ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3642

Фан Ван Хап

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1967.

Р5 - 3642

Фан Ван Хап

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

§1. Некоторые предварительные понятия

Исключительными случаями сингулярных интегральных уравнений называются уравнения типа

$$K\phi = a(t)\phi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \lambda \int_L k(t,\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau, \tag{1.1}$$

в которых $a(t) - b(t)$ и $a(t)+b(t)$ имеют на контуре Ляпунова L – нули, соответственно, в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ целых порядков и, следовательно, их можно представить в виде

$$\begin{aligned} a(t)-b(t) &= \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k}\, r(t),\\ a(t)+b(t) &= \prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j}\, s(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $r(t)$ и $s(t)$ нигде на L не обращаются в нуль, а m_k, p_j – целые числа.

Делим обе части (1.1) на $\sqrt{r(t)\cdot s(t)}$ и в дальнейшем будем считать, что коэффициенты его удовлетворяют соотношению

$$a^2(t)-b^2(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\cdot\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}=\Pi_0 . \qquad (1.3)$$

Если $k(t,\tau)\equiv 0$, то уравнение

$$K^0\phi\equiv a(t)\phi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t) \qquad (1.4)$$

называется характеристическим. Будем здесь и в дальнейшем предполагать, что коэффициенты (1.1) удовлетворяют дополнительным условиям, которые возникают при исследовании исключительных случаев задачи Римана [x)].

Обозначим

$$\kappa=\operatorname{Ind}\frac{r(t)}{s(t)},\quad \sum_{j=1}^{\nu}p_j=p,\quad \sum_{k=1}^{\mu}m_k=m .$$

Если уравнение (1.4) имеет решение, то оно дается следующей формулой /1/

$$\phi(t)=Rf+b(t)\,Z(t)\,P_{\kappa-p-1}(t), \qquad (1.5)$$

где

$$Rf\equiv\frac{1}{\Pi_0}\left[\,a(t)f(t)-\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{t-\tau}+b(t)\,Z(t)Tf\right], \qquad (1.6)$$

причем $Z(t)=X^+(t)s(t)=X^-(t)\cdot r(t)$, $X(z)$ – каноническая функция задачи Римана с коэффициентом $G(t)=\dfrac{r(t)}{s(t)}$,

$$Tf=2Q_\rho(z)$$

$Q_\rho(z)$ – интерполяционный многочлен для функции

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}, \qquad (1.7)$$

x) Достаточно требовать, чтобы $\dfrac{r(t)}{s(t)}$, $\dfrac{f(t)}{s(t)}$ в точках α_k, β_j имели производные m_k, p_j порядков, удовлетворяющие условию Гельдера /1/.

$P_{\kappa-p-1}(t)$ – многочлен $\kappa-p-1$ степени с произвольными коэффициентами. Если $\kappa-p<0$, то решение (в котором $P_{\kappa-p-1}=0$) существует лишь при выполнении $p-\kappa+1$ следующих условий

$$\int_L \frac{f(\tau)\,\tau^k}{Z(\tau)}\,d\tau=0\,,\quad k=0,1,\dots,p-\kappa+1\,. \tag{1.8}$$

§2. *Общий случай*

Как отмечалось в /1/, для уравнений типа (1.1) теоремы Нетера оказываются, вообще говоря, несправедливыми. Однако, если считать допустимыми решения, имеющие полярные особенности достаточно высокого порядка, понимая при этом интегрирование в смысле обобщенных функций, то можно и в исключительных случаях сохранить все три теоремы Нетера /2/. В этом параграфе рассмотрим уравнение (1.1), ядро которого вырождено, и отметим некоторые следствия, справедливые и в общем случае.

1. Пусть

$$k(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,\beta_i(\tau)\,.$$

Полагая
$$c_i=\int_L \beta_i(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau\,,$$
получим систему

$$c_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,c_j=f_i\,, \tag{2.1}$$

и решение (если оно есть) дается следующей формулой

$$\phi(t)=Rf-\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i\,R\,\alpha_i(t)+b\,Z\,P_{\kappa-p-1}\,. \tag{2.2}$$

Относительно союзного уравнения мы получим систему

$$c^*_j+\lambda\sum_{i=1}^{n}a^*_{ij}\,c^*_i=h_j\,, \tag{2.3}$$

где $$a^*_{ij} = a_{ji} = \int\limits_L \beta_i(r) R \alpha_j(r)\, dr .$$

2. Путем исследования разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (2.1) и (2.3) нетрудно доказать следующие следствия.

Для простоты мы рассмотрим отдельно три случая:

а) $\kappa \geq p$, т.е. $\kappa - p \geq 0$, $-\kappa - m < 0$

Следствие 1. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ не является собственным значением, то $K\phi = 0$ имеет $\kappa - p$ линейно независимых решений, а $K'\psi = 0$ не имеет решений.

Следствие 2. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ является собственным значением и $K'\psi = 0$ имеет решения, то $K\phi = 0$ также имеет решения. В этом случае разность между числом n линейно независимых решений последнего и числом n' линейно независимых решений первого, равна $\kappa - p$:

$$n - n' = \kappa - p .$$

Нетрудно проверить, что при таких же предложениях необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения $K\phi = f$ являются

$$\int\limits_L \psi_h(t) f(t)\, dt = 0, \quad h = 1, 2, \ldots, n',$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n'}$ – полная система линейно независимых решений $K'\psi = 0$.

б) $-m < \kappa < p$. В этом случае $\kappa - p < 0$, $-\kappa - m < 0$.

Следствие 3. Уравнение $K\phi = 0$ и $K'\psi = 0$ или одновременно неразрешимы, или имеют одинаковые числа линейно независимых решений:

$$n = n'.$$

в) $\kappa \leq -m$ $\kappa - p < 0$, $-\kappa - m \geq 0$

Справедливо следующее следствие.

Следствие 4. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ не является собственным значением, то $K\phi = 0$ не имеет решений, различных от нуля, а $K'\psi = 0$ имеет $-\kappa - m$ линейно независимых решений.

Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ является собственным значением и $K\phi = 0$ разрешимо, то $K'\psi = 0$ также разрешимо и

$$n - n' = \kappa + m .$$

Как уже отмечалось, эти следствия также справедливы и в общем случае.

§3. Приближенное решение

По теореме 1 из работы /3/ наша задача поставлена некорректно. Пусть уравнение (1.1) имеет единственное решение. Будем предполагать, что решение $\phi \in H(M_1, M_2, \mu)$, где $H(M_1, M_2, \mu)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с постоянным M_1 и ограниченных в совокупности, т.е.

$$|\phi(t') - \phi(t)| \le M_1 |t' - t|^{\mu}, \quad |\phi| \le M_2; \quad 0 < \mu \le 1.$$

Вводим в H_μ – пространство всех функций, непрерывных по Гельдеру с показателем μ, норму следующим образом

$$\|\phi\| = M + M_0, \qquad M = \max|\phi(t)|, \quad M_0 = \sup \frac{|\phi(t_2) - \phi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}},$$

Заменим в (1.1) $k(t, \tau)$ близкими вырожденными ядрами $k_n(t, \tau)$ так, что $\|k(t, \tau) - k_n(t, \tau)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Решения ϕ_n уравнений

$$K_n \phi_n = a(t)\phi_n(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\phi_n(\tau)}{\tau - t} d\tau + \lambda \int_L k_n(t, \tau)\phi_n(\tau) d\tau = f(t) \qquad (3.1)$$

считаются приближенными решениями уравнения (1.1). Схема вычисления и улучшения этих приближенных решений построена аналогично /4/. Согласно теореме из /5/ и в силу компактности множества $H(M_1, M_2, \mu)$ в пространстве H_μ можно доказать сходимость последовательных приближений ϕ_n к точному решению ϕ.

Чтобы облегчить задачу, во многих случаях вместо уравнения (1.1) выгодно рассмотреть эквивалентное ему уравнение

$$MK\phi = Mf,$$

где

$$M\psi = a_1(t)\psi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \qquad (3.2)$$

причем

$$a_1(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s(t)} + \frac{t^{\kappa}}{r(t)}\right], \quad b_1(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s(t)} - \frac{t^{\kappa}}{r(t)}\right]. \qquad (3.3)$$

Имеем

$$MK\phi = \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j} + t^{\kappa}\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\right)\phi(t) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j} - t^{\kappa}\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\right)\int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \tag{3.4}$$

$$+\lambda\int_L n(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau = Mf.$$

Нетрудно видеть, что для уравнения (3.4) $Z(t) \equiv 1$.

§4. Вопрос о регуляризации

Как мы уже отметили, в исключительных случаях наша задача поставлена некорректно. Можем использовать метод регуляризации, развитый в [6,7], чтобы построить приближенное решение уравнения (1.1).

Будем для простоты считать, что L состоит из одного единственного замкнутого контура. Не нарушая общности, можно считать, что длина L равна 2π. В соответствии с этим L может быть записана в параметрическом виде $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \le s \le 2\pi$, где s – длина дуги. На основании принятых условий в [1] показано, что уравнение (1.1) можно привести к уравнению с ядром Гильберта

$$L\psi \equiv a(s)\psi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(s,\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,\psi(\sigma)\,d\sigma = g(s). \tag{4.1}$$

Рассматривая уравнение (4.1), будем искать его решение $\bar\psi$ в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Предполагаем, что такое решение существует, и оно единственное. Можем считать, не нарушая общности, что $\bar\psi(0) = \bar\psi(2\pi) = 0$. (Так как, вообще, если $\bar\psi(0) = \bar\psi(2\pi) = \beta$, то вместо (4.1) можно рассматривать

$$L\psi^0 = g^0(s), \qquad \psi^0 = \bar\psi - \beta, \quad g^0 = g - L[\beta]).$$

Вводим оператор

$$M^{\alpha}[\psi, g] = N[\psi, g] + \alpha\,\Omega[\psi], \tag{4.2}$$

где

$$N[\psi, g] = \int_0^{2\pi} [L\psi - g]^2\, ds,$$

$$\Omega[\psi] = \int_0^{2\pi} [k_1(s)\psi^2(s) + M_{\psi}]\, ds, \quad k_1(s) > 0,$$

причем

$$M_{\psi} = \sup \frac{|\psi(s_2) - \psi(s_1)|}{|s_2 - s_1|^{\mu}}, \quad 0 \le s_i \le 2\pi, \quad (i = 1,2).$$

Как и в /6/ будем называть $\Omega[\psi]$ регуляризующим, а M^{α} – сглаживающим функционалами.

Аналогично /6/ имеем предложение.

Для любой функции $g \in H_{\mu}$ и любого $\alpha > 0$ существует единственная $\psi^{\alpha} \in H_{\mu}$, реализующая минимум функционала $M^{\alpha}[\psi, g]$. Функция ψ^{α} определяется как решение уравнения

$$[\alpha k_1(s) + a^2(s) + L^2(s, s)]\,\psi(s) + \bar{g}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K^*(s, \xi)\,\psi(\xi)\, d\xi, \tag{4.3}$$

где

$$K^*(s, \xi) = a(s)\int_0^{2\pi} L(s, \xi)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\xi - s}{2}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(s, \sigma)\,L(\sigma, \xi)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\xi - s}{2}\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{ctg}\,\frac{s - \sigma}{2}\, d\sigma, \tag{4.4}$$

$$\bar{g}(s) = \int_0^{2\pi} L(s, \sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{s - \sigma}{2}\, g(\sigma)\, d\sigma + a(s)\,g(s).$$

Справедлива и следующая теорема.

<u>Теорема</u>.Пусть функция $\bar{g}(x) \in H_{\mu}$ соответствует решению уравнения (4.1), равному $\bar{\psi}(s) \in H_{\mu}$. Для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta_0(\epsilon, \bar{\psi})$, что если

$$\| \tilde{g} - \bar{g} \| \le \delta \quad \text{и} \quad q_1 \delta^2 \le \alpha(\delta) \le q_2 \delta^2 \; (q_1 > 0),$$

то $| \psi^{\alpha(\delta)} - \bar{\psi}(s) | < \epsilon$ при $\delta < \delta_0$, (где ψ^{α}, реализующая минимум $M^{\alpha}[\psi, g]$).

В самом деле, так как $M^{\alpha}[\psi^{\alpha}, g] \le M^{\alpha}[\bar{\psi}, \bar{g}]$, то

1) $$\alpha(\delta)\Omega[\psi^{\alpha}] \le \delta^2 + \alpha\Omega[\bar{\psi}] \le \alpha\left[\frac{1}{q} + \Omega[\psi]\right]$$

или
$$\Omega[\psi^{\alpha}] < C_0 = \frac{1}{q_1} + \Omega[\bar{\psi}];$$

$$\Omega[\psi^{\alpha}] = \int_0^{2\pi} [(k_1\psi^{\alpha})^2 + M_{\psi^{\alpha}}]\, ds \le C_0 .$$

Это значит, что $M_{\psi^{\alpha}} \le C_1 = \dfrac{C_0}{2\pi}$. Далее имеем

$$| \psi^{\alpha}(s_2) - \psi^{\alpha}(s_1) | \le C_1 | s_2 - s_1 |^{\mu} \le C_1 (2\pi)^{\mu},$$

отсюда $| \psi^{\alpha}(s) | \le C_2 = C_1 (2\pi)^{\mu}$ (так как $\psi^{\alpha}(0) = 0$).
Поэтому, как было отмечено, все $\psi^{\alpha}(\delta)$ при любых δ принадлежат компактному в смысле H множеству функций $\Psi_0(\bar{\psi})$, определенному условием $\Omega[\psi] \le C_0$.

2) Пусть G_0 – множество функций $g(s) = L[\psi]$. В силу непрерывности отображения $\Psi_0 \to G_0$ и единственности решения уравнения (4.1) обратное отображение $G_0 \to \Psi_0$ определено и непрерывно, т.е. для любого ϵ существует $\eta_0(\epsilon, \bar{\psi})$, зависящее от $\Psi_0(\bar{\psi})$, что если для $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2 \in G_0$ норма

$$\| \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 \|_{L_2} < \eta_0(\epsilon, \bar{\psi}), \text{ то } | \psi_1 - \psi_2 | < \epsilon .$$

Далее

$$N[\psi^{\alpha}, \tilde{g}] = \int_0^{2\pi} [g^{\alpha} - \tilde{g}]^2\, ds = \| g^{\alpha} - \tilde{g} \|^2_{L_2} \le \delta^2 (1 + q_2 \Omega[\bar{\psi}]),$$

где
$$g^{\alpha} = L[\psi^{\alpha}].$$

Таким образом, так как $\bar{\psi} \in \Psi_0(\bar{\psi})$ и

$$\|\bar{g} - g^{\alpha}\|_{L_2} \le \|g^{\alpha} - \tilde{g}\|_{L_2} + \|\tilde{g} - \bar{g}\|_{L_2} \le \|g^{\alpha} - \tilde{g}\|_{L_2} + \|\tilde{g} - \bar{g}\|_{H} < \delta C_3 ,$$

где

$$C_3 = 1 + \sqrt{1 + q_2 \Omega[\bar{\psi}]} , \qquad \text{то} \quad |\psi^{\alpha} - \bar{\psi}| < \epsilon$$

при $\delta \le \frac{1}{C_3} \eta_0(\epsilon, \bar{\psi}) = \delta_0(\epsilon, \bar{\psi})$, что и доказывает теорему.

Литература

1. Ф.Д.Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Л.А.Чикин. Уч.зап. Казанск. ун-та, 113, №10, 57-105, 1952.
3. И.Н.Домбровская, В.К.Иванов. Некорректные линейные уравнения и исключительные случаи уравнений типа свертки. ЖВМ и МФ, т.4, №2, 1964.
4. Фан Ван Хап. Об одном методе приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. ЖВМ и МФ, т.5, №2,171-184, 1965.
5. А.Н.Тихонов. Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР, т.XXX1X, №5, 195-198, 1943.
6. А.Н.Тихонов. О решении некорррректно поставленных задач и методе регуляризации. ДАН СССР, т.151, №3, 501-504, 1963.
7. А.Н.Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, т.153, №1, 49-52, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1967 года.