ДАН СССР, 1968, т.182, №5, с.1296-1299

11/IV.67

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3180

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Ш. Ходжаев

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ БОГОЛЮБОВА И ЭЛЕМЕНТЫ ПРИЧИННОЙ S - МАТРИЦЫ

1967 г.

P5 - 3180

Л.Ш. Ходжаев

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ БОГОЛЮБОВА И ЭЛЕМЕНТЫ ПРИЧИННОЙ S - МАТРИЦЫ

В предыдущей работе [1] мы дали функциональную формулировку аксиом Боголюбова с целью изучения причинной S -матричной теории [2,3] в рамках этой аксиоматики.

В настоящей работе мы введем в рассмотрение класс обобщенных функций Боголюбова и определим их важнейшие свойства, исходя из нашей аксиоматики. Обобщенные функции Боголюбова и их свойства полностью будут заменять эти аксиомы. Покажем, что для определения элементов причинной S -матрицы достаточно задать обобщенные функции Боголюбова.

§ 1. Обобщенные функции Боголюбова

Функции Боголюбова, которые мы будем еще называть $\mathfrak{B}$ -функциями, определим согласно

$$\mathfrak{B}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \langle 0 \mid T^{(n)}(x_1,\dots,x_n) \mid 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 \mid T(J(x_1)\dots J(x_n)) \mid 0 \rangle, \quad n = 1,2,\dots \qquad (1,1)$$

и установим их важнейшие свойства.

Свойства функции Боголюбова:

а) Функции Боголюбова являются обобщенными функциями умеренного роста, принадлежащими пространству $\mathcal{S}'(R^{4n})$, т.е. величины

$$\mathfrak{B}^{(n)}(f) = \int\dots\int d^4x_1\dots d^4x_n\, \mathfrak{B}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) f(x_1,\dots,x_n) = \langle 0 \mid T^{(n)}(f) \mid 0 \rangle, \quad n = 1,2,\dots \qquad (1,2)$$

для любой $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$ определяют линейные непрерывные функционалы в $\mathcal{S}(R^{4n})$, причем

$$\mathfrak{B}^{(1)}(f) = \langle 0 | J(f) | 0 \rangle = 0 \qquad (1,3)$$

для любой $f(x) \in \mathcal{S}(R^4)$.

Действительно, взяв вакуумные средние от (2,3)/1/ принимая во внимание (1,1), мы получим (1,2), которые согласно (2,4)/1/ определяют линейные непрерывные функционалы.

Соотношение (2,8)/1/ позволяет ввести в рассмотрение функции Боголюбова $\bar{\mathfrak{B}}^{(n)}(f)$, определяемые согласно

$$\bar{\mathfrak{B}}^{(n)}(f) = \mathfrak{B}^{(n)}(f^*)^* \qquad (1,4)$$

для любой $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$, где $f^*(x_1, \dots, x_n)$ – функция, комплексно сопряженная с $f(x_1, \dots, x_n)$.

в) Обобщенные $\mathfrak{B}$ – функции являются симметрическими, т.е.

$$\mathfrak{B}^{(n)}(F) = 0, \qquad (1,5)$$

где $\quad F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \qquad (1,6)$

для любой $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$.

Взяв вакуумные средние от равенства (2,12)/1/, мы получим (1,5).

с) Для обобщенных В-функций всегда существуют преобразования Фурье

$$\tilde{\mathfrak{B}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \, e^{i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \, \mathfrak{B}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \qquad (1,7)$$

$$n = 1, 2, \dots ,$$

т.е.

$$\tilde{\mathfrak{B}}^{(n)}(\tilde{f}) = \mathfrak{B}^{(n)}(f) \qquad (1,8)$$

для любой $\tilde{f}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\tilde{R}^{4n})$, где

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \dots \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n \, e^{i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \, \tilde{f}(p_1, \dots, p_n), \qquad (1,9)$$

причем $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$, где $\tilde{R}^{4n}$ – псевдоевклидово пространство n 4-импульсов $P_1, \dots, P_n$.

d) Обобщенные функции Боголюбова инвариантны относительно собственной группы Пуанкаре $P_+^{\uparrow}$ с элементами (a, Λ), где 4 – вектор a означает трансляции, а Λ – элемент собственной группы Лоренца $L_+^{\uparrow}$, т.е.

$$\mathfrak{B}^{(n)}(f) = \mathfrak{B}^{(n)}(f_{a,\lambda}) \qquad (1,10)$$

для любой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$, где $f_{(a,\Lambda)}(x_1, \dots, x_n) = f(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \dots, \Lambda^{-1}(x_n - a))$.

Действительно, взяв вакуумные средние от соотношения (3,1)/1/ и учитывая соотношение (5,5)/1/, т.е. $U^{-1}(a,\Lambda)|0\rangle = \langle 0| U(a,\Lambda)$, где $U(a,\Lambda)$ – унитарное преобразование группы Пуанкаре $P_+^{\uparrow}$ мы получим (1,10).

е) Теорема 1.1. Пусть причинные операторы $T^{(n)}(f)$, где $f \in \mathcal{S}(R^{4n})$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию причинности в форме Боголюбова. Тогда обобщенные $\mathfrak{B}$ – функции будут удовлетворять бесконечной системе зацепляющихся уравнений

$$\mathfrak{B}^{(m)}(f_1, \dots, f_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{n_i, \sum n_i = n\}} \frac{1}{n!} P(f_1, \dots, f_\nu \mid f_{\nu+1}, \dots, f_m) \times$$

$$\times \mathfrak{B}^{(n+\nu)}(f_1, \dots, f_\nu, g^{(n)}_{\{n_i\}}) \, \mathfrak{B}^{(n+m-\nu)}(g^{*(n)}_{\{n_i\}}, f_{\nu+1}, \dots, f_m) \qquad (1,11)$$

для любых $f_i(x_i) \in \mathcal{S}(R^4)$, $\quad i = \overline{1,n}$.

Здесь

$$g^{(n)}_{\{n_1, n_2, \dots\}}(y_1, \dots, y_n) = \sqrt{\frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots}} \, \frac{1}{n!} \sum_{P} (Pg)^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(y_1, \dots, y_n), \qquad (1,12)$$

где

$$g^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(y_1, \dots, y_n) = g_{\alpha_1}(y_1) \dots g_{\alpha_n}(y_n). \tag{1,13}$$

$\{ g_\alpha(y) \} \in \overset{\text{кг}}{\mathcal{S}}_{\text{кг}}(R^4)$ – полный набор нормированных решений уравнения Клейна-Гордона с положительными энергиями, которые имеют вид волнового пакета, т.е.

$$(\Box + \mu^2)\, g_\alpha(y) = 0\,, \tag{1,14}$$

$$g_\alpha(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p\, \theta(p)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, \tilde{g}_\alpha(p)\, e^{-ipy}\,, \tag{1,15}$$

причем $(g_\alpha, g_\beta) < \infty$, где $g_\alpha(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$.

Функции $g_\alpha(y)$ удовлетворяют условиям ортонормированности $(g_\alpha, g_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ и полноты

$$\sum_\alpha g_\alpha(y)\, g^*_\alpha(y') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p\; \theta(p)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, e^{-ip(y-y')}. \tag{1,16}$$

Символ $P(f_1, \dots, f_\nu \mid f_{\nu+1}, \dots, f_n)$ означает сумму по всем $n! \mid \nu!(n-\nu)!$ разбиениям совокупности функций $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n) \in \mathcal{S}(R^4)$ на две совокупности ν- и $n-\nu$ функций.

При этом перестановки внутри каждой совокупности не учитываются.

В формуле (1,12) суммирование производится по всем перестановкам $1, 2 \dots n$, чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, P –операция перестановки индексов у переменных $y_1, \dots, y_n$. Функции $g^{(n)}_{\{n_1, n_2, \dots\}}(y_1, \dots, y_n)$, определяемые (1,12), являются симметрическими по всем аргументам и образуют полную систему ортонормированных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Взяв вакуумные средние от равенств (4,21)[1], мы получим

$$\begin{aligned} \langle 0 | T^{(n)}(f_1, \dots, f_n) | 0 \rangle &= P(f_1, \dots, f_\nu \mid f_{\nu+1}, \dots, f_n) \times \\ &\times \langle 0 | T^{(n)}(f_1, \dots, f_\nu)\, T^{(n-\nu)}(f_{\nu+1}, \dots, f_n) | 0 \rangle . \end{aligned} \tag{1,17}$$

Левая часть (1.17), согласно (1,2), определяет обобщенную B-функцию, а правую часть мы разложим по полным системам состояний. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{(m)}(f_1, \dots, f_m) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{n_i, \sum_i n_i = n\}} \frac{1}{n!} P(f_1, \dots, f_\nu \mid f_{\nu+1}, \dots, f_m) \times \\ &\times \langle 0 | T^{(\nu)}(f_1, \dots, f_\nu) | \chi^{(n)}(\hat{g}^{(n)}_{\{n_i\}}) \rangle \langle \chi^{(n)}(\hat{g}^{*(n)}_{\{n_i\}}) | T^{(n-\nu)}(f_{\nu+1}, \dots, f_m) \times | 0 \rangle , \end{aligned} \tag{1,18}$$

где функции $\hat{g}^{(n)}_{\{n_i\}}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$ определяются согласно (5,9)[1]. Пользуясь коммутативными соотношениями (6,20) и (6,21)[1], мы получим

$$\begin{aligned} &\langle 0 | a(\hat{g}^*_{\alpha_1}) \dots a(\hat{g}^*_{\alpha_n}) | T^{(m-\nu)}(f_{\nu+1}, \dots, f_m) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \mathfrak{R}^{(m-\nu)}(g^*_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n}, f_{\nu+1}, \dots, f_m) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{1,19}$$

и

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T^{(\nu)}(f_1, \dots, f_\nu)\, a^+(\hat{g}_{\alpha_1}) \dots a^+(\hat{g}_{\alpha_n}) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \mathfrak{R}^{(n+\nu)}(g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n}, f_1, \dots, f_\nu) | 0 \rangle . \end{aligned} \tag{1,20}$$

Вычисляя правые части (1,19) и (1,20) при помощи формулы (4,21)[1], получим:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | a(g^*_{\alpha_1}) \dots a(g^*_{\alpha_n})\, T^{(m-\nu)}(f_{\nu+1}, \dots, f_m) | 0 \rangle = \\ &= (-i)^n \langle 0 | T^{(n+m-\nu)}(f_{\nu+1}, \dots, f_m, g^*_{\alpha_1}, \dots, g^*_{\alpha_n}) | 0 \rangle = \\ &= (-i)^n\, \mathfrak{B}^{(n+m-\nu)}(f_{\nu+1}, \dots, f_m, g^*_{\alpha_1}, \dots, g^*_{\alpha_n}), \end{aligned} \tag{1,21}$$

$$
\begin{aligned}
&< 0 \mid T^{(\nu)}(f_1, \dots, f_\nu)\, a^+(g_{\alpha_1}) \dots a^+(g_{\alpha_n}) \mid 0 > = \\
&= (-i)^n < 0 \mid T^{(n+\nu)}(f_1, \dots, f_\nu, g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n}) \mid 0 > = \\
&= (-i)^n\, \mathcal{F}^{(n+\nu)}(f_1, \dots, f_\nu, g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n}).
\end{aligned}
\tag{1,22}
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
&\mid \chi^{(n)}(\hat{g}^{(n)}) > = \\
&= \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}}\ \frac{1}{n!} \sum_P \mid \chi^{(n)}(\mathcal{P} \hat{g})^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} > = \\
&= \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2!}}\ \frac{1}{n!} \sum_P \mid \chi^{(n)}(\mathcal{P} \{ \hat{g}_{\alpha_1} \dots \hat{g}_{\alpha_n} \}) >,
\end{aligned}
\tag{1,23}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mid \chi^{(n)} \{ \hat{g}_{\alpha_1} \dots \hat{g}_{\alpha_n} \} > = \\
&= A^+(\hat{g}_{\alpha_1} \dots \hat{g}_{\alpha_n}) \mid 0 > = a^+(\hat{g}_{\alpha_1}) \dots a^+(\hat{g}_{\alpha_n}) \mid 0 >,
\end{aligned}
\tag{1,24}
$$

то, принимая во внимание эти замечания, мы на основании соотношения (1,18), (1,21) и (1,22) получим доказательство нашей теоремы.

Т е о р е м а 1.2. Пусть a -произвольный пространственноподобный 4-вектор, а $\lambda > 0$. Тогда обобщенные функции Боголюбова удовлетворяют пространственным свойством разложения по пучкам, т.е.

$$
\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{F}^{(m+n+r+s)}(f g_{\lambda a}) = \mathcal{F}^{(m+n)}(f)\, \mathcal{F}^{(r+s)}(g) \tag{1,25}
$$

для любых функций $f \in \mathcal{S}(R^{4(m+n)})$ и $g \in \mathcal{S}(R^{4(r+s)})$.

Доказательство этой теоремы дано в работах [4,5].

§ 2. Матричные элементы S-матрицы

В настоящем параграфе мы покажем, что элементы причинной S -матрицы могут быть выражены через обобщенные функции Боголюбова. В нашей аксиоматике [1] предполагается, что элементы S -матрицы, соответствующие n -бесспиновым частицам массы $\mu > 0$ с импульсами $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ и энергиями $p_1^0 = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + \mu^2}, \dots, p_n^0 = \sqrt{\vec{p}_n^{\,2} + \mu^2}$ в начальном состоянии и m -бесспиновым частицам массы $\mu > 0$ с импульсами $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ и энергиями $q_1^0 = \sqrt{\vec{q}_1^{\,2} + \mu^2}, \dots, q_m^0 = \sqrt{\vec{q}_m^{\,2} + \mu^2}$ в конечном состоянии, являются обобщенными функциями, принадлежащими пространству $\mathcal{S}'(\bar{\Omega}^+_{m+n})$ (см. аксиому VII работы [1]).

Пользуясь коммутативными соотношениями (7,8) и (7,9), а также соотношениями (7,12), мы можем свести матричные элементы (7,1) к вакуумным средним от радиационных операторнозначных обобщенных функций $H^{(m+n)} \in \mathcal{S}^{KГ}(R^{4(m+n)})$, согласно

$$
\begin{aligned}
&S_{mn}(\hat{g}_1^*, \dots, \hat{g}_m^*, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n) = \\
&= < 0 \mid H^{(m+n)}(\overset{*}{g}_1, \dots, \overset{*}{g}_m, f_1, \dots, f_n) \mid 0 >
\end{aligned}
\tag{2,1}
$$

для любых $f_s(q_s) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, $s = \overline{1,n}$ и $g_r(p_r) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, $r = \overline{1,m}$, характеризующих волновые функции частиц соответственно в начальном и конечном состояниях. В формуле (2,1) функции

$$
f_s(y_s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 q_s\, \theta(q_s^0)\, \delta(q_s^2 - \mu^2)\, e^{i q_s y_s} \hat{f}_s(q_s), \quad s = \overline{1,n} \tag{2,2}
$$

$$
\overset{*}{g}_r(x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p_r\, \theta(p_r^0)\, \delta(p_r^2 - \mu^2)\, e^{-i p_r x_r} \hat{g}_r^*(p_r) \quad r = \overline{1,m} \tag{2,3}
$$

являются гладкими решениями уравнения Клейна-Гордана с положительными энергиями и, следовательно, принадлежат пространству $\mathcal{S}^{КГ}(R^4)$.

Так как согласно аксиоме YП элементы S-матрицы являются обобщенными функциями, принадлежащими пространству $\mathcal{S}'(\bar{\Omega}^+_{m+n})$, то и правая часть (2,1) будет обобщенными функциями, принадлежащими пространству $\mathcal{S}'(R^{4(m+n)})$. Таким образом, аксиома YП обеспечивает существование вакуумных средних радиационных операторнозначных обобщенных функций.

На основании ядерной теоремы /6/ мы можем (2,1) преобразовать следующим образом:

$$S_{mn}(\hat{g}^*, \hat{f}^{(n)}) = \langle 0 | H^{(m+n)}(\overset{*}{g}{}^{(m)}, f^{(n)}) | 0 \rangle \qquad (2,4)$$

для любых $\hat{f}^{(n)}(q_1,\dots,q_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Gamma}^+_n)$ и $\hat{g}^{*(n)}(p_1,\dots,p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_m)$,

характеризующих волновые функции частиц соответственно в начальных и конечных состояниях, причем функции $f^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$ и $g^{(m)}(y_1,\dots,y_m)$ определяются согласно

$$f^{(n)}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int\dots\int \left(\prod_{s=1}^{n} d^4 q_s\, \theta(q_s^0)\, \delta(p_s^2 - \mu^2)\right) e^{i\sum_{j=1}^{n} q_s y_s} \hat{f}^{(n)}(q_1,\dots,q_n), \qquad (2,5)$$

где

$$q_s^0 = +\sqrt{\vec{q}_s^{\,2} + \mu^2}, \quad s = \overline{1,n},$$

и

$$\overset{*}{g}{}^{(m)}(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3m}{2}}} \int\dots\int \left(\prod_{r=1}^{m} d^4 p\; \theta(p_r^0)\, \delta(p_r^0 - \mu^2)\right) e^{-i\sum_{r=1}^{m} p_r x_r} \hat{g}^{*(m)}(p_1,\dots,p_m), \qquad (2,6)$$

$$p_r^0 = +\sqrt{\vec{p}_r^{\,2} + \mu^2}, \quad r = \overline{1,m},$$

и принадлежащих соответственно пространству $\mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$ и $\mathcal{S}^{КГ}(R^{4m})$

(см. Приложение)

Заметим, что при выводе соотношения (2,4) мы полагали, что носители функции $\hat{f}^{(n)}(q_1,\dots,q_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Gamma}^+_n)$ и $\hat{g}^{(m)}(p_1,\dots,p_m) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_m)$ взаимно не пересекаются.

Теперь установим связь между радиационными и причинными операторами.

Т е о р е м а 3.1. Пусть заданы причинные операторнозначные обобщенные функции $T^{(n)}(f)$, $f \in \mathcal{S}(R^{4n})$, $n = 1,2,\dots$, удовлетворяющие следующим условиям:

1°) условию причинности, т.е.

$$(D_f\, T)^{(n)}(g^{(n)}) = \mathcal{P}^{(n+1)}(f, g^{(n)}) = 0$$

для любых $f(x) \in \mathcal{S}(R^4)$ и $g^{(n)}(y_1,\dots,y_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$ (2.7)

с причиннонезависимыми носителями, другими словами, условию

$$f(x)\, g^{(n)}(y_1,\dots,y_n) = 0 \qquad (2,8)$$

при

$$(x^0 - y_j^0) \geq 0 \text{ и } (x - y_j)^2 \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (2,9)$$

2°) продолжаемые на пространство $\mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$, т.е. величины $T^{(n)}(f)$ для $f \in \mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$, $n = 1,2,\dots$, определяют линейные операторы в $D \subset H$, причем характеризующие эти операторы матричные элементы

$$(\Phi, T^{(n)}(f)\Psi) \in \mathcal{S}'^{КГ}(R^{4n}), \quad n = 1,2,\dots \qquad (2,10)$$

для $\Phi, \Psi \in D$. Продолжение операторов $T^{(n)}(f)$ из пространства $\mathcal{S}(R^{4n})$ в пространство $\mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$ определяются согласно

$$T^{(n)}(f) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \tilde{T}^{(n)}(\hat{f}) \qquad (2,11)$$

для любой $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$, представляемой в виде

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int\dots\int \left(\prod_{j=1}^{n} d^4 p_j\, \theta(p_j)\, \delta(p_j^2 - \mu^2)\right) e^{-i\sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \hat{f}(p_1,\dots,p_n), \qquad (2.12)$$

где $\hat{f}(p_1,\dots,p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Gamma}^+_n)$, через $\tilde{T}^{(n)}$ обозначено преобразование Фурье оператора $T^{(n)}$ $\mathcal{S}'(R^{4n})$, т.е.

$$\tilde{T}^{(n)}(\tilde{h}) = T^{(n)}(h) \qquad (2,13)$$

для любой $\tilde{h}(p_1,\dots,p_n) \in \mathcal{S}(\tilde{R}^{4n})$, где

$$h(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\dots\int d^4p_1\dots d^4p_n\, e^{i\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}\, \tilde{h}(p_1,\dots,p_n), \quad (2,14)$$

$h(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$, $\tilde{R}^{4n}$ –псевдоевклидово пространство n 4 – импульсов $p_1,\dots,p_n$.

Тогда существуют радиационные операторнозначные обобщенные функции $H^{(n)}(f)$, $f \in \mathcal{S}^{\text{кг}}(R^{4n})$, $n = 1,2,\dots$, определенные в $\mathfrak{F}$ и представленные в виде

$$H^{(n)}(f) = (-i)^n\, T^{(n)}(f) \qquad (2,15)$$

для любой $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}^{\text{кг}}(R^{4n})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы сначала докажем, что

$$H^{(n)}(f_1,\dots,f_n) = (-i)\quad T^{(n)}(f_1,\dots,f_n) = (-i)^n\, J(f_{\alpha_1})\dots J(f_{\alpha_n}) \qquad (2,16)$$

для любой $f_i(x_i) \in \mathcal{S}^{\text{кг}}(R^4), i = \overline{1,n}$, удовлетворяющей условию

$$f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) f_{\alpha_j}(x_{\alpha_j}) = 0 . \qquad (2,17)$$

при

$$x^0_{\alpha_i} < x^0_{\alpha_j} \text{ и } (x_{\alpha_i} - x_{\alpha_j})^2 \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n . \qquad (2,18)$$

При этом продолжение оператора тока $J(f)$ из пространства $\mathcal{S}(R^4)$ в $\mathcal{S}^{\text{кг}}(R^4)$ определяется согласно

$$J(f) = \sqrt{2\pi}\ \tilde{J}(\hat{f}) = \sqrt{2\pi} \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, \hat{f}(p)\, \tilde{J}(p) \qquad (2,19)$$

для любой $f(x) \in \mathcal{S}^{\text{кг}}(R^4)$, представляемой в виде

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4p\, \theta(p)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, e^{-ipx}\, \hat{f}(p), \qquad (2,20)$$

где $\hat{f}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, где $\tilde{J}$ – преобразование Фурье оператора тока J, определяемое (2,11).

Пусть соотношение (2,14) верно до $n \leq N$. Так как

$$T^{(N)}(f_1,\dots,f_N) = i^N H^{(N)}(f_1,\dots,f_N) =$$

$$= i^N (D_{f_1}\dots D_{f_N} S) S^+, \quad \text{то}$$

$$(D_{f_{N+1}} T)^{(N)}(f_1,\dots,f_N) = i^N \{(D_{f_1}\dots D_{f_{N+1}} S) S^+ + (D_{f_1}\dots D_{f_N} S)(D_{f_{N+1}} S)\} =$$

$$= i^N H^{(N+1)}(f_1,\dots,f_{N+1}) - (-i)^{N+1}\ T^{(N)}(f_1,\dots,f_N) J(f_{N+1}) =$$

$$= i^N H^{(N+1)}(f_1,\dots,f_{N+1}) + i\, T^{(N)}(f_1,\dots,f_N)\, J(f_{N+1}) .$$

Отсюда

$$H^{(N+1)}(f_1,\dots,f_{N+1}) = (-i)^{N+1}\ T^{(N)}(f_1,\dots,f_N)\, J(f_{N+1}) +$$
$$+ (-i)^N (D_{f_{N+1}} T)^{(N)}(f_1,\dots,f_N) . \qquad (2,21)$$

В силу симметричности радиационных операторов (см.(7,8)) /1/ мы (2,19) можем представить еще в виде

$$H^{(N+1)}(f_1,\dots,f_{N+1}) = (-i)^{N+1}\ T^{(N)}(f_1,\dots,f_{j-1}, f_{N+1}, f_{j+1},\dots,f_N)\, J(f_j) +$$

$$+ (-i)^N (D_{f_j} T)^{(N)}(f_1,\dots,f_{j-1}, f_{N+1}, f_{j+1},\dots,f_N) . \qquad (2.22)$$

В силу условия причинности (2,5) мы имеем

$$(D_{f_{N+1}} T)^{(N)}(f_1,\dots,f_N) = \mathfrak{R}^{(N+1)}(f_1,\dots,f_{N+1}) = 0 \qquad (2,23)$$

для любых $f_i(x_i) \in \mathcal{S}^{\text{кг}}(R^4)$, $i = \overline{1,N+1}$, удовлетворяющих условию

$$f_{N+1}(x_{N+1}) f_j(x_j) = 0 \qquad (2,24)$$

при

$$(x^0_{N+1} - x^0_j) \geq 0 \qquad \text{и} \ (x_{N+1} - x_j)^2 \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \qquad (2,25)$$

Аналогично

$$(D_{f_j} T)^{(N)} (f_1, ..., f_{j-1}, f_{N+1}, f_{j+1}, ..., f_N) =$$

$$\mathfrak{R}^{(N+1)} (f_j, f_1, ..., f_{j-1}, f_{N+1}, f_{j+1}, ..., f_N) = 0 \qquad (2,26)$$

для $f_i(x_i) \in \mathcal{S}^{КГ}(R^4)$, $i = \overline{1, N+1}$, удовлетворяющих условию

$$f_j(x_j) f_{N+1}(x_{N+1}) = 0 \qquad (2,27)$$

$$(x^0_j - x^0_{N+1}) \geq 0 \quad \text{и} \ (x_{N+1} - x_j)^2 \geq 0, \quad j = \overline{1,N}. \qquad (2,28)$$

Пользуясь свойствами (2,23) и (2,26), мы из (2,21) и (2,22) получим

$$H^{(N+1)}(f_1, ..., f_{N+1}) =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{N+1} T^{(N)}(f_1, ..., f_N) J(f_{N+1}), \quad \text{если} \quad f_{N+1}(x_{N+1}) f_j(x_j) = 0 \\ \text{при} \quad (x^0_{N+1} - x^0_j) \geq 0 \quad \text{и} \quad (x_{N+1} - x_j)^2 \geq 0, \quad j = \overline{1,N}, \\ = (-1)^{N+1} T^{(N)}(f_1, ..., f_{j-1}, f_{N+1}, f_{j+1}, ..., f_N) J(f_j), \\ \text{если} \quad f_j(x_j) f_{N+1}(x_{N+1}) = 0 \\ \text{при} \quad (x^0_j - x^0_{N+1}) \geq 0 \quad \text{и} \quad (x_j - x_{N+1})^2 \geq 0, \\ \qquad j = \overline{1,N}. \end{cases} \qquad (2,29)$$

Равенство (2,29) означает, что

$$H^{(N+1)}(f_1, ..., f_{N+1}) = (-1)^{N+1} T^{(N+1)}(f_1, ..., f_{N+1}) \qquad (2,30)$$

для любой функции $f_{N+1}(x_{N+1}) \in \mathcal{S}^{КГ}(R^4)$, удовлетворяющей условию (2,27). Таким образом, справедливость соотношения (2,16) доказана. Из ядерной теоремы /6/ следует доказательство теоремы 3.1.

Теперь, принимая во внимание определение функции Боголюбова, мы из соотношения (2,1) и (2,15) получаем

$$S_{mn}(\hat{g}^{*(m)}, \hat{f}^{(n)}) = (-1)^{m+n} \mathfrak{B}^{(m+n)}(g^{*(m)}, f^{(n)}) \qquad (2,31)$$

для любой $\hat{f}^{(n)}(q_1, ..., q_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$ и $\hat{g}^{(m)}(p_1, ..., p_m) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_m)$,

где $f^{(n)}(y_1, ..., y_n) \in \mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$ и $g^{(m)}(x_1, ..., x_m) \in \mathcal{S}^{КГ}(R^{4m})$,

определяются согласно (2.5) и (2,6). Таким образом, матричные элементы S -матрицы в классе обобщенных функций определяются через обобщенные функции Боголюбова согласно (2,31).

Пользуясь случаем, я хочу выразить мою глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.Н. Тавхелидзе, И. Бялыницкому-Бируле, А.В. Ефремову, А.Ульману и Э. Капусцику за полезные обсуждения и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Пространство функций Клейна-Гордана (КГ)

Введем в рассмотрение пространство $\mathcal{S}^{КГ}(R^{4n})$ функций от n 4 -векторов x^μ_j, $\mu = \overline{0,3}$, $j = \overline{1,n}$, определенных во всем псевдоевклидовом пространстве R^{4n}, неограниченно дифференцируемых и обращающихся в нуль на бесконечности быстрее любой степени $|\vec{x}|$, т.е.

$$|(P(\vec{x}; \vec{\partial}) f)(x_1, ..., x_n)| = \frac{C}{r^N} \qquad (1)$$

для всех целых N, $C = \text{const}$, $r = \sqrt{\vec{x}^2_1 + .. \vec{x}^2_n}$ и для любых значений $x^0_1, ..., x^0_n$. Эти функции представлены в виде:

$$f(x_1, .., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int ... \int \left(\prod_{j=1}^{n} d^4 p_j \theta(p^0_j) \delta(p^2_j - \mu^2)\right) e^{-i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \hat{f}(p_1, ..., p_n) \qquad (2)$$

где $\hat{f}(p_1, ..., p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$.

Функция $f(x_1,..,x_n)\in \mathcal{S}^{\text{кг}}(R^{4n})$ удовлетворяет итерированному уравнению Клейна-Гордана

$$(k_{x_1}k_{x_2}\dots k_{x_n}f)(x_1,x_2,\dots,x_n)=0, \qquad (3)$$

где $k_{x_i}=\Box_{x_i}+\mu^2$, $i=\overline{1,n}$.

Топология в $\mathcal{S}^{\text{кг}}(R^{4n})$ определяется аналогично в $\mathcal{S}(R^{4n})$.

Заметим, что функции $f(x_1,x_2,..,x_n)$ из пространства $\mathcal{S}^{\text{кг}}(R^{4n})$ недостаточно быстро убывают на бесконечности по временным компонентам $x_1^0, x_2^0,\dots, x_n^0$ 4-векторов $x_1,x_2,\dots,x_n$, и следовательно, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\bar{\in}\mathcal{S}(R^{4n})$.

Литература

1. Л.Ш. Ходжаев. Функциональная формулировка аксиом Боголюбова, определяющих причинную S-матричную теорию. Препринт ОИЯИ, Р5-3179, Дубна, 1967.
2. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., ГИТТЛ, 1957.
3. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., ГИФМЛ, 1958.
4. Л.Ш. Хождаев. О свойствах разложения по пучкам причинной S-матрицы. Препринт ОИЯИ, Р-2760, Дубна, 1966.
5. Л.Ш. Ходжаев. ДАН СССР, 173, № 4 (1967).
6. L. Schwartz. Theorie des distributions, v.I-II, Paris, Hermann, 1950-51.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1967 г.