ДАН СССР, 1968, т. 182, N5, с. 1032–1035

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3179

Л.Ш. Ходжаев

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА АКСИОМ БОГОЛЮБОВА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРИЧИННУЮ S - МАТРИЧНУЮ ТЕОРИЮ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

P5 - 3179

Л.Ш. Ходжаев

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА АКСИОМ БОГОЛЮБОВА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРИЧИННУЮ S - МАТРИЧНУЮ ТЕОРИЮ

Введение

Как известно, в настоящее время развитие квантовой теории поля идет по пути ее аксиоматизации [1-9]. Сюда относится, например, аксиоматическая формулировка квантовой теории поля, предложенная Вайтманом [2], согласно которой теория поля определяется при помощи гейзенберговских операторов поля $A(x)$, рассматриваемых как операторнозначные обобщенные функции и их обычные произведения $A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)$. Основным математическим орудием исследования в этом подходе являются обобщенные функции Вайтмана:

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | A(x_1) A(x_2) \dots A(x_n) | 0 \rangle, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которые являются вакуумными средними от обычного произведения операторов поля в представлении Гейзенберга.

Важным подходом к аксиоматическому построению квантовой теории поля является формулировка Боголюбова [3,4], положенная в основу доказательства дисперсионных соотношений [4].

Мы стремимся установить связь между квантовой теорией поля в формулировках Вайтмана и Боголюбова.

Имея это в виду, в настоящей работе мы дадим функциональную формулировку аксиом Боголюбова, определяющих причинную S -матричную теорию. Для простоты ограничиваемся одним самодействующим вещественным скалярным полем.

В качестве основных физических величин в аксиоматическом подходе Боголюбова мы примем класс так называемых причинных операторов, определяемых в виде хронологического произведения эрмитовых гейзенберговских операторов тока $J(x)$, т.е.

$$T^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(J(x_1)J(x_2)\dots J(x_n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

и рассматриваемых как операторнозначные обобщенные функции. Эти операторы являются симметрическими, ковариантными, удовлетворяющими условию причинности в форме Боголюбова и могут быть факторизованы. Для формулировки условия причинности мы введем в рассмотрение так называнмую $D(x)$-операцию, линейную и перестановочную, преобразующую причинные операторы в запаздывающие и обладающую всеми свойствами обычной операции дифференцирования.

В данном аксиоматическом подходе в качестве основного математического орудия будет служить класс обобщенных функций Боголюбова:

$$B^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 9 | T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) | 0 \rangle = \langle 0 | T(J(x_1)\dots J(x_n)) | 0 \rangle, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которые являются вакуумными средними от причинных операторов.

Аксиомы

Известно, что нет никакого критерия, позволяющего сформулировать непротиворечивую или нетривиальную, полную и независимую систему аксиом. Они обычно берутся из хорошо известной квантовой теории поля.

Аксиомы Боголюбова охватывают не только те свойства, которыми обладают операторы свободных полей, но и некоторые общие и локальные свойства, отражающие физические принципы и функциональные структуры величин.

Мы приведем ниже систему этих аксиом.

I. Гильбертово пространство

Асимптотическим состояниям системы, представляющей собой совокупность некоторого числа бесконечно удаленных друг от друга частиц, соответствуют векторы сепарабельного пространства H.

Для практических целей представляют особый интерес плотные изоморфные подпространства $D_{\mathcal{S}}$ и D_Z пространства Гильберта H.

Приведем построение этих пространств.

Пространство $D_{\mathcal{S}}$, которое представлено в виде

$$D_{\mathcal{S}} = \mathop{+}_{n=0}^{\infty} D^{(n)}_{\mathcal{S}(\bar{\Omega}_n^+)}, \tag{1.1}$$

является ядерным /10/ пространством и состоит из векторов

$$\hat{f} = \{\hat{f}^{(0)}, \hat{f}^{(1)}(p_1), \dots, \hat{f}^{(n)}(p_1, \dots, p_n), \dots\}_0^\infty = \{\hat{f}^{(n)}(p)_n\}_0^\infty, \tag{1.2}$$

компоненты которых принадлежат подпространству $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_n^+) \subset \mathcal{S}(\tilde{\bar{R}}^{3n})$ основных функций, определенных в области $\bar{\Omega}_n^+ = \bar{\Omega}_{1,\mu}^+ \times \dots \times \bar{\Omega}_{n,\mu}^+$, где $\bar{\Omega}_{i,\mu}^+$ – область $\{p_i \mid p_i^2 = (p_i^0)^2 - (\vec{p}_i)^2 = \mu^2,\ p_i^0 > 0\}$, $i = \overline{1, n}$, неограниченно дифференцируемых, медленно убывающихся на бесконечности, симметрических и $\hat{f}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = 0$ для всех $n \geq N_0$, где N_0 – некоторое постоянное число. Нулевая компонента $\hat{f}^{(0)}$ вектора $\hat{f} \in D_{\mathcal{S}}$ есть комплексное число. $\tilde{\bar{R}}^{3n}$ обозначает эвклидовое пространство n 3 – импульсов $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$.

Пространство $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_n^+)$ можно интепретировать как пространство волновых функций n -частиц массы $\mu > 0$ с импульсами $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ и энергиями $p_1^0 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + \mu^2}, \dots, p_n^0 = \sqrt{\vec{p}_n^2 + \mu^2}$.

Пространство $D_{\mathcal{S}}$ является топологическим. Говорят, что последовательность векторов $\hat{f}_k \in D_{\mathcal{S}}$ сходится к нулю в $D_{\mathcal{S}}$, если 1) их компоненты $\hat{f}_k^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \to 0$ для всех n в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_n^+)$ и 2) компоненты $\hat{f}_k^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = 0$ для всех $n \geq N_0$ независимо от K.

В $D_{\mathcal{S}}$ скалярное произведение определяется согласно

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \hat{f}^{(0)}\hat{g}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int \Big(\prod_{j=1}^{n} d^4 p_j\, \Theta(p_j^0)\, \delta(p_j^2 - \mu^2)\Big) \hat{f}^{(n)*}(p_1, \dots, p_n)\, \hat{g}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \tag{1.3}$$

Амплитуду произвольного состояния можно задавать при помощи вектора

$$|\psi(\hat{f})\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi^{(n)}(\hat{f}^{(n)})\rangle, \tag{1.4}$$

где $|\psi^{(n)}(\hat{f}^{(n)})\rangle$ – вектор состояния системы n -невзаимодействующих частиц массы $\mu > 0$ с импульсами $p_1, p_2, \dots, p_n$ и энергиями $p_1^0 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + \mu^2}, \dots, p_n = \sqrt{\vec{p}_n^2 + \mu^2}$, где $f^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}_n^+)$ – волновая функция системы частиц в импульсном пространстве.

Обозначим через D_Z изоморфное с $D_{\mathcal{S}}$ плстное подпространство Гильберта H, состоящее из векторов $|\psi(\hat{f})\rangle$, определяемых согласно (1.4), и зависящих от $\hat{f} \in D_{\mathcal{S}}$ линейно, непрерывно и изометрично.

Под пространством D мы будем впредь подразумевать одно из подпространств D_S и D_Z.

Подпространство $D \subset H$ будет служить в дальнейшем как область определения и непрерывности операторов, рассматриваемых в аксиоматике.

II. Причинные операторы

Причиные операторы

$$T^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = T(J(x_1) \ldots J(x_n)), \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{2.1}$$

где $J(x)$ – эрмитов оператор тока, т.е.

$$J^{+}(x) = J(x), \tag{2.2}$$

являются операторнозначными обобщенными функциями, т.е. каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(R^{4n})$ приписываются линейные операторы

$$T^{(n)}(f) = \int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \, f(x_1, \ldots, x_n) \, T^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \tag{2.3}$$

$$= \int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \, f(x_1, \ldots, x_n) \, T(J(x_1) \ldots J(x_n))$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

определенные в D, плотной в H, причем характеризующие эти операторы матричные элементы

$$(\phi, T^{(n)}(f) \psi) \subset S'(R^{4n}) \tag{2.4}$$

по двум состояниям $\Phi, \Psi \in D \subset H$, т.е. являются линейными непрерывными функционалами в $S(R^{4n})$.

Заметим, что причинный оператор 1-го порядка есть эрмитов оператор тока $J(x)$, т.е.

$$T^{(1)}(x) = J(x).$$

Эрмитовость оператора тока $J(x)$ означает, что

$$J(f)^* = J(f^*) \tag{2.5}$$

для любой $f(x) \in S(R^4)$, где $f^*(x)$ – функция, комплексно-сопряженная с $f(x)$.

Будем считать, что

$$T^{(n)}(f) D \subset D \tag{2.6}$$

для $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(R^{4n})$.

Через $S(R^{4n})$ обозначено пространство функций от n 4-векторов x_j^{μ}, $\mu = 0,1,2,3$, $j = 1,2,\ldots, n$, неограниченно дифференцируемых и стремящихся к нулю при $|x_j^{\mu}| \to \infty$ быстрее, чем любой степени $|x_j^{\mu}|$.

В частности, из определения (2.3) следует

$$T^{(n)}(f_1, f_2, \ldots, f_n) = J(f_{\alpha_1}) J(f_{\alpha_2}) \ldots J(f_{\alpha_n}) \tag{2.4}$$

для любых $f_i(x_i) \in S(R^4), i = \overline{1,n}$, удовлетворяющих условию

$$f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) f_{\alpha_j}(x_{\alpha_j}) = 0, \tag{2.5}$$

при

$$x^0_{\alpha_i} < x^0_{\alpha_j} \qquad (x_{\alpha_i} - x_{\alpha_j})^2 \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \tag{2.6}$$

Нам понадобится также понятие антипричинных операторов, которые мы обозначим через

$$\bar{T}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{T}(J(x_1) \ldots J(x_n)), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

и определим их как оператороэначные обобщенные функции согласно

$$\bar{T}^{(n)}(f) = T^{(n)}(f^*)^* \tag{2.8}$$

для любой $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(R^{4n})$, где $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ функция, комплексно-сопряженная с $f(x_1, \ldots, x_n)$.

В частности,

$$\bar{T}^{(n)}(f_1, \ldots, f_n) = J(f_{\alpha_1}) \ldots J(f_{\alpha_n}) \tag{2.9}$$

для любых $f_i(x_i) \in S(R^4)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющих условию

$$f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) f_{\alpha_j}(x_{\alpha_j}) = 0 \tag{2.10}$$

при

$$x^0_{\alpha_i} > x^0_{\alpha_j}, \quad 1 \leq i < j \leq n \tag{2.11}$$

Отметим свойства причинных операторов.

Причинные операторы являются симметрическими, т.е.

$$T^{(n)}(F) = 0, \tag{2.12}$$

где

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \tag{2.13}$$

для любой функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n}).$$

Причинные операторы всегда имеют преобразования Фурье:

$$\tilde{T}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_4 \, e^{i\sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \, T^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.14}$$

т.е.

$$\tilde{T}^{(n)}(\tilde{f}) = T^{(n)}(f) \tag{2.15}$$

для любой $\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{S}(\tilde{R}^{4n})$, где

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \ldots \int d^4p_1 \ldots d^4p_n \, e^{i\sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \, \tilde{f}(p_1, \ldots, p_n), \tag{2.16}$$

причем $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$, где $\tilde{\tilde{R}}^{4n}$ – псевдоэвклидово пространство n 4-импульсов $p_1, \ldots, p_n$.

III. Пуанкаре-инвариантность

К каждому преобразованию (a, Λ) собственной группы Пуанкаре P_+ соответствует унитарное представление $U(a, \Lambda)$ H, где 4-вектор a означает трансляцию, а Λ – преобразование собственной группы Лоренца L_+.

Причинные операторы преобразуются согласно

$$U(a, \Lambda) T^{(n)}(f) U^{-1}(a, \Lambda) = T^{(n)}(f_{(a,\Lambda)}), \tag{3.1}$$

где

$$f_{(a,\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = f(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_n - a)) \tag{3.2}$$

для любой $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$.

IV. Условия причинности

Для формулировки условия причинности мы введем в рассмотрение класс запаздывающих операторов.

Запаздывающие операторы

$$\mathfrak{R}^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \quad m \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

удовлетворяющие условию

$$\mathfrak{R}^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \tag{4.2}$$

при

$$x_i \le \{y_1, \ldots, y_n\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

где соотношение (4.3) означает, что точка x лежит раньше или пространственноподобно относительно всех точек $y_1, \ldots y_n$, являются операторозначными обобщенными функциями, т.е. каждой функции $f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}(R^{4m})$ и $g^{(n)}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$ приписывается линейный оператор

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{(m+n)}(f^{(m)}, g^{(n)}) = \int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_m d^4y_1 \ldots d^4y_n f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \times \\ \times g^{(n)}(y_1, \ldots, y_n) \mathfrak{R}^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{4.4}$$

определенный в D; причем, характеризующий этот оператор матричный элемент

$$(\Phi, \mathfrak{R}^{(m+n)}(f^{(m)}, g^{(n)}) \Psi) \in \mathcal{S}'(R^{4(m+n)}) \tag{4.5}$$

по двум состояниям $\Phi, \Psi \in D$. Запаздывающие операторы удовлетворяют условию

$$\mathfrak{R}^{(m+n)}(f^{(m)}, g^{(n)}) = 0 \tag{4.6}$$

для любых $f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}(R^{4m})$ и $g^{(n)}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$ с причинно-независимыми носителями, т.е.

$$f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \, g^{(n)}(y_1, \ldots, y_n) = 0 \tag{4.7}$$

при

$$x_i^0 - y_j^0 \ge 0 \quad (x_i - y_j)^2 \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.8}$$

Ясно, что соотношение (4.4) можно рассматривать, согласно ядерной теореме [10], как расширение непрерывного по каждому аргументу полилинейного функционала

$$\mathfrak{R}^{(m+n)}(f_1,\dots,f_m,\ g_1,\dots,g_n) =$$

$$= \int\dots\int d^4x_1\dots d^4x_m\, d^4y_1\dots d^4y_n\, f_1(x_1)\dots f_m(x_m) g_1(y_1)\dots g_n(y_n)\times \tag{4.9}$$

$$\times\, \mathfrak{R}^{(m+n)}(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$$

от аргументов $f_i(x_i) \in \mathcal{S}(R^4)$, $i=\overline{1,m}$ и $g_j(y_j)\in\mathcal{S}(R^4)$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяющего условию

$$\mathcal{P}^{(m+n)}(f_1,\dots,f_m,g_1,\dots,g_n) = 0, \tag{4.10}$$

если

$$f_i(x_i)\, g_j(y_j) = 0 \tag{4.11}$$

при $(x_i^0 - y_j^0) \geq 0$ и $(x_i - y_j)^2 \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Будем считать, что

$$\mathfrak{R}^{(m+n)}(f,g)\, D \subset D \tag{4.12}$$

для $f\in\mathcal{S}(R^{4m})$ и $g\in\mathcal{S}(R^{4n})$

Теперь мы сможем сформулировать условие причинности.

(C) . Причинные операторы

$$T^{(n)}(g^{(n)}) = \int\dots\int d^4y_1\dots d^4y_n\, g^{(n)}(y_1,\dots,y_n)\, T^{(n)}(y_1,\dots y_n) \tag{4.13}$$

удовлетворяют условию причинности в форме Боголюбова

$$(D_f T)^{(n)}(g^{(n)}) = \mathfrak{R}^{(n+1)}(f, g^{(n)}) = 0 \tag{4.14}$$

для любых $f(x)\in\mathcal{S}(R^4)$ и $g^{(n)}(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{S}(R^{4n})$ с причинно-независимыми носителями, т.е. удовлетворяющих условию

$$f(x)\, g^{(n)}(y_1,\dots,y_n) = 0 \tag{4.15}$$

при $(x^0 - y_j^0) \geq 0$ и $(x - y_j)^2 \geq 0$, $j=\overline{1,n}$ (4.16)

(Относительно D-операции см. приложение).

В приложениях удобно пользоваться так называемым интегральным условием причинности.

(d) . Причинные операторы всегда представляются в виде:

$$T^{(n)}(f^{(n)}) = T^{(s)}(f^{(s)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_s})\, T^{(n-s)}(f^{(n-s)}_{\alpha_{s+1},\dots,\alpha_n}) \tag{4.17}$$

для любой $f^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{S}(R^{4n})$, имеющей вид

$$f^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = f^{(s)}(x_1,\dots,x_s)\, f^{(n-s)}(x_{s+1},\dots,x_n), \tag{4.18}$$

где $f^{(s)}(x_1,\dots,x_s)\in\mathcal{S}(R^{4s})$ и $f^{(n-s)}(x_{s+1},\dots x_n)\in\mathcal{S}(R^{4(n-s)})$

$$f^{(s)}(x_1,\dots,x_s)\, f^{(n-s)}(x_{\alpha_{s+1}},\dots,x_{\alpha_n}) = 0 \tag{4.19}$$

при

$$x^0_{\alpha_i} < x^0_{\alpha_j} \qquad (x_{\alpha_i} - x_{\alpha_j})^2 \geq 0,\ i=\overline{1,s}, \qquad j=\overline{s+1,n}. \tag{4.20}$$

В частности,

$$T^{(n)}(f_1,\dots,f_n) = P(f_1,\dots,f_s \mid f_{s+1},\dots,f_n)\times$$

$$\times\{T^{(s)}(f_1,\dots,f_s)\, T^{(n-s)}(f_{s+1},\dots,f_n)\},\quad n=1,2,\dots \tag{4.21}$$

для любых $f_i(x_i)\in\mathcal{S}(R^4)$, $i=1,n$, где символ $P(f_1,\dots,f_s \mid f_{s+1},\dots,f_n)$ обозначает сумму совокупности по всем $n!\,|\,s!(n-s)!$ разбиениям совокупности основных функций $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$ на две совокупности s и $n-s$ функций. При этом перестановка внутри каждой совокупности не учитывается.

Заметим, что причинные операторы $T^{(n)}(f_1,\dots,f_n)$, представленные в виде (4.18), удовлетворяют соотношению

$$T^{(n)}(f_1,\dots,f_n) = 0 \tag{4.22}$$

для любых $f_i(x_i)\in\mathcal{S}(R^4)$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условию

$$f_1(x_1)\dots f_s(x_s)\, f_{s+1}(x_{s+1})\dots f_n(x_n) = 0 \tag{4.23}$$

при

$$\{x_1^0,\dots,x_s^0\} \leq \{x^0_{s+1},\dots,x^0_n\} \tag{4.24}$$

и

$$(x_i - x_j)^2 \geq 0,\quad i=\overline{1,s},\quad j=\overline{s+1,n}. \tag{4.25}$$

Условие причинности в форме Боголюбова и интегральное условие причинности являются эквивалентными.

Теперь укажем еще на одно важное соотношение, связывающее причинные и запаздывающие операторы:

$$\mathfrak{R}^{(n+1)}(f, g^{(n)}) = (D_f T)^{(n)}(g^{(n)}) =$$

$$= -i\, T^{(n+1)}(g^{(n)}; f) + i\, T^{(n)}(g^{(n)})\, J(f) \tag{4.26}$$

для любых $f(x) \in \mathcal{S}(R^4)$ $g^{(n)}(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$.

Пользуясь свойством симметричности причинных операторов, мы из (4.26) получим так называемое условие разрешимости

$$\mathfrak{R}(f,g) - \mathfrak{R}(g,f) - i[J(f), J(g)] = 0 \tag{4.27}$$

для любых $f(x)$, $g(y) \in \mathcal{S}(R^4)$.

Принимая во внимание условие причинности в форме Боголюбова (4.14), мы из (4.27) получим соотношение

$$[J(f), J(g)] = 0 \tag{4.28}$$

для любых $f(x), g(y) \in \mathcal{S}(R^4)$, удовлетворяющих условию

$$f(x)\, g(y) = 0 \qquad \text{при} \qquad (x-y)^2 \geq 0, \tag{4.29}$$

выражающее коммутативность оператора тока $J(x)$ в пространственноподобных точках.

V. Спектральное условие и условие полноты

Существует система собственных амплитуд состояния 4-импульса P^ν, $\nu = 0,1,2,3$ (генератора трансляции пространства-времени), соответствующих собственным значениям $p^\nu \in \bar{V}^+$, где $\bar{V}^+$ – коноид (вперед) $\{p \mid p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2,\ p^0 > 0\}$ и $p^\nu = 0$.

Если в состоянии $|\Psi(\hat{\Phi})> \in D_z^{(1)}$ для $\hat{\Phi}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}_\mu^+)$ вектор 4-импульса P^ν имеет значения $p^\nu \in \bar{\Omega}_\mu^+$, $\nu = \overline{0,3}$, т.е.

$$P^\nu \mid \Psi(\hat{\Phi})> = |\Psi(\hat{\Phi}_1)>, \tag{5.1}$$

где

$$\hat{\Phi}_1(p) = p^\nu \hat{\Phi}(p), \quad p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = \mu^2,\ p^0 > 0, \tag{5.2}$$

тогда

$$U(a,\Lambda)|\Psi(\hat{\Phi})> = |\Psi(U(a,\Lambda)\hat{\Phi})>, \tag{5.3}$$

где

$$(U(a,\Lambda)\hat{\Phi})(p) = e^{iap}\, \hat{\Phi}(\Lambda^{-1}p) \tag{5.4}$$

для любой $\hat{\Phi}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}_\mu^+)$

Существует невырожденное состояние $|0>$, соответствующее собственному значению $p^\nu = 0$, для которого

$$U(a,\Lambda)|0> = |0> \tag{5.5}$$

– состояние вакуума, причем

$$|0> \in D_z. \tag{5.6}$$

В силу полноты системы собственных амплитуд состояния 4-импульса P^ν мы имеем условие полноты:

$$<\Psi(\hat{h})|A(f)B(g)|\Phi(\hat{k})> =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \Big(\prod_{j=1}^{n} d^4p_j\, \theta(p_j^0)\, \delta(p_j^2 - \mu^2)\Big) \times \tag{5.7}$$

$$\times <\Psi(\hat{h})|A(f)|p_1, \dots, p_n> < p_1, \dots, p_n|B(g)|\Phi(\hat{k})>$$

для любых $f(x), g(y) \in \mathcal{S}(R^4)$ и векторов $|\Psi(\hat{h})>, |\Phi(\hat{k})> \in D_z$, где $h, k \in D_{\mathcal{S}}$, где $A(f)$ и $B(g)$ – некоторые операторнозначные обобщенные функции, определенные в $D_z \subset \mathfrak{h}$.

Под условием полноты (5.7) мы будем понимать выполнение следующего функционального соотношения

$$<\Psi(\hat{h})|A(f)B(g)|\Phi(\hat{k})> =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{n_i,\ \sum_i n_i = n\}} \frac{1}{n!} <\Psi(\hat{h})|A(f)|X^{(n)}(\hat{f}^{(n)}_{\{n_i\}})> \times \tag{5.8}$$

$$\times <X^{(n)}(\hat{f}^{*(n)}_{\{n_i\}})|B(g)|\Phi(\hat{k})>,$$

где симметрические ортонормированные функции $\hat{f}^{(n)}_{\{n_1, n_2, \dots\}}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}_n^{n+})$ определяются формулой

$$\hat{f}^{(n)}_{\{n_1, n_2, \ldots\}}(p_1, \ldots, p_n) = \sqrt{\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots}}\ \frac{1}{n!} \sum_{P} (P\hat{f})^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(p_1, \ldots, p_n) \tag{5.9}$$

где

$$\hat{f}^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(p_1, \ldots, p_n) = \hat{f}_{\alpha_1}(p_1) \ldots \hat{f}_{\alpha_n}(p_n), \tag{5.10}$$

где $\{\hat{f}_\alpha(p)\}$ – полный набор нормированных функций из пространства $\mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, удовлетворяющих условиям

$$(\hat{f}_\alpha, \hat{f}_\beta) = \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, \hat{f}^*_\alpha(p)\, \hat{f}_\beta(p) = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\sum_\alpha \hat{f}^*_\alpha(p)\, \hat{f}_\alpha(q) = 2p^0\, \delta(\vec{p} - \vec{q}).$$

В формуле (5.9) суммирование проводится по всем $n!$ перестановкам $1, 2, \ldots n$ чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, P – операция перестановки у индексов P. Условие ортонормированности функции (5.9) выражается в виде

$$(\hat{f}^{*(n)}_{\{n_1, n_2\}}, \hat{f}^{(n)}_{\{n'_1, n'_2, \ldots\}}) = \delta_{n_1 n'_1}\, \delta_{n_2 n'_2} \ldots \tag{5.11}$$

и

$$\sum_{n, n, \ldots} \hat{f}^{*(n)}_{\{n_1, n_2, \ldots\}}(p_1, \ldots, p_n)\, \hat{f}^{(n)}_{\{n_1, n_2, \ldots\}}(a_1, \ldots, a_n) = \tag{5.12}$$

$$= 2p^0_1\, \delta(\vec{p}_1 - \vec{a}_1) \ldots 2p^0_n\, \delta(\vec{p}_n - \vec{a}_n).$$

VI. S – матрица

Существует унитарный оператор, т.е.

$$SS^+ = 1, \tag{6.1}$$

рассматриваемый как изоморфизм между двумя гильбертовыми пространствами начальных и конечных асимптотических состояний удовлетворяющих условиям:

$$S\,|\,0\rangle = |\,0\rangle, \tag{6.2}$$

где $|\,0\rangle \in D_z$ – состояние вакуума,

$$S\,|\,\Psi(\hat{\Phi})\rangle = |\,\Psi(\hat{\Phi})\rangle \tag{6.3}$$

для любой $\hat{\Phi}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, где $|\Psi(\hat{\Phi})\rangle \in D^{(1)}_z$ – одночастичное состояние, соответствующее состоянию реальной частицы и

$$[\,U(a, \Lambda), S\,] = 0. \tag{6.4}$$

Основной задачей S -матричной теории является изучение вероятности переходов между начальными и конечными асимптотическими состояниями.

Асимптотические состояния, отвечающие наличию n бесспиновых вещественных скалярных частиц массы $\mu > 0$ с импульсами $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$ и энергиями $p^0_1 = \sqrt{\vec{p}^{\,2}_1 + \mu^2}, \ldots\ \ldots, p^0_n = \sqrt{\vec{p}^{\,2}_n + \mu^2}$, можно получить в силу цикличности состояния вакуума $|\,0\rangle \in D_z$ путем введения операторов рождения $a^+(p)$ и уничтожения $a(p)$ частиц согласно

$$a^+(\hat{f}^{(1)})\,|\,\Psi^{(n)}(\hat{f}^{(n)})\rangle = |\,\Psi^{(n)}(a^+(\hat{f}^{(1)})\hat{f}^{(n)})\rangle, \tag{6.5}$$

где

$$(a^+(\hat{f}^{(1)})\hat{f})^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j\, \hat{f}^{(1)}(p_j)\, \hat{f}^{(n-1)}(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots p_n) \tag{6.6}$$

и

$$a(\hat{f}^{(1)})\,|\,\Psi^{(n)}(\hat{f}^{(n)})\rangle = |\,\Psi^{(n)}(a(\hat{f}^{(1)})\hat{f}^{(n)})\rangle, \tag{6.7}$$

где

$$(a(\hat{f}^{(1)})\hat{f})^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \sqrt{n+1} \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, \hat{f}^{(1)}(p)\, \hat{f}^{(n+1)}(p, p_1, \ldots, p_n) \tag{6.8}$$

где $\hat{f}^{(1)}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, $|\Psi^{(n)}(\hat{f})^{(n)}\rangle \in D_z$ при $\hat{f}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$.

Эти операторы удовлетворяют следующим коммутативным соотношениям:

$$[\,a(\hat{f}^*), a^+(\hat{g})\,] = \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, \hat{f}^*(p)\, \hat{g}(p) \tag{6.9}$$

$$[\,a(\hat{f}), a(\hat{g}^*)\,] = [\,a^+(\hat{f}), a^+(\hat{g})\,] = 0 \tag{6.10}$$

при любой $\hat{f}(p), \hat{g}(a) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$.

Операторы рождения $a^+(p)$ и уничтожения $a(p)$ преобразуются согласно

$$U(a, \Lambda)\, a^+(\hat{f})\, U^{-1}(a, \Lambda) = a^+(U(a, \Lambda)\hat{f}) \tag{6.11}$$

где

$$(U (a, \Lambda) \hat{f}) (p) = e^{iap} \hat{f}(\Lambda^{-1}p) \qquad (6.12)$$

и

$$U(a,\Lambda)\, a(\hat{f}^*)\, U^{-1}(a,\Lambda) = a(U(a,\Lambda)\hat{f}^*) \qquad (6.13)$$

где

$$(U(a,\Lambda)\hat{f}^*)(p) = e^{-iap} \hat{f}^*(\Lambda^{-1}p) \qquad (6.14)$$

для любой $f(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$.

Таким образом, операторы рождения $a^+(p)$ и уничтожения $a(p)$ мы будем рассматривать как операторнозначные обобщенные функции, определенные в D_z. Построим теперь непрерывную по каждому аргументу полилинейную операторнозначную обобщенную функцию

$$A^+(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n) = a^+(\hat{f}_1) \dots a^+(\hat{f}_n) \qquad (6.15)$$

от аргументов $f_i(p_i) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, $i = \overline{1,n}$, которую можно, согласно ядерной теореме /10/, продолжать на пространство $\mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$

$$A^+(\hat{f}^{(n)}) = \int \dots \int (\prod_{j=1}^{n} d^4p_j\, \theta(p_j^0)\, \delta(p_j^2 - \mu^2))\, \hat{f}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)\, a^+(p_1) \dots a^+(p_n),$$

где $\hat{f}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$. Операторнозначная обобщенная функция $A^+(\hat{f}^{(n)})$ преобразуется по формуле

$$U(a,\Lambda)\, A^+(\hat{f}^{(n)})\, U^{-1}(a,\Lambda) = A^+(U(a,\Lambda)\hat{f}^{(n)}), \qquad (6.17)$$

где

$$(U(a,\Lambda)\hat{f})^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = e^{i\sum_{j=1}^{n} a p_j}\, \hat{f}^{(n)}(\Lambda^{-1}p_1, \dots, \Lambda^{-1}p_n). \qquad (6.18)$$

Теперь наше асимптотическое состояние можно задавать в силу цикличности состояния вакуума при помощи вектора

$$| \Psi^{(n)} (\hat{f})^{(n)} \rangle = A^+ (\hat{f})^{(n)} | 0 \rangle =$$

$$= \int \dots \int (\prod_{j=1}^{n} d^4p_j\, \theta(p_j^0)\, \delta(p_j^2 - \mu^2))\, \hat{f}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)\, a^+(p_1) \dots a^+(p_n) | 0 \rangle. \qquad (6.19)$$

Заметим, что множество всех векторов $c | \Psi^{(n)} (\hat{f})^{(n)} \rangle = c A^+ (\hat{f})^{(n)} | 0 \rangle$ для любой $\hat{f}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$, где c – любое комплексное число, является плотным в n -частичном подпространстве H_n пространства Гильберта H.

Отметим, что кроме соотношений (4.26) и (6.27), связывающих причинные и запаздывающие операторы, существуют еще коммутативные соотношения, связывающие эти операторы

$$[T^{(n)}(f^{(n)}),\, a^+(\hat{g})] = (D_g T)^{(n)}(f^{(n)}) = \mathcal{R}^{(n+1)}(g, f^{(n)}) \qquad (6.20)$$

$$[a(\hat{g}^*),\, T^{(n)}(f^{(n)})] = (D_{g^*} T)^{(n)}(f^{(n)}) = \mathcal{R}^{(n+1)}(g^*, f^{(n)}) \qquad (6.21)$$

$$n = 1, 2 \dots$$

для любой $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$ и $\hat{g}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_\mu)$, где

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - \mu^2)\, \hat{g}(p)\, e^{-ipy} \qquad (6.22)$$

$$(\Box + \mu^2)\, g(y) = 0, \qquad (6.23)$$

т.е. $g(y) \in \mathcal{S}^{KG}(R^4)$ – пространство гладких решений уравнения Крейна-Гордана (КГ).

VII. Элементы S -матрицы

Матричные элементы S -матрицы $S_{mn}(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n)$, соответствующие n -частицам в начальном и m -частицам в конечном состояниях, являются обобщенными функциями, принадлежащими пространству $\mathcal{S}'(\bar{\Omega}^+_{m+n})$, т.е.

$$S_{mn}(\hat{g}^{*(m)}, \hat{f}^{(n)}) = \langle \Phi^{(m)}(\hat{g}^{*(m)}) | S | \Psi^{(n)}(\hat{f}^{(n)}) \rangle =$$

$$= \langle 0 | A(\hat{g}^*)^{(m)}\, S A^+(\hat{f})^{(n)} | 0 \rangle \qquad (7.1)$$

для любых $\hat{f}^{(m)}(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$ и $\hat{g}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^+_n)$, характеризующих волновые функции частиц соответственно в начальном и конечном состояниях.

Так как векторы $c | \Psi^{(n)}(\hat{f}^{(n)}) \rangle$ плотные в H_n, то S – матрица определяется однозначно при помощи матричных элементов вида (7.1). Мы знаем, очевидно, дополнительные тривиальные матричные элементы

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = 1 \tag{7.2}$$

и

$$\langle 0 | S A^{+} (\hat{f}^{(n)}) | 0 \rangle = \langle 0 | A (\hat{f}^{(n)}) S | 0 \rangle = 0 . \tag{7.3}$$

Для преобразования матричных элементов S -матрицы (7.1) мы введем в рассмотрение класс так называемых радиационных операторов

$$H^{(n)} (x_1, \dots, x_n) = (D(x_1) \dots D(x_n) S) S^{+} , \; n = 1, 2, \dots , \tag{7.4}$$

рассматриваемых как операторнозначные обобщенные функции, т.е. каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(R^{4n})$ приписывается линейный оператор

$$\begin{aligned} H^{(n)}(f) &= \int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \, f(x_1, \dots, x_n) H^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \, f(x_1, \dots, x_n) (D(x_1) \dots D(x_n) S) \, S^{+} , \\ & \qquad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{7.5}$$

определенный в D , причем

$$(\Phi , H^{(n)} (f) \Psi) \in \mathcal{S}' (R^{4n}) \tag{7.6}$$

для $\Phi, \Psi \in D$.

Ясно, что соотношение (7.5) можно рассматривать как расширение полилинейной операторнозначной обобщенной функции

$$\begin{aligned} H^{(n)} (f_1, \dots, f_n) &= \int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \; f_1 (x_1) \dots f_n (x_n) \times \\ & \times (D(x_1) \dots D(x_n) S) S^{+} = (D_{f_1} \dots D_{f_n} S) S^{+}, \; n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{7.7}$$

от аргументов $f_i (x_i) \in \mathcal{S}(R^4)$, $i = \overline{1,n}$.

Отметим одно важное свойство радиационных операторов.

Радиационные операторы являются симметрическими относительно своих аргументов, т.е.

$$H^{(n)} (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n}) = H^{(n)} (f_1, \dots, f_n) \tag{7.8}$$

для любых $f_i (x_i) \in \mathcal{S}(R^4)$, $i = \overline{1,n}$.

Матричные элементы (7.1) теперь могут быть сведены к вакуумным средним радиационных операторов (7.5) при помощи коммутативных соотношений

$$[S , a^{+} (\hat{f})] = D_f \, S = \int d^4 y \, f(y) (D(y) S) \tag{7.9}$$

$$[a(\hat{f}^{*}), S] = D_{f^*} S = \int d^4 y \, f^{*}(y) (D(y) S) \tag{7.10}$$

для любой $\hat{f}(p) \in \mathcal{S}(\bar{\Omega}^{+}_{\mu})$, где функция $f(y)$ определяется формулой

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p \, \theta(p^0) \delta(p^2 - \mu^2) \, e^{-ipy} \hat{f}(p) \tag{7.11}$$

и принадлежит пространству $\mathcal{S}^{\text{кг}}(R^4)$.

Заметим, что хотя $f(y)$ не принадлежит пространству $\mathcal{S}(R^4)$, тем не менее правые части (7.9) и (7.10) определяют операторнозначные обобщенные функции, так как их левые части являются операторнозначными обобщенными функциями.

При вычислении матричных элементов мы будем пользоваться также соотношениями

$$\langle 0 | a^{+} (\hat{f}) = a(\hat{f}^{*}) | 0 \rangle = \langle 0 | D_f S | 0 \rangle = \langle 0 | D_{f^*} S | 0 \rangle = 0 . \tag{7.12}$$

Пользуясь случаем, хочу выразить свою глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, А.Н. Тавхелидзе, И. Бялыницкому-Бируле, А.В. Ефремову, А. Ульману и Э. Капусцику за полезные обсуждения и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

D – операция

Для формулировки других аксиом нам будет удобно ввести в расмотрение так называемую D-операцию, обозначенную следующим образом:

$$D_f = \int d^4 x \, f(x) \, D(x) \tag{1}$$

для любой $f(x) \in \mathcal{S}(R^4)$, обладающей свойствами: 1°) линейности, т.е.

$$D_{af + bg} = a D_f + b D_g \tag{2}$$

для любых $f(x), g(y) \in \mathcal{S}(R^4)$, где a и b - некоторые постоянные числа, и 2°) коммутативности, т.е.

$$[D_f, D_g] = 0 \tag{3}$$

для любых $f(x), g(y) \in \mathcal{S}(R^4)$.

Операция D_f преобразует каждую операторнозначную обобщенную функцию

$$A(g) = \int d^4y\, g(y) A(y) \quad \text{в} \quad D \tag{4}$$

в другую операторнозначную обобщенную функцию

$$(D_f A)(g) = \iint d^4x\, d^4y\, f(x)\, g(y) (D(x) A)(y) = B(f,g), \tag{5}$$

определенную в $D \subset H$, причем

$$(\Phi, B(f,g)\Psi) \in \mathcal{S}^1(R^8) \tag{6}$$

для любых $f(x), g(y) \in \mathcal{S}(R^4)$ и векторов $\Psi, \Phi \in D$ с сохранением непрерывности в $\mathcal{S}^1$.

При этом операция D_f сохраняет все свойства обычной операции дифференцирования, т.е.

$$1^{\circ}. \qquad D_f a = 0, \tag{7}$$

где a - некоторое постоянное число, а $f(x) \in \mathcal{S}(R^4)$,

$$\begin{aligned} 2^{\circ}.\ D_f \{a_1 A_1(g_1) + a_2 A_2(g_2)\} &= \\ = a_1 (D_f A_1)(g_1) + a_2 (D_f A_2)(g_2) &= \\ = a_1 B_1(f, g_1) + a_2 B_2(f, g_2) & \end{aligned} \tag{8}$$

для любых $f(x)$, $g_1(y_1), g_2(y_2) \in \mathcal{S}(R^4)$, a_1 и a_2 - некоторые постоянные числа,

$$\begin{aligned} 3^{\circ}.\ D_f \{A_1(g_1) A_2(g_2)\} &= \\ = (D_f A_1)(g_1) A_2(g_2) + A_1(g_1)(D_2 A_2)(g_2) &= \\ = B_1(f, g_1) A_2(g_2) + A_1(g_1) B_2(f, g_2) & \end{aligned} \tag{9}$$

для любых $f(x), g_1(y_1), g_2(y_2) \in \mathcal{S}(R^4)$.

Преобразование Фурье-операции D мы определим по формуле

$$\tilde{D}_{\tilde{f}} = D_f$$

где

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p\, e^{-ipx} \tilde{f}(p) \tag{10}$$

для любой $\tilde{f}(p) \in \mathcal{S}(R^4)$.

Л и т е р а т у р а

1. H. Lehmann, K. Symansik, and W. Zimmermann. Nuvvo Cim. 1, 205 (1955).
2. A.S. Wightman . Phys. Rev. 101, 860 (1956).
3. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М, ГИТТЛ, 1957.
4. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., ГИФМЛ, 1958.
5. Р. Хааг. Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей 6:4; 134 (1962).
6. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М, ИИЛ, 1963.
7. K.Hepp. Acta Physica Austrica 17, 85 (1963).
8. R. Jost. General theory of quantized fields. American math. Sve. Dublications, 1963.
9. K. Hepp. Axiomatic field theory. 1965. Brandies university summer institute in theoretical physics, v 1.
10. Г. Стритер, А. Вайтман. PCT, спин и статистика и все такое. Изд-во"Наука" ГРФМЛ, Москва, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1967 г.