ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 3140

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Николов

ДИСКРЕТНАЯ СЕРИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ O(p,q)

1967.

P5 - 3140

А.В. Николов

ДИСКРЕТНАЯ СЕРИЯ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ O(p,q)

Цель настоящей работы – получить дискретную серию унитарных неприводимых представлений алгебры Ли группы $O(p,q)$ (конечно, в случаях, когда такая серия существует, – см. § 3). Эти представления будут заданы как "хвосты" конечномерных представлений алгебры Ли группы $O(n)$, $n=p+q$, эффективные формулы для которых даны в /1/. При этом обнаруживается полная аналогия с алгеброй Ли группы $U(p,q)$ (ср. /2,3/).

§ 1. Группа $O(p,q)$ и ее алгебра Ли

Группа $O(p,q)$ есть группа всех вещественных линейных преобразований $n=p+q$, переменных $x_1, \ldots, x_n$, сохраняющих квадратичную форму $\sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{n} x_k^2$. При $q=0$ ($p=n$) $O(p,q)$ совпадает с группой $O(n)$ ортогональных преобразований. Пусть 1_s – единичная матрица порядка s; тогда

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

есть матрица рассматриваемой квадратичной формы, а сама эта форма записывается компактно в виде $x^T \sigma x$ (x –столбец из элементов x_k, T –знак транспонирования, так что x^T – строка из элементов x_k). Следовательно, $O \in O(p,q)$ тогда и только тогда, когда

$$O^T \sigma O = \sigma. \qquad (1.2)$$

Иными словами, $O(p,q)$ есть группа всех вещественных матриц O порядка $n=p+q$, удовлетворяющих (1.2).

Из (1.2) вытекает, что алгебра Ли $A(p,q)$ группы $O(p,q)$ есть совокупность всех вещественных матриц A порядка $n=p+q$, удовлетворяющих условию

$$A^T = -\sigma A \sigma \quad (1.3)$$

(в которой определены операции сложения, умножения на вещественное число и операция коммутирования). Обозначим через e_{ij} матрицу n-го порядка, у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а на остальных местах – нули. Как нетрудно показать с помощью (1.3), алгебра Ли $A(p,q)$, $p+q=n$, порождается $\frac{1}{2}n(n-1)$ матрицами

$$e_{ij}\sigma_{jj} - e_{ji}\sigma_{ii}, \quad i>j;$$

иными словами, эти матрицы можно выбрать в качестве генераторов группы $O(p,q)$.

Как известно, для того чтобы задать представление алгебры $A(p,q)$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом E, необходимо и достаточно сопоставить каждому элементу $A\in A(p,q)$ линейный оператор $T(A)$ в H, определенный на множестве всех конечных линейных комбинаций векторов базиса E и переводящий это множество в себя, причем

$$T(\alpha A+\beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B), \; [T(A), T(B)] = T([A,B]), \quad (1.4)$$

где A и B –произвольные элементы из $A(p,q)$, а α и β –произвольные вещественные числа. Положим:

$$M_{ij} = T(e_{ij}\sigma_{jj} - e_{ji}\sigma_{ii}), \; i,j=1,\ldots,n. \quad (1.5)$$

В силу (1.4-5) представление $T(A)$ порождается операторами M_{ij}, $i>j$; следовательно, для того, чтобы задать это представление, достаточно задать M_{ij}, $i>j$. Опять же в силу (1.4-5) имеем:

$$[M_{ij}, M_{kh}] = \sigma_{kj} M_{ih} - \sigma_{ih} M_{kj} - \sigma_{ki} M_{jh} + \sigma_{jh} M_{ki}, \qquad (1.6)$$
$$i, j, k, h = 1, \ldots, n$$

и, кроме того,

$$M_{ij} = -M_{ji}, \; i, j = 1, \ldots, n. \qquad (1.7)$$

Теперь мы сделаем следующий, весьма существенный, шаг. Положим:

$$I_{ij} = \sigma_{ii}^{-1/2} \sigma_{jj}^{-1/2} M_{ij}, \; i, j = 1, \ldots, n; \qquad (1.8)$$

для определенности будем считать, что все корни выбраны со знаком плюс. Тогда из (1.6) и (1.8) находим:

$$[I_{ij}, I_{kh}] = \delta_{kj} I_{ih} - \delta_{ih} I_{kj} - \delta_{ki} I_{jh} + \delta_{jh} I_{ki}, \qquad (1.9)$$
$$i, j, k, h = 1, \ldots, n$$

(δ_{ij} - символ Кронекера), а из (1.7-8) -

$$I_{ij} = -I_{ji}, \; i, j = 1, \ldots, n. \qquad (1.10)$$

Согласно (1.8), соответствие между I_{ij} и M_{ij} однозначно и обратимо, так что вместо того, чтобы задавать M_{ij}, $i > j$, можно задавать I_{ij}, $i > j$. А это более удобно по причине, к выяснению которой мы сейчас переходим.

Рассмотрим частный случай группы $0(n) = 0(n, 0)$ и алгебры Ли $A(n) = A(n, 0)$, т.е. случай, когда $p = n$ и $q = 0$. Тогда, согласно (1.1), $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$, так что

$$e_{ij} \sigma_{jj} - e_{ji} \sigma_{ii} = e_{ij} - e_{ji}, \; i, j = 1, \ldots, n,$$

т.е. определенные нами генераторы группы $0(n)$ совпадают с теми, которые использовались в /1/. При этом, согласно (1.5), операторы M_{ij} совпадают с операторами I_{ij}, введенными в /1/, так что последние будут удовлетворять коммутационным соотношениям, получающимся из (1.6) заменами $M \to I$ и $\sigma \to \delta$, т.е. коммутационным соотношениям (1.9). Ясно, что если работать с операторами I_{ij}, которые определены нами формулой (1.8) (и которые, кстати, также совпадают с операторами M_{ij} в рассмотренном частном случае), то при переходе от алгебры $A(n)$ к алгебре $A(p,q)$, $p+q=n$, форма коммутационных соотношений не изменяется; точнее, они сохраняются в виде (1.9). В этом и состоит удобство, о котором шла речь выше. Уже здесь видна некоторая аналогия с алгеброй Ли группы $U(p,q)$ (см. /2,3/).

Будем называть представление $T(A)$ алгебры $A(p,q)$ унитарным, если оно состоит лишь из косоэрмитовых операторов, так как в таком и только в таком случае соответствующее представление самой группы $O(p,q)$ будет унитарным. Точнее, оно будет таким, если существует, т.е. если можно "проинтегрировать" представление алгебры и тем самым получить представление группы (что, как известно, не всегда возможно). Вопрос об "интегрировании" рассматриваемых в настоящей работе представлений алгебры $A(p,q)$ здесь не будет обсуждаться.

Из вышесказанного вытекает, что представление $T(A)$ унитарно тогда и только тогда, когда $M^{+}_{ij} = -M_{ij}$, $i>j$, или, согласно (1.7),

$$M^{+}_{ij} = -M_{ij}, \quad i,j=1,\dots,n.$$

В силу (1.1) и (1.8) последние равенства имеют место тогда и только тогда, когда

$$I^{+}_{ij} = -\epsilon_{ij} I_{ij}, \quad i,j=1,\dots,n, \tag{1.11}$$

где

$$\epsilon_{ij} = \sigma_{ii}\sigma_{jj} = \begin{cases} +1 & \text{при } i,j \le p, \text{ либо } p<i,j, \\ -1 & \text{при } i \le p < j, \text{ либо } j \le p < i. \end{cases} \tag{1.12}$$

Теперь ясно, что аналогия с алгеброй Ли группы $U(p,q)$ (см. /2,3/) является полной.

Как известно, представление $T(A)$, заданное в пространстве H, называется неприводимым, если в H не существует подпространств, инвариантных относительно всех операторов $T(A)$. В дальнейшем мы рассмотрим некоторую серию неприводимых унитарных представлений алгебры Ли $A(p,q)$, $p,q \neq 0$. Они будут бесконечномерными (заметим, что мы имеем дело с алгеброй некомпактной группы). Согласно вышесказанному, для задания таких представлений достаточно задать операторы I_{ij} так, чтобы удовлетворялись коммутационные соотношения (1.9) и условия "эрмитовости" (1.11); конечно, затем надо проверить их неприводимость.

§ 2. Редукция системы коммутационных соотношений и системы условий "эрмитовости"

Оказывается, что достаточно задать только часть операторов I_{ij} и проверить только часть соотношений (1.9) и условий (1.11). Точнее, справедливо следующее утверждение. Пусть задана система операторов $I_{k+1,k}$, $k=1,\dots,n-1$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[I_{k+1,k}, I_{h+1,h}] = 0, \quad k \neq h \pm 1 \tag{2.1}$$

и условиям "эрмитовости"

$$\overset{+}{I}_{k+1,k} = -\epsilon_k I_{k+1,k}, \; \epsilon_k = \epsilon_{k+1,k} = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad k \neq p, \\ -1 & \text{при} \quad k = p\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Пусть, кроме того, операторы I_{ij} определяются при $i > j$ рекуррентной формулой

$$I_{k+\Delta,k} = [I_{k+\Delta,k+1}, I_{k+1,k}], \quad \Delta > 1, \tag{2.3}$$

а в остальных случаях – формулой[x/]

$$I_{ij} = -I^{\bullet}_{ji}. \tag{2.4}$$

[x/] В этом пункте мы руководствуемся равенствами (1.10).

Тогда, если

$$[I_{k+2,k}, I_{k+2,k+1}] = I_{k+1,k}, \tag{2.5}$$

$$[I_{k+2,k}, I_{k+1,k}] = -I_{k+2,k+1}, \tag{2.6}$$

то I_{ij} удовлетворяют как (1.9), так и (1.11).

Чтобы не перегружать изложения, здесь мы только наметим схему доказательства этого утверждения. Сначала с помощью (2.1), (2.3) и тождества Якоби индуктивно устанавливаем, что

$$[I_{ik}, I_{kj}] = I_{ij}, \quad i > k > j. \tag{2.7}$$

Затем на основании (2.1), (2.5–7) и тождества Якоби получаем

$$[I_{k+2,k}, I_{k+1,k-1}] = 0. \tag{2.8}$$

Далее на основании тех же аргументов, используя и (2.8), получаем

$$\left.\begin{aligned} &[I_{k+1,k-1}, I_{kh}] = -\delta_{k,h+1} I_{k+1,k}, \\ &[I_{k+1,k}, I_{k+1,h}] = -I_{kh}, \\ &[I_{k+1,k}, I_{k-1,h}] = 0 \end{aligned}\right\} \quad k > h. \tag{2.9}$$

Применяя (2.1), (2.7) и (2.9) в комбинации с тождеством Якоби, индуктивно устанавливаем справедливость соотношений

$$[I_{ij}, I_{k,k-1}] = \delta_{kj} I_{i,k-1} - \delta_{i,k-1} I_{kj} - \delta_{ki} I_{j,k-1} + \delta_{j,k-1} I_{ki} \tag{2.10}$$

при $i > j$, а из этого в силу (2.4) вытекает их справедливость и при $i \leq j$. С учетом (2.4) и (2.10) легко убедиться в том, что соотношения

$$[I_{ij}, I_{kh}] = \delta_{kj} I_{ih} - \delta_{ih} I_{kj} - \delta_{ki} I_{jh} + \delta_{jh} I_{ki} \tag{2.11}$$

имеют место при $|k-h| \leq 1$ (и, конечно, при всех i и j). Этот результат дает нам возможность индуктивно (опять же при помощи (2.3) и тождества Якоби) доказать (2.11) при всех $k \geq h$ (и всех i, j). Наконец, снова учитывая (2.4), приходим к выводу, что (2.11) имеет место при всех i, j, k, h. Иными словами, мы получили (1.9).

Осталось получить (1.11). В силу (2.2) и (2.4) имеем

$$I^{+}_{ij} = -\epsilon_{ij} I_{ij} \tag{2.12}$$

при $|i-j| \leq 1$. Кроме того, согласно (1.12), $\epsilon_{ik} \epsilon_{kj} = \epsilon_{ij}$. Принимая во внимание еще и (2.3), находим по индукции, что условие (2.12) выполняется при всех $i \geq j$. Следовательно, согласно (2.4), выполняются и условия (1.11).

Отметим, что в случае алгебры Ли группы $U(p,q)$ справедливо утверждение, аналогичное сформулированному в начале настоящего параграфа, причем оно доказывается аналогичным образом (см. /3/). Имеются, однако, существенные различия как в формулировках, так и в доказательствах указанных двух утверждений. Поэтому мы сочли нелишним привести хотя бы схему рассуждений в рассматриваемом здесь случае.

Заметим еще, что при помощи (2.3) можно переписать (2.5-6) в виде

$$2ABA - A^2B - BA^2 = B; \begin{cases} \text{либо} \quad A = I_{k+2,k+1},\ B = I_{k+1,k}, \\ \text{либо} \quad A = I_{k+1,k},\ B = I_{k+2,k+1}; \end{cases} \tag{2.13}$$

верхняя строка соответствует (2.5), нижняя - (2.6). В итоге результаты настоящего параграфа можно резюмировать следующим образом: достаточно задать операторы $I_{k+1,k}$ и проверить (2.1-2) и (2.13).

§ 3. Дискретная серия

Напомним сначала, как задается в [1] неприводимое унитарное представление алгебры $A(n)$. Оно действует в конечномерном пространстве с ортонормированным базисом, векторы которого в случае $n = 2k+2$ "занумерованы" всевозможными схемами [x]

$$
m = \left[\begin{array}{c}
m_{2k+1,1}\; m_{2k+1,2}\; \ldots\; m_{2k+1,k}\; m_{2k+1,k+1} \\
m_{2k,1} \ldots\ldots\ldots\ldots m_{2k,k} \\
m_{2k-1,1} \ldots\ldots\ldots\ldots m_{2k-1,k} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_{41} \quad m_{42} \\
m_{31} \quad m_{32} \\
m_{21} \\
m_{11}
\end{array}\right], \qquad (3.1)
$$

а в случае $n = 2k+1$ – всевозможными схемами [x]

$$
m = \left[\begin{array}{c}
m_{2k,1} \ldots\ldots\ldots\ldots m_{2k,k} \\
m_{2k-1,1} \ldots\ldots\ldots\ldots m_{2k-1,k} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_{41} \quad m_{42} \\
m_{31} \quad m_{32} \\
m_{21} \\
m_{11}
\end{array}\right], \qquad (3.2)
$$

где числа m_{ij} являются одновременно все целыми или все полуцелыми и удовлетворяют неравенствам [xx]

---

[x] В [1] верхняя строка рассматриваемых схем опущена, так как она для всех векторов базиса одна и та же.

[xx] Вместо неравенств $m_{2s,s} \geq m_{2s-1,s} \geq -m_{2s,s}$ (см. [1]) здесь мы написали эквивалентное неравенство $m_{2s,s} \geq |m_{2s-1,s}|$. Кроме того, написав $m_{2s,s} \geq |m_{2s+1,s+1}|$ вместо $m_{2s,s} \geq m_{2s+1,s+1}$, мы исправили одну ошибку, допущенную в [1]. Впрочем, как потом выяснилось, эта ошибка исправлена еще в [4] (см. Дополнение 1).

$$m_{2s+1,1}\geq m_{2s,1}\geq m_{2s+1,2}\geq\ldots\geq m_{2s+1,s}\geq m_{2s,s}\geq|m_{2s+1,s+1}|,$$

$$m_{2s,1}\geq m_{2s-1,1}\geq m_{2s,2}\geq\ldots\geq m_{2s,s-1}\geq m_{2s-1,s-1}\geq m_{2s,s}\geq|m_{2s-1,s}|. \tag{3.3}$$

В этих схемах верхняя строка фиксирована – она задает само представление. Каждой допустимой схеме m сопоставляется вектор базиса $\xi(m)$. Обозначим через $\xi^{\pm}(m_i^j)$ вектор, соответствующий схеме, полученной из m заменой m_{ij} на $m_{ij}\pm 1$. Кроме того, положим:

$$l_{2s+1,i}=m_{2s+1,i}+s-i+1,\quad l_{2s,i}=m_{2s,i}+s-i+1. \tag{3.4}$$

Тогда операторы $I_{k+1,k}$ задаются следующими формулами (см. подстрочное примечание в /1/ относительно обозначения коэффициентов):

$$I_{2s+1,2s}\,\xi(m)=\sum_{j=1}^{s}A(l_{2s-1,j})\,\xi^{+}(m_{2s-1}^{j})-\sum_{j=1}^{s}A(l_{2s-1,j}-1)\,\xi^{-}(m_{2s-1}^{j}), \tag{3.5}$$

$$I_{2s+2,2s+1}\,\xi(m)=\sum_{j=1}^{s}B(l_{2s,j})\,\xi^{+}(m_{2s}^{j})-\sum_{j=1}^{s}B(l_{2s,j}-1)\,\xi^{-}(m_{2s}^{j})+iC_{2s}\,\xi(m),$$

где[x/]

$$A(l_{2s-1,j})=\frac{1}{2}\left\{\frac{\prod\limits_{r=1}^{s-1}(l_{2s-2,r}-l_{2s-1,j}-1)(l_{2s-2,r}+l_{2s-1,j})\prod\limits_{r=1}^{s}(l_{2s,r}-l_{2s-1,j}-1)(l_{2s,r}+l_{2s-1,j})}{\prod\limits_{r\neq j}(l_{2s-1,r}^2-l_{2s-1,j}^2)[l_{2s-1,r}^2-(l_{2s-1,j}+1)^2]}\right\}^{1/2}, \tag{3.6}$$

$$B(l_{2s,j})=\left\{\frac{\prod\limits_{r=1}^{s}(l_{2s-1,r}^2-l_{2s,j}^2)\prod\limits_{r=1}^{s+1}(l_{2s+1,r}^2-l_{2s,j}^2)}{l_{2s,j}^2(4l_{2s,j}^2-1)\prod\limits_{r\neq j}(l_{2s,r}^2-l_{2s,j}^2)[(l_{2s,r}-1)^2-l_{2s,j}^2]}\right\}^{1/2},$$

---

x/ Написав численный коэффициент 1/2 в формуле для $A(l_{2s-1,j})$, мы исправили еще одну ошибку, допущенную в /1/.

$$C_{2s} = \frac{\prod\limits_{r=1}^{s} l_{2s-1,r} \prod\limits_{r=1}^{s+1} l_{2s+1,r}}{\prod\limits_{r=1}^{s} l_{2s,r}(l_{2s,r}-1)} . \tag{3.6}$$

В силу неравенств (3.3) корни вещественны; все они берутся со знаком плюс. Заметим еще, что в рассматриваемом случае $p = n$ и, согласно (2.2), $\epsilon_k = +1, \quad k = 1, \ldots , n-1.$

Рассмотрим теперь случай алгебры $A(p, q)$, $p, q \neq 0$. Пусть число p –четное, так что число $\pi = \frac{1}{2} p$ – целое. Введем схемы, подобные схемам (3.1-2), которые определяются следующим образом: числа m_{ij} опять являются одновременно все целыми или все полуцелыми, но на этот раз мы потребуем, чтобы они удовлетворяли другим неравенствам, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} m_{2s+1,1} \geq m_{2s,1} \geq m_{2s+1,2} \geq \ldots \geq m_{2s+1,s} \geq m_{2s,s} \geq |m_{2s+1,s+1}| , \\ \\ m_{2s,1} \geq m_{2s-1,1} \geq m_{2s,2} \geq \ldots \geq m_{2s,s-1} \geq m_{2s-1,s-1} \geq m_{2s,s} \geq |m_{2s-1,s}| \end{array}\right\} s < \pi ,$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{2\pi,1} \geq m_{2\pi+1,1}+1 \geq m_{2\pi,2} \geq \ldots \geq m_{2\pi,\pi} \geq m_{2\pi+1,\pi}+1 \geq |m_{2\pi+1,\pi+1}|+1 , \\ \\ m_{2\pi-1,1} \geq m_{2\pi,1}+1 \geq m_{2\pi-1,2} \geq \ldots \geq m_{2\pi-1,\pi-1} \geq m_{2\pi,\pi-1}+1 \geq |m_{2\pi-1,\pi}| \geq m_{2\pi,\pi}+1 \end{array}\right\} s = \pi ,$$

(3.7)

$$\left.\begin{array}{l} m_{2s,1} \geq m_{2s+1,1}+1 \geq m_{2s,2} \geq \ldots \geq m_{2s,\pi} \geq m_{2s+1,\pi}+1 , \\ \\ m_{2s+1,\pi+1} \geq m_{2s,\pi+1} \geq m_{2s+1,\pi+2} \geq \ldots \geq m_{2s,s} \geq |m_{2s+1,s+1}| , \\ \\ m_{2s-1,1} \geq m_{2s,1}+1 \geq m_{2s-1,2} \geq \ldots \geq m_{2s-1,\pi} \geq m_{2s,\pi}+1 , \\ \\ m_{2s,\pi+1} \geq m_{2s-1,\pi+1} \geq m_{2s,\pi+2} \geq \ldots \geq m_{2s,s} \geq |m_{2s-1,s}| , \end{array}\right\} s > \pi ;$$

при этом подразумевается, что $m_{i i}$ изменяется в интервале $[m_{i+1,i}+1, \infty)$, когда $i > p-1 = 2\pi - 1$. Ясно, что имеется счетное множество допустимых схем с фиксированной верхней строкой. Введем гильбертово пространство H, в котором эти схемы "нумеруют" векторы ортонормированного базиса, причем вектор базиса, соответствующий допустимой схеме m, обозначим опять через $\xi(m)$; сохраним (по форме) и остальные обозначения, которые использовались выше.

Зададим операторы $I_{k+1,k}$ теми же формулами (3.5), что и в случае алгебры $A(n)$. Теперь в силу неравенств (3.7) при $k \neq p$ все соответствующие корни в (3.5) вещественны (и берутся со знаком плюс), а при $k = p$ (что соответствует первой из формул (3.5) при $s = \pi$) они чисто мнимые (но берутся опять со знаком плюс). Из этого вытекает, что будет иметь место (2.2). Иными словами, неравенства (3.7) обеспечивают выполнение условий "эрмитовости" с $\epsilon_k = +1$ при $k \neq p$ и $\epsilon_p = -1$, так же как неравенства (3.3) обеспечивают выполнение условий "эрмитовости" с $\epsilon_k = +1$, $k = 1, \dots, n-1$ (см. выше). Эти утверждения доказываются аналогично соответствующим утверждениям в случае алгебры Ли группы $U(p, q)$ (см. /3/). Проверка (2.1) и (2.13) проводится также аналогично проверке "минимальной системы" коммутационных соотношений в /3/. И здесь самым существенным в этой проверке является применение аналитического продолжения, а это означает, что рассуждения никак не связаны с неравенствами (3.7) и имеют универсальный характер, т.е. не зависят от того, с какой из алгебр, $A(n)$ или $A(p,q)$, мы имеем дело. В этом еще раз проявляется тот факт, что форма коммутационных соотношений в указанных двух случаях одинакова, если работать с операторами I_{ij} вместо M_{ij}.

Что касается неприводимости, то она тоже проверяется с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались в /3/. Таким путем можно убедиться, что каждое из определенных выше представлений алгебры $A(p,q)$ приводимо и распадается на два неприводимых (бесконечномерных) представления - одно из них задается дополнительным условием $m_{2\pi-1,\pi} > 0$, а другое - условием $m_{2\pi-1,\pi} < 0$; неудивительно, что элемент $m_{2\pi-1,\pi}$ играет особую роль, так как еще из неравенств (3.7) видно, что он выделяется среди тех элементов схемы m, которые участвуют в (3.7) посредством своих абсолютных значений.

Если число p -нечетное, конструкция, подобная вышеприведенной, невозможна, так как невозможно обеспечить выполнение условий (2.2); точнее, нельзя сделать так, чтобы имело место равенство $\epsilon_p = -1$, если в основе конструкции положены формулы (3.5). Действительно, согласно (2.2), равенство $\epsilon_p = -1$ означало бы, что $I^+_{p+1,p} = I_{p+1,p}$, а так как p нечетно, то оператор $I_{p+1,p}$ задавался бы второй из формул (3.5) при $s=\frac{1}{2}(p-1)$, т.е. в выражение для $I_{p+1,p}\ \xi(m)$ входил бы член $iC_{p-1}\xi(m)$ с чисто мнимым коэффициентом iC_{p-1} (в силу (3.6) каждый из коэффициентов C представляет собой рациональное число и этим существенно отличается от коэффициентов A и B; кстати, коэффициенты B во всяком отношении похожи на A, но присутствие C во второй из формул (3.5) коренным образом изменяет ситуацию). Полученное противоречие и доказывает вышесформулированное утверждение.

Пусть теперь число q -четное. Тогда для алгебры $A(q,p)$ вышеприведенная конструкция возможна (конечно, тут подразумевается, что во всех предыдущих рассуждениях нужно поменять местами p и q). Но это означает, что и в таком случае мы имеем возможность строить представления алгебры $A(p,q)$, так как $A(p,q)$ и $A(q,p)$ изоморфны. Суммируя все результаты, мы можем утверждать, что при $p,q \neq 0$, если хотя бы одно из этих чисел четно, алгебра $A(p,q)$ обладает дискретной серией унитарных неприводимых представлений, определяемых формулами (3.5) вместе с неравенствами (3.7); при этом, в отличие от случая алгебры $A(n)$, верхняя строка соответствующих схем (3.1-2) не определяет полностью представление - имеется два типа представлений с фиксированной верхней строкой, если лишь одно из чисел p и q четно, и четыре типа таких представлений, если оба они четны. В случае же, когда оба они нечетны, подобная конструкция невозможна. Более того, как можно показать, в этом случае алгебра $A(p,q)$ вообще не обладает дискретной серией.

Итак, указанные представления определяются теми же формулами, как и представления алгебры $A(n)$, но теперь определяющие неравенства другие. Именно эти сходства и различия мы имели в виду, когда утверждали, что представления из дискретной серии $A(p,q)$ являются "хвостами" конечномерных представлений $A(n)$, $n=p+q$.

В заключение автор благодарит М.И. Граева, по инициативе которого началась настоящая работа, за плодотворные дискуссии. Он благодарит также И.Т. Тодорова за ценные замечания.

Литература

1. И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин. ДАН СССР, 71, № 6, 1017 (1950).
2. И.М. Гельфанд, М.И. Граев. Изв. АН СССР, серия математическая, 29, № 6, 1329 (1965).
3. А.В. Николов, К.В. Рерих. Дискретная серия унитарных представлений алгебры Ли группы $U(p,q)$ (обзор по работам Гельфанда-Цетлина-Граева). Препринт ОИЯИ, 5-2962, Дубна, 1966.
4. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращения и группы Лоренца, их применения. М., Физматгиз, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1967 г.