ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5 - 3433

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Е.П. Жидков, Г.А. Ососков

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

1967.

P5 - 3433

Е.П. Жидков, Г.А. Ососков

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

Направлено в ДАН

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_a^b f(x, \xi, u(\xi))\, d\xi \tag{1}$$

в пространстве Липшица $C^{(L)}_{(a,b)}$, т.е. в подпространстве пространства $C_{(a,b)}$ непрерывных на отрезке (a,b) функций $u(x)$, удовлетворяющих дополнительно условию Липшица

$$|u(x_1) - u(x_2)| < L\,|x_1 - x_2|; \quad x_1, x_2 \in (a, b). \tag{2}$$

Обозначая через L_u нижнюю грань всех возможных констант Липшица в условии (2), введем норму в пространстве $C^{(L)}_{(a,b)}$ следующим образом

$$\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + L_u. \tag{3}$$

Решение нелинейных интегральных уравнений такого вида обычно проводится методом последовательных приближений /1/, что накладывает очень жесткие требования на ядро уравнения.

Появившиеся в последнее время методы решения нелинейных интегральных уравнений путем усреднения функциональных поправок /2/ достаточно эффективны, но также требуют наложения ограничений на константу Липшица и интегральные свойства функции $f(x, \xi, u)$ в (1).

В настоящей работе предлагается метод решения уравнений вида (1) путем введения непрерывного параметра, близкий по идее к работе /3/. Основным содержанием работы является следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Пусть внутри замкнутой области $D \subseteq C^{(L)}_{(a,b)}$ существует $u^*(x)$ – единственное решение уравнения (1). В случае неединственности решения предполагается, что D входит в область локализации решения, т.е. в область

$$z(x) \le u(x) \le Z(x), \quad z, Z \in C^{(L)}_{(a,b)},$$

внутри которой решение единственно.

Функция $f(x, \xi, u)$ в (1) предполагается непрерывной по совокупности переменных и дополнительно удовлетворяющей следующим условиям в области D:

а) дважды непрерывная дифференцируемость по u ;

б) условие Липшица по x как для $f(x, \xi, u)$, так и для $\dfrac{\partial f(x,\xi,u)}{\partial u}$.

Пусть для любого $\bar{u} \in D$ линейное уравнение

$$u(x) - \int_a^b f'_{\bar{u}}(x, \xi, \bar{u}(\xi))\, u(\xi)\, d\xi = 0 \tag{4}$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что для любой функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию

$$\| u_0(x) - u^*(x) \| < \epsilon , \tag{5}$$

система уравнений

$$v(x,t) = \int_a^b f'_u(x, \xi, u(\xi, t))\, v(\xi, t)\, d\xi + \int_a^b f(x, \xi, u(\xi, t))\, d\xi - u(x, t), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = v(\xi, t)$$

с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ имеет единственное решение в области D_1, и

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = u^*(t), \tag{7}$$

где $u^*(x)$ – решение уравнения (1), а D_1 – прямое произведение полуполосы $0 \le t < +\infty$ и области D .

Сходимость в соотношении (7) понимается в смысле метрики $C^{(L)}_{(a,b)}$.

Для доказательства теоремы I нам придется использовать некоторые понятия,относящиеся к банаховым пространствам.

Нетрудно проверить, что пространство $C^{(L)}_{(a,b)}$ с нормой (3) будет полным, линейным и нормированным, т.е. банаховым пространством, причем интегральный оператор

$$A u(x) = u(x) - \int_a^b f(x, \xi, u(\xi))\, d\xi \tag{8}$$

будет задавать отображение пространства $C^{(L)}_{(a,b)}$ в себя.

Задача о решении уравнения (1) может теперь рассматриваться как задача о решении операторного уравнения

$$A u = 0 . \tag{9}$$

Предположения теоремы 1 позволяют нам воспользоваться идеей работы /4/ о сведении поставленной задачи к исследованию в банаховом пространстве вопросов существования и поведения при $t \to \infty$ решения дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = -[A']^{-1} A u, \quad u(0) = u_0 , \tag{10}$$

являющегося непрерывным аналогом метода Ньютона.

Сформулируем общую теорему для банаховых пространств из работы /4/, который мы собираемся воспользоваться.

Теорема 2. Пусть уравнение (9) имеет единственное решение u^* в некоторой открытой области D произвольного банахова пространства U .

Предположим, что в D существуют $A'u$ и $A''u$ – первая и вторая производные Фреше оператора A – и $A''u$ ограничена в окрестность каждой точки $u \in D$.

Пусть далее существует обратный оператор $[A']^{-1}$, для которого в D выполнено неравенство

$$\| [A']^{-1} v \| \leq B . \tag{11}$$

Тогда в области D существует сфера S

$$\| u - u^* \| < \epsilon$$

такая, что для любого $u_0 \in S$ уравнение (10) имеет решение u_t в промежутке $0 \leq t < +\infty$ и

$$\lim_{t \to \infty} u = u^* .$$

Для доказательства теоремы 1 нам еще потребуется следующая

Лемма. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Обозначим через $A'_{\bar u}$ – производную Фреше оператора (8) по функции $\bar u$, принадлежащей замкнутой области D.

Тогда для всех $\| v \| < 1$ решения уравнения

$$A'_{\bar u} u = v \tag{12}$$

равномерно ограничены в D, т.е.

$$\| u \| < M . \tag{13}$$

Предварительно заметим, что, поскольку производная Фреше оператора (8) имеет вид (4), предположение теоремы 1 о тривиальности решения уравнения (4) обеспечивает существование и единственность решения уравнения (12), т.е. наличие единственного обратного оператора $[A'_{\bar u}]^{-1}$. Кроме того, в силу условий а) и б) теоремы 1 можно показать, что оператор $A'_{\bar u}$ переводит пространство $C^{(L)}_{(a,b)}$ в себя.

Доказательство леммы проведем от противного. Пусть (13) нарушено, т.е. для любого натурального N найдутся такие точки $\bar u_N \in D$ и v_N ($\| v_N \| \le 1$), что норма соответствующего решения уравнения (12) будет превышать N.

Перебирая натуральный ряд чисел, получим две последовательности точек

$$\{ \bar u_N \} \quad и \quad \{ v_N \} \quad (\bar u_N \in D , \| v_N \| \le 1 , N = 1, 2, \ldots) , \tag{14}$$

определяющих семейство операторов $A'_{\bar u_N}$ и соответствующую последовательность решений $\{ u_u \}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\| u_N \| > N \quad (N = 1, 2, \ldots) . \tag{15}$$

Все члены последовательности $\{ \bar u_N \}$ принадлежат области D, а для всех v_N выполняется неравенство $\| v_N \| \le 1$, т.е. обе последовательности являются равномерно ограниченными. Их равностепенная непрерывность следует из того, что члены обеих последовательностей принадлежат пространству $C^{(L)}_{(a,b)}$, т.е. удовлетворяют условию Липшица.

По теореме Арцелла из последовательностей (14) можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $\{\bar{u}_n\}$ и $\{v_n\}$. В силу замкнутости области D в ней найдется такая точка $\bar{u}$, что

$$\| \bar{u}_n - \bar{u} \| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Аналогично в силу компактности пространства $C^{(L)}_{(a,b)}$ найдется точка v_0 такая, что

$$\| v_n - v_0 \| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Рассмотрим последовательность производных Фреше, соответствующую последовательности $\{\bar{u}_n\}$, т.е. последовательность линейных операторов $\{A'_{\bar{u}_n}\}$. Для каждого из них по предположению существует обратный оператор $[A'_{\bar{u}_n}]^{-1}$, воздействуя которым на уравнение (12) мы, согласно (15), получим оценку снизу для его нормы:

$$n < \| u_n \| < \| [A'_{\bar{u}_n}]^{-1} \| \, \| v \| .$$

Поскольку $\| v_n \| \leq 1$ мы для любого n имеем

$$\| [A'_{\bar{u}_n}]^{-1} \| > n . \tag{16}$$

Последнее неравенство противоречит теореме 3 на стр. 157 работы /5/. Противоречие доказывает лемму.

<u>Доказательство теоремы 1.</u>

Предположения а) и б) теоремы 1 обеспечивают существование в области первой и второй производных Фреше оператора (8). Условие (4) обеспечивает существование единственного обратного оператора $[A'_{\bar{u}}]^{-1}$. Только что доказанная лемма означает выполнение неравенства (11).

Таким образом, удовлетворены все предпосылки теоремы 2, согласно которой существует решение уравнения (10), сходящееся к решению исходного уравнения (9). Для операторов вида (8) уравнение (10) записывается, как нетрудно проверить, в виде системы (6). Теорема 1 доказана.

Для решения системы (6) можно предложить следующую численную схему. Разобьем область $D_1(T)$: $a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T$ на n частей отрезками, проходящими параллельно оси x через точки с координатами $0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n = T$.

Задавшись начальным приближением $u(x,0)=u_0(x)$, удовлетворяющим условию (5) теоремы 1, мы можем определить $v(x,0)$ из линейного интегрального уравнения – первого уравнения системы (6)

$$v(x,0)=\int_a^b f'_u(x,\xi,u_0(\xi))\,v_0(\xi,0)\,d\xi+\int_a^b f(x,\xi,u_0(\xi))\,d\xi-u_0(\xi).$$

После этого разностный аналог второго уравнения системы (6) позволит нам определить функцию $u(x,r_1)$ на втором слое при $t=r_1$

$$u(x,r_1)=u_0(x)+r_1\,v(x,0).$$

Вообще, если функция $u(x,t)$ известна на слое $t=r_k$, можно для определения $v(x,r_k)$ решить любым известным методом линейное интегральное уравнение

$$v(x,r_k)=\int_a^b f'_u(x,\xi,u(\xi,r_k))\,v(\xi,r_k)\,d\xi+\int_a^b f(x,\xi,u(\xi,r_k))\,d\xi-u(x,r_k) \tag{17}$$

(это можно сделать, например, заменив интеграл в (17) на интегральную сумму и перейдя к линейной алгебраической системе).

После этого функция $u(x,r_{k+1})$ определяется на следующем слое $t=r_{k+1}$

$$u(x,r_{k+1})=u(x,r_k)+r_{k+1}\,v(x,r_k). \tag{18}$$

В изложенной численной схеме нетрудно увидеть реализацию метода ломаных Эйлера для операторного уравнения (9). Сходимость этого метода при $\Delta r=\max\limits_{1\le k\le n}|r_k-r_{k-1}|\to 0$ в банаховом пространстве известна (см., например, /4/).

Выбирая T достаточно большим, мы в соответствии с теоремой 1 должны получить стабилизацию функций $u(x,t)$ к решению исходного уравнения (1).

В качестве примера решалось нелинейное интегральное уравнение, взятое из работы /2/

$$y(x)=x-3\int_0^1 \xi\,y^2(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Уравнение имеет два решения

$$y(x) = x - 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Обычный итерационный метод здесь не дает сходимости ни к какому определенному пределу.

При решении вышеописанным методом системы (17,18), составленной для уравнения (19) достаточно быстро (3-5 шагов по t), была получена сходимость к точному решению уравнения (19), хотя в качестве начального приближения была взята существенно нелинейная функция

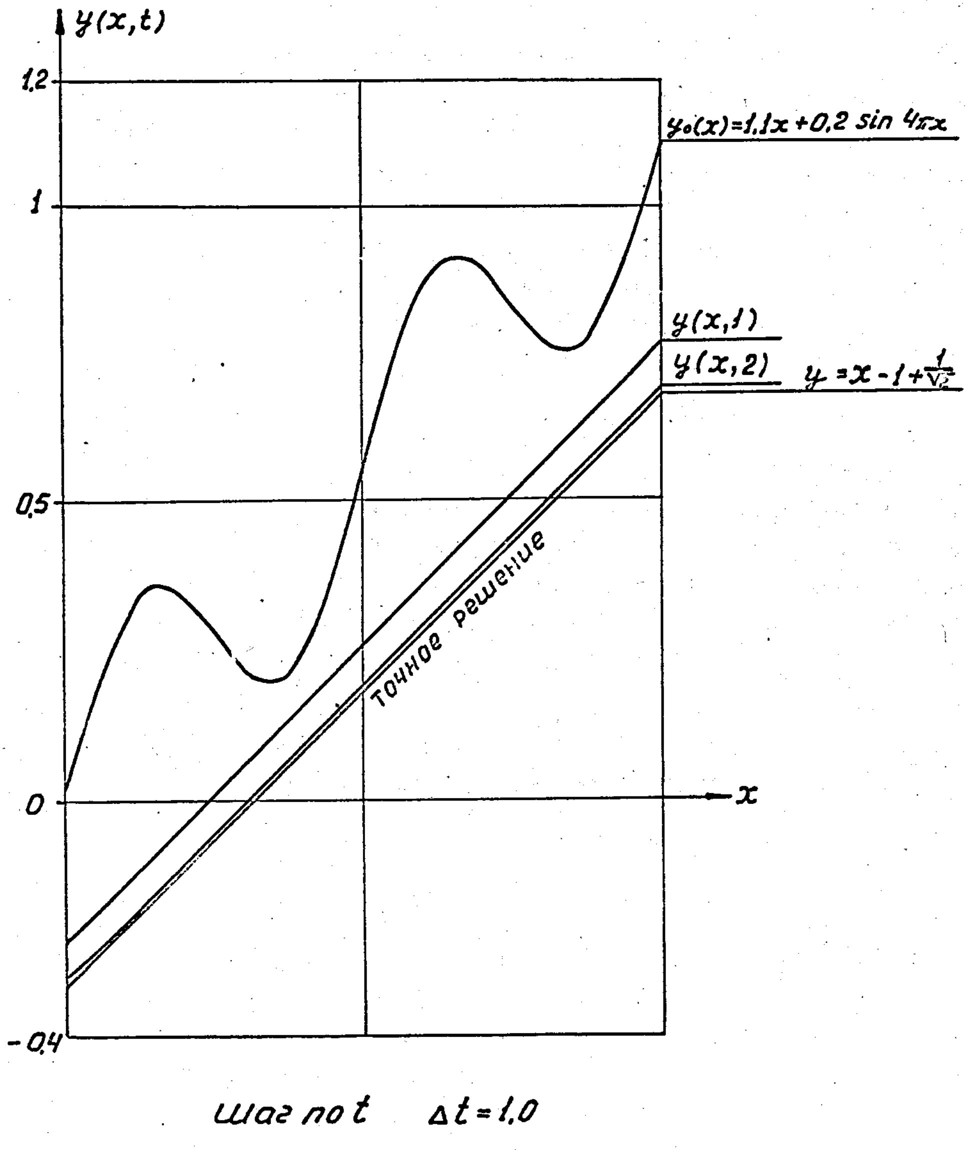
$$y_0(x) = a \sin 4\pi x + bx.$$

Результаты вычислений приведены на рисунках.

Литература

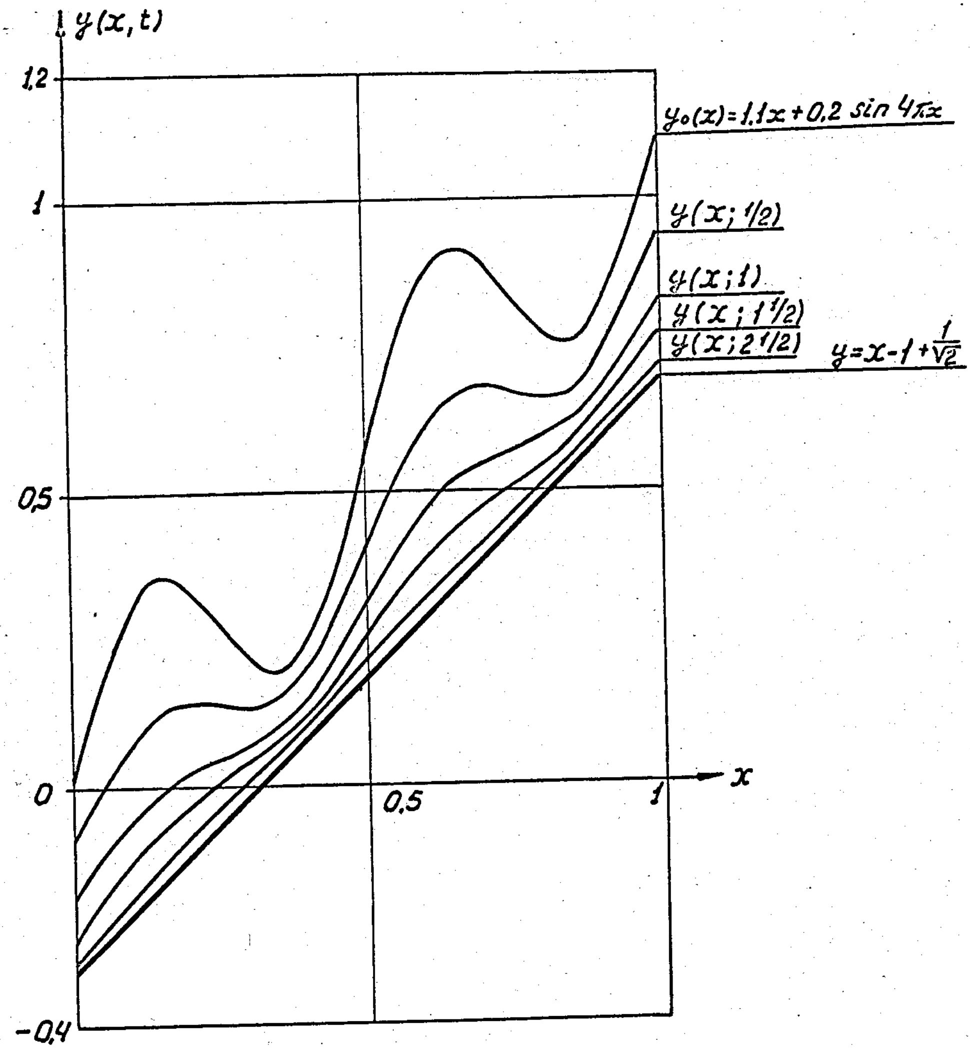
1. Ф. Трикоми. Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.
2. Ю.Д. Соколов. Метод осреднения функциональных поправок. Киев, 1967.
3. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. ДАН, 174, 2 (1967).
4. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Препринт ОИЯИ Р-3368, Дубна 1967.
5. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Элементы функционального анализа. М, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1967 г.



y(x,t)
1,2
1
0,5
0
-0,4
x
y₀(x)=1,1x+0,2 sin 4πx
y(x,1)
y(x,2)
y = x - 1 + 1/√2
точное решение
шаг по t Δt=1,0

Рис. 1.



Шаг по t $\Delta t = 0{,}5$

Рис. 2.