{(\tau-t')^{\alpha}}\Big]-$$

$$-b(t'')g(t_k,t'')\Big[\frac{1}{(t_k-t'')^{\alpha}}-\frac{1}{(t_k-t')^{\alpha}}\Big]+[b(t'')g(\tau,t'')-b(t')g(\tau,t')]\frac{1}{(\tau-t')^{\alpha}}-$$

$$-[b(t'')g(t_k,t'')-b(t')g(t_k,t')]\frac{1}{(t_k-t')^{\alpha}},$$

где $\alpha=1-\mu$

Замечая неравенство (5); в силу непрерывности $g(\tau,t)$ $(\tau\neq t)$ и $b(t)\in H_{\mu}$, имеем

$$\Psi(n)<\frac{1}{\pi}|b|\Big[\epsilon|t''-t'|^{\alpha}C_1+2M_0(1-\mu)\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)^{\mu}\Big],\tag{11}$$

где ϵ – как и в (5), а $C_1=\alpha\int_{2\pi/n}^{2\pi}\frac{d\xi}{\xi^{\alpha}}$.

Из (11) очевидно, что $\Psi(n)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Для остальных выражений это утверждение доказывается аналогично. Таким образом, условие 3) леммы удовлетворяется. Остается установить выполнение условия 4).

Пусть $\{\phi_n\}\in H_{\mu}$, $\|\phi_n\|\le m<\infty$ Из того, что $|\phi_n(t'')-\phi_n(t')|\le m|t''-t'|^{\mu}$ и в силу полноты пространства H_{μ} можем выделить из последовательности $\{\phi_n\}$ подпоследовательность $\{\phi_{n_p}\}$, сходящуюся к $\phi\in H_{\mu}$, $\|\phi\|\le m$.

Теперь, выделяя из $\{A_n\phi_n\}$ подпоследовательность $\{A_{n_p}\phi_{n_p}\}$, имеем

$$\|A_{n_p}\phi_{n_p}-A\phi\|\le\|A_{n_p}\|\,\|\phi_{n_p}-\phi\|+\|A_{n_p}\phi-A\phi\|.$$

При $p\to\infty$ $\|\phi_{n_p}-\phi\|\to 0$ и $\|A_{n_p}\phi-A\phi\|\to 0$ в силу условия 3) леммы. Отсюда, из условия (2) $\|A_{n_p}\|\le M$, имеем $\|A_{n_p}\phi-A\phi\|\to 0$ при $p\to\infty$. Условие 4). теперь следует из того, что если $\phi\in H_\mu$, то $A\phi\in H_\mu$

$$\lim_{p\to\infty}A_{n_p}\phi_{n_p}=A\phi\in H_\mu.$$

Итак, наша теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что при достаточно большом n отличается от нуля определитель следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\phi_\ell+\frac{b_\ell}{\pi i}\sum_{\substack{k=1\\ k<\ell-1,k>\ell+1}}^{n}\frac{\phi_k-\phi_\ell}{t_k-t_\ell}\Delta t_k+\sum_{\substack{k=1\\ k<\ell-1,k>\ell+1}}^{n}k_{\ell_k}\phi_k=f_\ell,\quad(\ell=1,2,\dots,n),$$

где

$$f_\ell=f(t_\ell),\quad k_{\ell_k}=k(t_\ell,t_k).$$

Чтобы осуществить этот метод на ЭВМ, лучше привести уравнение (1) к уравнению с ядром Гильберта.

Литература

1. В.В.Иванов. Методы приближенного решения с.и.у. Серия "Итоги науки", 1964.
2. Фан Ван Хап. Об одном методе приближенного решения с.и.у. ЖВМ и МФ, т.5, 2, 1965 г.
3. Ч.Фойяш. Rev. Math. Pures et Appl. RPR, 5, №3,4, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1967 года.