ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3538

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

II

1967.

P5 - 3538

М.Л. Краснов*, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев *

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

II

* Московский Энергетический институт

В прямоугольнике $D: \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ 0 \le t \le T \end{cases}$ рассматривается смешанная краевая задача для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha} u^{2\ell} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = h(x,t). \tag{1}$$

Решение задачи будем искать в классе $H_{\alpha}(D)$ функций, имеющих конечный интеграл

$$\iint\limits_{D} x^{\alpha} u^{2\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\, dt < +\infty, \quad (\alpha > 0). \tag{2}$$

Имеет место следующая теорема 1 /теорема вложения/ /1/:

1) Если $0 < \alpha < 1$, то любая функция

$$u(x,t) \in H_{\alpha}(D) \cap \overset{0}{C}{}^{(1)}(D)$$

принимает в среднем смысле $L_{2\ell+2}[0, T]$ значение нуль при $x = 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} \int\limits_0^T u^{2\ell+2}(x,t)\, dt = 0$.

2) Если функция $u(x,t)$ имеет ограниченные кусочно-непрерывные первые производные в D, обращается в нуль при $x = 1$ и кроме того:

$$\begin{aligned} &\text{а) при } \alpha = 1 \quad |u| < |K_1|\, |\ln x|^{\frac{\alpha}{2\ell+2}}, \\ &\text{б) при } \alpha > 1 \quad |u| < K_2\, x^{\frac{1-\alpha}{2\ell+2}}, \end{aligned} \tag{3}$$

то она принадлежит классу $H_{\alpha}(D)$.

3) Для функции $u(x,t) \in H_{\alpha}(D)$ справедлива оценка

$$\iint\limits_{D} \sigma(x)\, u^{2\ell+2}(x,t)\, dx\, dt < K_3 \iint\limits_{D} x^{\alpha} u^{2\ell}(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\, dt. \tag{4}$$

($K_3 > 0$ и не зависит от $u(x,t)$).

Здесь $\sigma(x) > 0$ –достаточно гладкая функция, определенная для положительных значений переменного x :

$$\sigma(x) = \begin{cases} O(x^{\alpha-2} \, |\ln x|^{-1-\epsilon_0}), & \alpha \neq 1, \\ O(x^{-1} \, |\ln x|^{-2-\epsilon_0}), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (\epsilon_0 > 0) \tag{5}$$

<u>Доказательство</u> теоремы 1 см. в [5].

<u>Следствие.</u> При $\alpha \geq 1$ в класс $H_\alpha(D)$ могут входить функции $u(x,t)$, стремящиеся к бесконечности при $x \to 0$, а также функции, принимающие при $x = 0$ любые наперед заданные значения.

Для уравнения (1) в прямоугольнике D ставится краевая задача: в классе функций $H_\alpha(D)$ найти решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0 \quad / \text{ в смысле } L_2 \ / \tag{6}$$

и краевому условию

$$u(1,t) = 0 \quad / \text{ в смысле } L_{2\ell+2} \ /. \tag{7}$$

При $\alpha < 1$ задается краевое условие

$$u(0,t) = 0 \quad / \text{ в смысле } L_{2\ell+2} \ /, \tag{8}$$

а при $\alpha \geq 1$ на части границы $\{x = 0, 0 \leq t \leq T\}$ краевое условие не задается.

Обобщенным решением поставленной краевой задачи называется функция $u(x,t) \in H_\alpha(D)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint_D x^{\alpha} u^{2\ell} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx\, dt - \iint_D u \frac{\partial v}{\partial t} \, dx\, dt = \iint_D h v \, dx\, dt \tag{9}$$

при любой функции $v(x,t)$ такой, что 1) $v(x,t) \in C^{(1)}(D)$, 2) $v(x,t)$ обращается в нуль в граничной полоске вблизи $x = 0$,

$$3) \quad v|_{x=1} = 0, \ v|_{t=T} = 0. \tag{10}$$

<u>Теорема 2</u> (существование обобщенного решения).

Если функция $h(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\iint_D \left[\frac{h^{2\ell+2}(x,t)}{\sigma(x)} \right]^{\frac{1}{2\ell+1}} dx\, dt < +\infty , \tag{11}$$

и $0 < \alpha < \ell + 2$, то существует по крайней мере одно обобщенное решение смешанной краевой задачи (1), (6)-(8).

Доказательство

Рассмотрим вспомогательное уравнение эллиптического типа

$$-\epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha u_\epsilon^{2\ell} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}\right) = h(x,t), \quad \epsilon > 0, \tag{12}$$

такое, что при $\epsilon = 0$ из него получается уравнение (1).

Для уравнения (12) ставится задача: найти решение (12), удовлетворяющее условиям

$$u_\epsilon \big|_{t=0} = \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \; u_\epsilon \big|_{t=T} = 0, \; u_\epsilon \big|_{x=1} = 0, \tag{13}$$

$$u_\epsilon \big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1 \\ \text{граничное условие не задается, если } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Под решением (обощенным) уравнения (12) будем понимать любую функцию $u_\epsilon(x,t) \in H_\alpha(D)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\epsilon \iint_D \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dt - \iint_D u_\epsilon \frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dt + \iint_D x^\alpha u_\epsilon^{2\ell} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dt = \iint_D h v\, dx\, dt \tag{14}$$

при любой функции $v(x,t) \in C^{(1)}(D)$ -такой, что

$$v(x,T) = 0, \; v(1,t) = 0,$$

$v(x,t) = 0$ вблизи $x = 0$.

Приближенное решение задачи (12), (13) ищем в виде

$$u_{\epsilon,n} = \sum_{k=1}^{n} C_k Z_k(x,t). \tag{15}$$

Неизвестные коэффициенты C_k находим из уравнений

$$
\begin{gathered}
-\epsilon \iint\limits_D \frac{\partial^2 u_{\epsilon,n}}{\partial t^2} Z_k \,dx\,dt + \iint\limits_D \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} Z_k \,dx\,dt + \\
+ \iint\limits_D x^a u_{\epsilon,n}^{2\ell} \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x} \frac{\partial Z_k}{\partial x} \,dx\,dt = \iint\limits_D h Z_k \,dx\,dt , \\
(k = 1, 2, \ldots, n).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Здесь $\{Z_k(x,t)\}$ – система базисных функций, полная в $\overset{0}{C}{}^{(1)}(D)$; можно считать, что она ортонормирована с весом $\sigma^{\frac{1}{\ell+1}}(x)$ в области D.

Система (16) является нелинейной системой алгебраических уравнений относительно C_k $(k = 1, \ldots, n)$:

$$
A_k(C_1, \ldots, C_n) = h_k \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{17}
$$

где

$$
h_k = \iint\limits_D h(x,t) Z_k(x,t) \,dx\,dt .
$$

Разрешимость системы (17) следует из известной леммы [3], если заметить, что

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n} A_k(C_1, \ldots, C_n) C_k = \epsilon \iint\limits_D \left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} \right)^2 dx\,dt + \\
+ \iint\limits_D x^a u_{\epsilon,n}^{2\ell} \left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x} \right)^2 dx\,dt \geq \\
\geq \iint\limits_D x^a u_{\epsilon,n}^{2\ell} \left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x} \right)^2 dx\,dt \geq \\
\geq M(D) \iint\limits_D \left[\sigma^{\frac{1}{2\ell+2}}(x)\, u_{\epsilon,n}(x,t) \right]^{2\ell+2} dx\,dt ,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

где $M(D)$ – константа, зависящая лишь от области D. Применяя к правой части (18) обратное неравенство Гельдера $\left(0 < p = \dfrac{1}{\ell+1} < 1\right)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(C_1,\dots,C_n)\,C_k \geq M_1(D)\left(\sum_{k=1}^{n} C_k^2\right)^{\ell+1}, \tag{19}$$

откуда следует, что система (16) имеет, по крайней мере, одно решение.

Установим оценки норм приближенных решений. Умножая обе части (16) на C_k, суммируя по k от 1 до n и интегрируя по частям, получим

$$\epsilon \iint_D \left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt + \iint_D x^{a} u_{\epsilon,n}^{2\ell}\left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x}\right)^2 dx\,dt = \tag{20}$$

$$= \iint_D h\,u_{\epsilon,n}(x,t)\,dx\,dt.$$

Применяя к правой части (20) последовательно неравенства Гельдера, Юнга и теорему вложения, получим

$$\iint_D h\,u_{\epsilon,n}\,dx\,dt \leq \frac{\eta^{2\ell+2}}{2\ell+2}\,C(D)\iint_D x^{a} u_{\epsilon,n}^{2\ell}\left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x}\right)^2 dx\,dt + \tag{21}$$

$$+ M\iint_D h^{\frac{2\ell+2}{2\ell+1}}\,\sigma^{-\frac{1}{2\ell+1}}(x)\,dx\,dt,$$

где C и M – const.

Выберем $\eta > 0$ столь малым, чтобы, например,

$$\frac{C(D)\,\eta^{2\ell+2}}{2\ell+2} < \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Тогда из равенства (20) и неравенств (21) и (22) находим

$$\epsilon \iint_D \left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} \right)^2 dx\,dt + \frac{1}{2} \iint_D x^{a} u_{\epsilon,n}^{2\ell} \left(\frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x} \right)^2 dx\,dt \le \tag{23}$$

$$\le M_2 \iint_D h^{\frac{2\ell+2}{2\ell+1}} \sigma^{-\frac{1}{2\ell+1}}(x)\,dx\,dt \le K_1^2 \ .$$

В силу условия теоремы правая часть (23) конечна, и, значит, имеет место равномерная по n ограниченность норм:

$$\left\| \sqrt{\epsilon}\, \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial t} \right\|_{L_2(D)} \le K_1 ,$$

$$\left\| x^{\frac{a}{2}} u_{\epsilon,n}^{\ell} \frac{\partial u_{\epsilon,n}}{\partial x} \right\|_{L_2(D)} \le K_1 . \tag{24}$$

Введем полунормированное множество M функций с полунормой

$$[u]_M^{2\ell+2,\,a} = \int_0^1 x^{a} u^{2\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx . \tag{25}$$

<u>Лемма 1.</u>

Имеет место компактное вложение

$$M \subset L_{2\ell+2,\,\sigma}(0,1).$$

Тот факт, что M вкладывается в $L_{2\ell+2,\,\sigma}(0,1)$, доказывается аналогично тому, как доказана теорема вложения в работе /5/. Для доказательства компактности вложения интервал (0,1) разбивается на два: $(0,\delta)$ и $(\delta,1)$, где δ достаточно мало.

На интервале $(0,\delta)$ компактность вложения доказывается прямым использованием теоремы Рисса [7] с учётом весовой функции $\sigma(x)$.

Для доказательства компактности на интервале $(\delta,1)$ используется методика, примененная в работе [3].

<u>Лемма 2.</u>

Если $0<\alpha<\ell+2$, то имеет место вложение

$$L_{2\ell+2,\,\sigma}(0,1)\subset L_2(0,1).$$

В самом деле, используя обратное неравенство Гельдера (при $p=\frac{1}{\ell+1}$), имеем:

$$\int_0^1 \sigma(x)\, u^{2\ell+2}(x,t)\,dx \geq \tag{26}$$

$$\geq \left(\int_0^1 u^2(x,t)\,dx\right)^{\ell+1}\left(\int_0^1 \sigma^{-\frac{1}{\ell}}(x)\,dx\right)^{-\ell}.$$

Так как при $0<\alpha<\ell+2$ второй множитель в правой части (26) положителен и ограничен, то отсюда следует требуемое вложение. Из лемм 1 и 2 следует вложение

$$M\subset L_{2\ell+2,\,\sigma}(0,1)\subset L_2(0,1),$$

причём вложение $M\subset L_{2\ell+2,\sigma}(0,1)$ компактно.

Используя теорему Обена-Дубинского [4], заключаем, что семейство $\{u_{\epsilon,n}(x,t)\}$ компактно в $L_{2\ell+2}(0,T;\,L_{2\ell+2,\,\sigma}(0,1))$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{u_{\epsilon,n_k}(x,t)\}$, сходящаяся при $n_k\to\infty$ к некоторой функции $u_\epsilon(x,t)$ почти всюду в D. Кроме того, в силу слабой компактности единичного шара в L_2 и оценок (24) получаем, что

$$x^{\frac{\alpha}{2}}\,u^{\ell}_{\epsilon,n_k}\,\frac{\partial u_{\epsilon,n_k}}{\partial x}\xrightarrow[L_2(D)]{\text{сл}} x^{\frac{\alpha}{2}}\,u^{\ell}_{\epsilon}(x,t)\,\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial u_{\epsilon, n_k}}{\partial t} \xrightarrow[L_2(D)]{\text{сл}} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}.$$

Эти обстоятельства позволяют сделать предельный переход при $n_k \to \infty$ в уравнениях (16) и заключить, что предельная функция $u_\epsilon(x,t)$ является решением вспомогательной задачи (14). Предельный переход в линейных членах равенства (14) очевиден, предельный переход в слагаемом, содержащем нелинейность, обеспечивается применением леммы 3 из работы /4/.

Затем устанавливаем, что существует последовательность $\epsilon_\nu \to 0$ такая, что $u_{\epsilon_\nu}(x,t)$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$ при $\epsilon_\nu \to 0$ почти всюду в области D. При этом используется методика, развитая в работах Лионса /6/ и Дубинского /4/.

Наконец, доказывается, что предельная функция $u(x,t)$ является обощенным решением исходной краевой задачи для параболического уравнения (1).

Литература

1. М.И.Вишик. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Мат.сб., т. 35/77/, №3 /1954/ ., 513–568.

2. М.И.Вишик. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Мат.сб.,т. 59/101/ (дополнительный) (1962), 289–325.

3. Ю.А.Дубинский. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений. Мат.сб., т.64/106/: 3 (1964), 458–480.

4. Ю.А.Дубинский. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Мат. сб., т. 67 (109): 4 (1965), 609–642.

5. М.Л.Краснов, Г.И.Макаренко, А.И.Киселев. О слабых решениях некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. I. Препринт ОИЯИ, 5–3398, Дубна, 1967.

6. J.L.Lions. Singular Pertubations and Some Non Linear Boundary Value Problems. MRC Technical Summary Report 421. October 1963.

С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, Ленинград, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1967 года.