ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3586

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Р.Денчев

О "МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ" А.Н.ТИХОНОВА ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1967

P5 - 3586

Р.Денчев

О "МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ" А.Н.ТИХОНОВА ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Направлено в ЖВМ и МФ

А.Н. Тихоновым предложен [1] метод для приближенного решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений. Настоящая работа содержит некоторое обобщение этого метода на бесконечномерный случай и применение к приближенному решению задачи Дирихле для волнового уравнения.

Заданы область $\Omega \subset R^n$, граничное условие[x)] $W_2^r(\Omega, \text{гр})$ и дифференциальное выражение порядка r

$$\mathfrak{L} = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha(x) D^\alpha . \tag{1}$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \qquad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

$a_\alpha(x)$ – достаточно гладкие функции в Ω.

Рассматриваем задачу

$$\mathfrak{L} u = f \qquad u \in W_2^r(\Omega, \text{гр}), \tag{2}$$

где $f \in L_2(\Omega)$.

Как известно, слабым решением задачи (2) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая условию

$$(u, \mathfrak{L}^+ v)_{L_2} = (f, v)_{L_2} \tag{3}$$

---

x) Граничным условием $W_2^r(\Omega, \text{гр})$ называем [2] любое подпространство $W_2^r(\Omega)$, содержащее $\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)$ – замыкание множества финитных функций из $W_2^r(\Omega)$. Через $W_2^r(\Omega)$ обозначаем, как обычно, пространства Соболева.

для каждого $v \in W_2^r(\Omega, гр)^+$. Здесь $\mathcal{L}^+$ означает выражение, сопряженное к $\mathcal{L}$, а $W_2^r(\Omega, гр)^+$ – граничное условие, сопряженное к $W_2^r(\Omega, гр)$.

Обозначим через N множество слабых решений однородной задачи

$$\mathcal{L} u = 0, \qquad u \in W_2^r(\Omega, гр). \tag{4}$$

Очевидно, N – слабо замкнутое в L_2 линейное многообразие.

Если u^0 – некоторое слабое решение (2), то все слабые решения задаются формулой

$$u = u^0 + u_1, \qquad u_1 \in N. \tag{5}$$

Если задача (2) слабо разрешима, то существует слабое решение $\hat{u}$, ортогональное N . Действительно, пусть u^0 – некоторое решение и обозначим через u_1 его проекцию на N . Тогда $\hat{u} = u^0 - u_1$ ортогонально N и

$$(\hat{u}, \mathcal{L}^+ v)_{L_2} = (u^0, \mathcal{L}^+ v)_{L_2} - (u_1, \mathcal{L}^+ v)_{L_2} = (f, v)_{L_2}. \tag{6}$$

Решение $\hat{u}$ будем называть нормальным решением /1/. Оно характеризуется тем, что среди всех слабых решений (2) обладает наименьшей нормой.

Пусть $\{v_k\}$ – некоторый базис в $W(\Omega, гр)$, ортонормированный в метрике W_2^r . Образуем функционал

$$M(u, f, \Omega, \alpha) = \sum_k [(u, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} - (f, v_k)_{L_2}]^2 + \alpha \|u\|_{L_2}^2, \tag{7}$$

где $u, f \in L_2(\Omega)$, α – положительное число.

Покажем, что выражение (7) имеет смысл, т.е. что написанная сумма сходится. Действительно, функционал

---

x) $W_2^r(гр)^+$ состоит из всех функций $v \in W_2^r(\Omega)$ таких, что для любого $u \in W_2^r(\Omega, гр)$

$$(\mathcal{L} u, v)_{L_2} = (u, \mathcal{L}^+ v)_{L_2}$$

$$\ell(v) = (u, \mathcal{L}^+ v)_{L_2}, \quad v \in W_2^r(\Omega)$$

антилинеен, непрерывен в $W_2^r(\Omega)$ и его можно представить в виде

$$\ell(v) = (u_\ell, v)_{W_2^r},$$

где $u_\ell \in W_2^r(\Omega)$. Таким образом,

$$\sum_k (u, \mathcal{L}^+ v_k)^2_{L_2} = \sum_k (u_\ell, v_k)^2_{W_2^r}. \tag{8}$$

Последняя сумма сходится, так как это сумма квадратов коэффициентов Фурье проекции функции u_ℓ на $W_2^r(\Omega, \text{гр})^+$ по ортонормированному базису $\{v_k\}$.

Аналогично доказывается, что сходится сумма $\sum_k (f, v_k)^2_{L_2}$.

<u>Теорема 1.</u> Функционал $M(u, f, \Omega, \alpha)$ слабо полунепрерывен снизу.

Доказательство: Пусть $u, u_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда

$$M(u, f, \Omega, \alpha) - M(u_0, f, \Omega, \alpha) =$$

$$= \sum_k [(u, \mathcal{L}^+ v_k)^2_{L_2} - 2(u, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} (f, v_k)_{L_2} - (u_0, \mathcal{L}^+ v_k)^2_{L_2} + 2(u, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} (f, v_k)_{L_2}] +$$

$$+ \alpha [(u, u)_{L_2} - (u_0, u_0)_{L_2}] =$$

$$= \sum_k [(u - u_0, \mathcal{L}^+ v_k)^2_{L_2} + 2(u - u_0, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} (u_0, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} - 2(u - u_0, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} (f, v_k)_{L_2}] +$$

$$+ \alpha [(u - u_0, u - u_0)_{L_2} + 2(u - u_0, u_0)_{L_2}] = \tag{9}$$

$$= \sum_k (u - u_0, \mathcal{L}^+ v_k)^2_{L_2} + \alpha (u - u_0, u - u_0)_{L_2} +$$

$$+ 2\left(u - u_0, \sum_k \mathcal{L}^+ v_k [(u_0, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2} - (f, v_k)_{L_2}] + \alpha u_0\right)_{L_2}.$$

Если u сходится слабо к u_0, то последний член в первой части (9) стремится к нулю, а первые два члена неотрицательны. Таким образом, получаем

$$\varliminf_{u \to u_0} M(u, f, \Omega, \alpha) - M(u_0, f, \Omega, \alpha) \geq 0, \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

Пусть заданы области Ω, Ω^δ, Ω_0 такие, что $\Omega, \Omega^\delta \subset \Omega_0$. Функции, определенные на Ω или Ω^δ, будем продолжать на Ω_0 нулем. Введем следующее определение: граничное условие $W_2^r(\Omega^\delta, \text{гр})^\delta$ будем называть δ-приближением граничного условия $W_2^r(\Omega, \text{гр})$, если существуют ортонормированные (в метрике W_2^r) базисы $\{v_k^\delta\}$ и $\{v_k\}$ соответственно подпространств $W_2^r(\Omega^\delta, \text{гр})^\delta$ и $W_2^r(\Omega, \text{гр})$ такие, что

$$\| v_k - v_k^\delta \|_{W_2^r(\Omega_0)} < C_k \delta \qquad \sum_k (u, v_k - v_k^\delta)^2_{W_2^r(\Omega_0)} < C_u \delta^2 \tag{11}$$

для любого $u \in W_2^r(\Omega_0)$.

Функцию $f^\delta \in L_2(\Omega^\delta)$ будем называть δ-приближением функции f, если

$$\| f^\delta - f \|_{L_2(\Omega_0)} < \delta .$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть задача (2)* слабо разрешима и $\hat{u}$ – нормальное решение. Задана неотрицательная функция $\alpha(\delta)$ такая, что

$$\alpha(\delta) \to 0, \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0 \qquad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{12}$$

Пусть f^δ и $W_2^r(\Omega^\delta, \text{гр})^\delta$ – приближения соответственно f и $W_2^r(\Omega, \text{гр})$. Обозначим через u^δ функцию минимизирующую функционал $M(u, f^\delta, \Omega^\delta, \alpha(\delta))$ (такая существует в силу теоремы 1). Тогда u^δ сходится слабо к $\hat{u}$ при $\delta \to 0$.

Доказательство: Достаточно доказать, что из любой последовательности u^{δ_n} с $\delta_n \to 0$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к $\hat{u}$.

Покажем, что последовательность u^{δ_n} ограничена по норме $L_2(\Omega_0)$ и, следовательно, слабо компактна. Действительно, (индекс n опускаем)

$$\| u^\delta \|^2_{L_2(\Omega_\bullet)} \leq \frac{1}{\alpha(\delta)} M(u^\delta, f^\delta, \Omega^\delta, \alpha(\delta)) \leq \frac{1}{\alpha(\delta)} M(\hat{u}, f^\delta, \Omega^\delta, \alpha(\delta))$$

$$= \frac{1}{\alpha(\delta)} \{ \sum_k [(u, \mathcal{L}^+ v_k^\delta)_{L_2(\Omega^\delta)} - (f^\delta, v_k^\delta)_{L_2(\Omega^\delta)}]^2 + \alpha(\delta) \| \hat{u} \|^2_{L_2(\Omega^\delta)} \} =$$

$$= \frac{1}{\alpha(\delta)} \{ \sum_k [(\hat{u}, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2(\Omega)} - (f^\delta, v_k)_{L_2(\Omega)} + (\hat{u}, \mathcal{L}^+ v_k^\delta)_{L_2(\Omega)} -$$

$$- (\hat{u}, \mathcal{L}^+ v_k)_{L_2(\Omega)} - (f^\delta, v_k^\delta)_{L_2(\Omega^\delta)} + (f^\delta, v_k)_{L_2(\Omega)}]^2 + \alpha(\delta) \| \hat{u} \|^2_{L_2(\Omega^\delta)} \} \leq \tag{13}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha(\delta)} \{ \sum_k 3 [(f - f^\delta, v_k)^2_{L_2(\Omega)} + (\hat{u}, \mathcal{L}^+ (v_k^\delta - v_k))^2_{L_2(\Omega_o)} + (f^\delta, v_k^\delta - v_k)^2_{L_2(\Omega_o)}] +$$

$$+ \alpha(\delta) \| \hat{u} \|^2_{L_2(\Omega^\delta)} \} .$$

При этом используем неравенство

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

вытекающее из неравенства Коши–Буняковского. Оценим слагаемые в последнем выражении (13). Функционал

$$\ell(v) = (g, v)_{L_2}, \quad v \in W_2^r(\Omega), \quad g \in L_2(\Omega)$$

антилинеен, непрерывен в W_2^r и его можно представить в виде

$$\ell(v) = (Ig, v)_{W_2^r},$$

где $Ig \in W_2^r(\Omega)$. Оператор I, отображающий $L_2(\Omega)$ в $W_2^r(\Omega)$, линейный и ограниченный. Таким образом,

$$\sum_k (f - f^\delta, v_k)^2_{L_2(\Omega)} = \sum_k (I(f - f^\delta), v_k)^2_{W_2^r(\Omega)} \leq \| I(f - f^\delta) \|^2_{W_2^r} \leq C \| f - f^\delta \|^2_{L_2} = 0(\delta^2). \tag{14}$$

Аналогично и так же как в (8)

$$\sum_k (\hat{u}, \mathfrak{L}^+(v_k^\delta - v_k))^2_{L_2(\Omega_0)} = \sum_k (\hat{u}_\ell, v_k^\delta - v_k)^2_{W_2^r(\Omega_0)} = O(\delta^2), \tag{15}$$

в силу (11), так как $\hat{u}_\ell \subseteq W_2^r(\Omega_0)$. Таким же образом имеем

$$\sum_k (f^\delta, v_k^\delta - v_k)^2_{L_2(\Omega_0)} = \sum_k (I f^\delta, v_k^\delta - v_k)^2_{W_2^r(\Omega_0)} = O(\delta^2). \tag{16}$$

Окончательно получаем

$$\| u^\delta \|^2_{L_2(\Omega_0)} \leq \frac{1}{\alpha(\delta)} M(u^\delta, f^\delta, \Omega^\delta, \alpha(\delta)) \leq C \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} + \| \hat{u} \|^2_{L_2(\Omega_0)}. \tag{17}$$

Выберем из последовательности u^{δ_n} слабо сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее для простоты тоже через u^{δ_n}, а ее предел – через u^0. Покажем, что $u^0 = \hat{u}$.

$$\begin{gathered}
|(u^{\delta_n}, \mathfrak{L}^+ v_k)_{L_2(\Omega_0)} - (f, v_k)_{L_2(\Omega_0)}| \leq |(u^{\delta_n}, \mathfrak{L}^+ v_k)_{L_2(\Omega_0)} - (u^{\delta_n}, \mathfrak{L}^+ v_k^{\delta_n})_{L_2(\Omega_0)}| + \\
+ |(u^{\delta_n}, \mathfrak{L}^+ v_k^{\delta_n})_{L_2(\Omega_0)} - (f^{\delta_n}, v_k^{\delta_n})_{L_2(\Omega_0)}| + |(f^{\delta_n}, v_k^{\delta_n})_{L_2(\Omega_0)} - (f, v_k^{\delta_n})_{L_2(\Omega_0)}| + \\
+ |(f, v_k^{\delta_n})_{L_2(\Omega_0)} - (f, v_k)_{L_2(\Omega_0)}| \leq C \| u^{\delta_n} \| \| v_k - v_k^{\delta_n} \|_{W_2^r} + \\
+ \sqrt{M(u^{\delta_n}, f^{\delta_n}, \Omega^{\delta_n}, \alpha(\delta_n))} + \| f^{\delta_n} - f \| \| v_k^{\delta_n} \|_{W_2^r} + \| f \| \| v_k^{\delta_n} - v_k \|_{W_2^r}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Учитывая (11), (12) и (17) нетрудно увидеть, что правая сторона последнего неравенства в (18) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Следовательно,

$$(u^0, \mathfrak{L}^+ v_k) = (f, v_k). \tag{19}$$

Из (12) и (17) в силу слабой полунепрерывности снизу нормы получаем

$$\| u^0 \| \leq \| \hat{u} \|. \tag{20}$$

Но так как нормальное решение имеет наименьшую норму среди всех решений, то из (20) следует, что

$$u^0 = \hat{u},$$

что и нужно было доказать.

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для уравнения струны на прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad u/_\Gamma = 0.$$

Здесь

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Omega = [0, a; 0, b], \quad W_2^2(\text{гр}) = W_2^2(\text{гр})^+ = \{ u \subseteq W_2^2(\Omega) : u/_\Gamma = 0 \}.$$

Как известно, разрешимость задачи зависит от отношения $\alpha = \frac{b}{a}$.

1. Если α рационально, однородная задача имеет бесконечное множество гладких решений. Неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна решениям однородной задачи. Если разрешима, она имеет бесконечное множество гладких решений.

2. Если α иррационально, решение единственно, если существует. Разрешимость задачи и гладкость решения зависит от гладкости правой части.

Пусть заданы приближенные данные f^δ, Ω^δ, $W_2^2(\Omega^\delta, \text{гр})^\delta$, $\| f^\delta - f \| < \delta$, $\Omega^\delta = [0, a^\delta; 0, b^\delta]$, $|a^\delta - a| < \delta$, $|b^\delta - b| < \delta$, $W_2^2(\Omega^\delta, \text{гр})^\delta = \{ u \subseteq W_2^2(\Omega^\delta) : u/\partial\Omega^\delta = 0 \}$.

В качестве базисов $\{v_k\}$ и $\{v_k^\delta\}$ возьмем функции

$$v_{mn} = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad v_{mn}^\delta = C_{mn}^\delta \sin \frac{m\pi}{a^\delta} x \sin \frac{n\pi}{b^\delta} y, \tag{20}$$

где константы C_{mn}, C_{mn}^δ такие, что базисы $\{v_{mn}\}$ и $\{v_{mn}^\delta\}$ ортонормированы в W_2^2. Можно проверить, что они удовлетворяют условиям (11).

Обозначим через $\tilde{\tilde{u}}_{mn}$, $\tilde{\tilde{u}}_{mn}^\delta$ и $\tilde{\tilde{f}}_{mn}$, $\tilde{\tilde{f}}_{mn}^\delta$ коэффициенты Фурье функций u и f для базисов (20). Функционал $M(u, f^\delta, \Omega^\delta, \alpha(\delta))$ в этом случае следующий:

$$M(u, f^{\delta}, \Omega^{\delta}, \alpha(\delta)) = \sum_{mn} \left[\left(\frac{m^2}{a^{\delta 2}} - \frac{n^2}{a^{\delta 2}} \right) \overset{\approx}{u}{}^{\delta}_{mn} + \overset{\approx}{f}{}^{\delta}_{mn} \right]^2 C^{\delta}_{mn} + \alpha(\delta) \sum_{m,n} \overset{\approx}{u}{}^{\delta}_{mn} \; C^{\delta}_{mn} \; . \tag{21}$$

Для минимизирующей функции получаем следующие уравнения

$$2\left[\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^{\delta 2}} - \frac{n^2}{b^{\delta 2}} \right) \overset{\approx}{u}{}^{\delta}_{mn} + \overset{\approx}{f}{}^{\delta}_{mn} \right] \left(\frac{m^2}{a^{\delta 2}} - \frac{n^2}{b^{\delta 2}} \right) \pi^2 + 2\alpha(\delta) \overset{\approx}{u}{}^{\delta}_{mn} = 0 .$$

Отсюда для коэффициентов Фурье приближенного решения имеем:

$$\overset{\approx}{u}{}^{\delta}_{mn} = \frac{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^{\delta 2}} - \frac{n^2}{b^{\delta 2}} \right) \overset{\approx}{f}{}^{\delta}_{mn}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^{\delta 2}} - \frac{n^2}{b^{\delta 2}} \right)^2 + \alpha(\delta)} \; . \tag{22}$$

Литература

1. А.Н. Тихонов. Журн. вычислительной математики и математической физики, т. 5, № 4, 718 (1965).

2. Ю.М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 ноября 1967 г.