ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-2950

Као Ти

Вырожденные унитарные представления группы SU(2,2)

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P5-2950

Као Ти

Вырожденные унитарные представления группы SU(2,2)

Направлено в ЯФ

1. Введение

Группа $SU(2,2)$ является накрывающей группой комформной группы $SO(4,2)$; последняя содержит группу де Ситтера и группу Пуанкаре как подгруппы. Группа $SO(4,2)$ впервые была введена в физику в работах [1]. Впоследствии она была рассмотрена рядом авторов [2] в связи с теорией общей относительности, теорией электромагнетизма и квантовой теорией поля.

В последнее время в работах ряда авторов [3,4] было показано, что группа симметрии G для сильновзаимодействующих элементарных частиц имеет следующую структуру:

$$G = P.S\,,$$

где P – группа Пуанкаре, S – группа внутренней симметрии, а точка обозначает полупрямое произведение. Одной из возможных групп симметрии S является группа $SU(6,6)$. Если мы оставим пока в стороне группу $SU(3)$, то получим группу $SU(2,2)$.

Разные серии представлений, реализуемых в разных пространствах, были рассмотрены в работах [5]. В данной работе мы реализуем унитарные представления группы $SU(2,2)$ с помощью обобщенных тензоров [6,7], которые очень удобны в приложении к теории симметрии элементарных частиц.

2. Однородные функции, обобщенные тензоры и векторные базисы представлений

Рассмотрим матрицу

$$\xi = \xi_{ij} \quad (i,j = 1,2,3,4)$$

и реализуем представления в пространстве функций $f(z)$, которые являются однородными функциями переменных Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1 i_2}$, $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$, где $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ – миноры, образованные из k первых строк матрицы g. В таком случае генераторы $\mathcal{L}_{ij}$ группы имеют следующий вид/8/:

$$\mathcal{L}_{ij} = \sum_{n=1}^{3} \xi_{ni} \frac{\partial}{\partial \xi_{nj}} \tag{1}$$

и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{kl}] = \delta_{jk} \mathcal{L}_{il} - \delta_{il} \mathcal{L}_{kj} . \tag{2}$$

В данной работе мы рассматриваем только вырожденные представления, реализуемые функциями $f(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2 i_3})$. Включение еще 6 переменных $\Delta_{i_1 i_2}$ затрудняет физическую интерпретацию представлений.

Введем следующие обозначения:

$$\xi_i = \xi_{1i} \quad ; \quad \xi^i = \eta_i = \varepsilon^{ijkl} \xi_{1j} \xi_{2k} \xi_{3l} .$$

тогда

$$f(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2 i_3}) = \xi_1^A \xi_2^B \xi_3^C \xi_4^D \eta_1^{\mathcal{A}} \eta_2^{\mathcal{B}} \eta_3^{\mathcal{C}} \eta_4^{\mathcal{D}} , \tag{3}$$

где

$$A+B+C+D = F \quad ; \quad \mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}+\mathcal{D} = \mathcal{F},$$

а F и $\mathcal{F}$ – степени однородности относительно переменных Δ_{i_1} и $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$ соответственно. Обобщенный тензор, соответствующий однородной функции (3), имеет следующий вид:

$$\psi^{M_1 M_2 M_3 \dots M_{\mathcal{F}}}_{N_1 N_2 N_3 \dots N_F} .$$

Как известно, максимальной компактной подгруппой группы $SU(2,2)$ является $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$. Алгебры групп $U(1)$, $SU(2)$, $SU(2)$ имеют следующие генераторы соответственно:

$$\frac{1}{4}(\mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44}) \; ; \; \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{21}, \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{22}) \; ; \; \mathcal{L}_{34}, \mathcal{L}_{43}, \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44}).$$

Чтобы найти унитарные представления, более удобно вместо (3) перейти к векторному базису:

$$|j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = n_{j_1 j_2 \lambda} N_{j_1 m_1} N_{j_2 m_2} S^{N - j_1 - j_2} \mathcal{L}_{21}^{j_1 - m_1} \mathcal{L}_{43}^{j_2 - m_2} \xi_1^a \eta_2^\beta \xi_3^c \eta_4^\delta , \tag{4}$$

где $S = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3 - \xi_4\eta_4$; $n_{j_1 j_2 \lambda}$ – нормирующий множитель; N – любое комплексное число; a, β, c, δ – не отрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям: $a+\beta = 2j_1$; $c+\delta = 2j_2$; $N_{jm} = [(j+m)!]^{1/2} [(2j)!(j-m)!]^{-1/2}$.

Степени однородности функции $f(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2 i_3})$ относительно ξ_i и η_i сохраняются в отдельности и равны:

$$\begin{aligned} N - j_1 - j_2 + a + c &= F , \\ N - j_1 - j_2 + \beta + \delta &= \mathcal{F} . \end{aligned} \tag{5}$$

Введем величину x с помощью следующего уравнения :

$$a + c = j_1 + j_2 + 2x , \tag{6}$$

тогда

$$a = j_1 + \lambda + x \; ; \quad \beta = j_1 - \lambda - x \; ; \quad c = j_2 - \lambda + x \; ; \quad \delta = j_2 + \lambda - x .$$

3. Определение генераторов представления

Пользуясь (1) и (2), мы получим следующие формулы:

$$\mathcal{L}_{12} |j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = \sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} \, |j_1, m_1 + 1; j_2 m_2 \lambda\rangle , \tag{7}$$

$$\mathcal{L}_{21} |j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = \sqrt{(j_1 + m_1)(j_1 - m_1 + 1)} \, |j_1, m_1 - 1; j_2 m_2 \lambda\rangle , \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{22}) |j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = m_1 |j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle . \tag{9}$$

Понятно, что для $\mathcal{L}_{34}$, $\mathcal{L}_{43}$, $\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{44})$ можно получить аналогичные выражения.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{13} |j_1 m_1 j_2 m_2 \lambda\rangle = {} & A_1 \sqrt{(j_1 - m_1)(j_2 + m_2)} \, |i_1 M_1 i_2 n_2 L\rangle \\ & + A_2 \sqrt{(j_1 - m_1)(j_2 - m_2 + 1)} \, |i_1 M_1 I_2 n_2 L\rangle + A_3 \sqrt{(j_1 + m_1 + 1)(j_2 + m_2)} \, |I_1 M_1 i_2 n_2 L\rangle \\ & + A_4 \sqrt{(j_1 + m_1 + 1)(j_2 - m_2 + 1)} \, |I_1 M_1 I_2 n_2 L\rangle , \end{aligned} \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_{31}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = -B_4\sqrt{(j_1+m_1)(j_2-m_2)}\,|i_1n_1i_2M_2\ell\rangle + B_3\sqrt{(j_1+m_1)(j_2+m_2+1)}\,|i_1n_1I_2M_2\ell\rangle + B_2\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2-m_2)}\,|I_1n_1i_2M_2\ell\rangle - B_1\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2+m_2+1)}\,|I_1n_1I_2M_2\ell\rangle \;, \tag{11}$$

$$\mathcal{L}_{14}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = A_1\sqrt{(j_1-m_1)(j_2-m_2)}\,|i_1M_1i_2M_2L\rangle - A_2\sqrt{(j_1-m_1)(j_2+m_2+1)}\,|i_1M_1I_2M_2L\rangle + A_3\sqrt{(j_1+m_1+1)(j_2-m_2)}\,|I_1M_1i_2M_2L\rangle - A_4\sqrt{(j_1+m_1+1)(j_2+m_2+1)}\,|I_1M_1I_2M_2L\rangle \;, \tag{12}$$

$$\mathcal{L}_{41}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = B_4\sqrt{(j_1+m_1)(j_2+m_2)}\,|i_1n_1i_2n_2\ell\rangle + B_3\sqrt{(j_1+m_1)(j_2-m_2+1)}\,|i_1n_1I_2n_2\ell\rangle - B_2\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2+m_2)}\,|I_1n_1i_2n_2\ell\rangle - B_1\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2-m_2+1)}\,|I_1n_1I_2n_2\ell\rangle \;, \tag{13}$$

$$\mathcal{L}_{23}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = -A_1\sqrt{(j_1+m_1)(j_2+m_2)}\,|i_1n_1i_2n_2L\rangle - A_2\sqrt{(j_1+m_1)(j_2-m_2+1)}\,|i_1n_1I_2n_2L\rangle + A_3\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2+m_2)}\,|I_1n_1i_2n_2L\rangle + A_4\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2-m_2+1)}\,|I_1n_1I_2n_2L\rangle \;, \tag{14}$$

$$\mathcal{L}_{32}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = -B_4\sqrt{(j_1-m_1)(j_2-m_2)}\,|i_1M_1i_2M_2\ell\rangle + B_3\sqrt{(j_1-m_1)(j_2+m_2+1)}\,|i_1M_1I_2M_2\ell\rangle - B_2\sqrt{(j_1+m_1+1)(j_2-m_2)}\,|I_1M_1i_2M_2\ell\rangle + B_1\sqrt{(j_1+m_1+1)(j_2+m_2+1)}\,|I_1M_1I_2M_2\ell\rangle \;, \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_{24}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = -A_1\sqrt{(j_1+m_1)(j_2-m_2)}\,|i_1n_1i_2M_2L\rangle + A_2\sqrt{(j_1+m_1)(j_2+m_2+1)}\,|i_1n_1I_2M_2L\rangle + A_3\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2-m_2)}\,|I_1n_1i_2M_2L\rangle - A_4\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2+m_2+1)}\,|I_1n_1I_2M_2L\rangle \;, \tag{16}$$

$$\mathcal{L}_{42}|j_1m_1j_2m_2\lambda\rangle = B_4\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2+m_2)}\,|i_1M_1i_2n_2\ell\rangle + B_3\sqrt{(j_1-m_1+1)(j_2-m_2+1)}\,|i_1M_1I_2n_2\ell\rangle + B_2\sqrt{(j_1+m_1+1)(j_2+m_2)}\,|I_1M_1i_2n_2\ell\rangle + B_1\sqrt{(j_1+m_1+1)(j_2-m_2+1)}\,|I_1M_1I_2n_2\ell\rangle \;. \tag{17}$$

Здесь $j_i-\frac{1}{2}=i_i\,;\ j_i+\frac{1}{2}=I_i\,;\ m_i-\frac{1}{2}=n_i\,;\ m_i+\frac{1}{2}=M_i\ (i=1,2)\ ;\ \lambda-\frac{1}{2}=\ell\,;\ \lambda+\frac{1}{2}=L$.
В формулах (10) – (17) функции A_i, B_i имеют следующий вид:

$$A_1 = -\frac{1}{2}\beta c\,\frac{N+J+2}{(2j_1+1)(2j_2+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_1\cdot 2j_2}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{i_1i_2L}} \;, \tag{18}$$

$$A_2 = -\beta\,\frac{N+q+1}{2j_1+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_1\cdot(2j_2+1)}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{i_1I_2L}} \;, \tag{19}$$

$$A_3 = c\,\frac{N-q+1}{2j_2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_2\,(2j_1+1)}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{I_1i_2L}} \;, \tag{20}$$

$$A_4 = B_1 = 2\,\frac{N-J}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{I_1I_2\ell}} \;, \tag{21}$$

$$B_2 = -\delta\,\frac{N-q+1}{2j_2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_1\,(2j_1+1)}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{i_1I_2\ell}} \;, \tag{22}$$

$$B_3 = a\,\frac{N+q+1}{2j_1+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_1(2j_2+1)}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{i_1I_2\ell}} \;, \tag{23}$$

$$B_4 = -\frac{1}{2}a\delta\,\frac{N+J+2}{(2j_1+1)(2j_2+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2j_1 2j_2}}\cdot\frac{n_{j_1j_2\lambda}}{n_{i_1i_2\ell}} \;, \tag{24}$$

где $J=j_1+j_2\;,\; q=j_1-j_2$.

Условия неприводимости можно получить на основании следующего соображения. Как видно из (10) – (24), при $\beta=0,\ \delta=0$ (это возможно только при $x>0$) все генераторы не могут перевести область с $J=2x$ в область с $J<2x$. Аналогично при $a=c=0$ (это возможно только при $x<0$) все генераторы группы не могут перевести область с $J=-2x$ в область с $J<-2x$. Таким образом, неприводимые представления реализуются при условии

$$J-2|x| = 0,1,2,\ldots$$

4. Условия унитарности представлений

Условие унитарности представления [8]

$$\mathcal{L}^{+} = \sigma \mathcal{L} \sigma, \quad \sigma = (1,1,-1,-1)_{diag.}$$

дает следующие уравнения:

$$\left| \frac{n_{I_1 I_2 \ell}}{n_{j_1 j_2 \lambda}} \right|^2 = 4(2j_1+2)(2j_2+2)\frac{\mathcal{J}-N}{(\beta+1)(c+1)(\mathcal{J}+\bar{N}+3)}, \tag{25}$$

$$\left| \frac{n_{I_1 i_2 \ell}}{n_{j_1 j_2 \lambda}} \right|^2 = \frac{2j_1+2}{2j_2+1} \cdot \frac{\delta(q-N-1)}{(\beta+1)(q+\bar{N}+2)}, \tag{26}$$

$$\left| \frac{n_{i_1 I_2 \ell}}{n_{j_1 j_2 \lambda}} \right|^2 = \frac{2j_2+2}{2j_1+1} \cdot \frac{a}{c+1} \cdot \frac{q+N+1}{q-\bar{N}-2}, \tag{27}$$

$$\left| \frac{n_{i_1 i_2 \ell}}{n_{j_1 j_2 \lambda}} \right|^2 = \frac{1}{4(2j_1+1)(2j_2+1)} \cdot \frac{a\delta(\mathcal{J}+N+2)}{\mathcal{J}-\bar{N}-1}. \tag{28}$$

Из требования положительности правых частей уравнений (25) - (28) мы получим две серии представлений:

1. $N = -\frac{3}{2} + i\rho$ (главная серия). Здесь ρ - любое вещественное число. Решение уравнений (25) - (28) имеет вид:

$$n_{j_1 j_2 \lambda} = c \cdot 2^{j_1+j_2} \left[\frac{(2j_1+1)!\,(2j_2+1)!}{a!\,\beta!\,c!\,\delta!} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

2. $\mathcal{J}m\, N = 0$ (дополнительная серия). В этом случае $2|x|$ должно быть целым числом и $-2 < N < -1$. Решение уравнений (25) - (28) имеет вид:

$$n_{j_1 j_2 \lambda} = c \cdot 2^{j_1+j_2} \left[\frac{(2j_1+1)!\,(2j_2+1)!\,\Gamma(\mathcal{J}-N)\,\Gamma(q-N-1)}{a!\,\beta!\,c!\,\delta!\,\Gamma(\mathcal{J}+N+3)\,\Gamma(q+N+2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

В формулах (29), (30) c - некоторая константа. Таким образом, вырожденные неприводимые унитарные представления группы $SU(2,2)$, отвечающие данной паре чисел (N, x), реализуемые в пространстве векторов (4), задаются формулами (10) - (24), (29) (для главной серии) и (30) (для дополнительной серии).

В заключение автор искренне благодарит Нгуена Ван Хьеу за ценные обсуждения и замечания.

Литература

1. E.Cunningham, Proc. London Math.Soc., 8, 77 (1909);
H.Bateman . Proc. London Math. Soc., 8, 223(1910).
2. P.A.M.Dirac. Proc.Roy.Soc., A 177, 148(1938);
J.A.Schouten. Rev.Mod.Phys., 21, 421(1949);
H.A.Kastrup, Nucl.Phys., 50, 561 (1966).
3. P.Budini, C.Fronsdal. Phys. Rev. Lett., 14, 968(1965).
4. Nguyen van Hieu. Yalta Lectures, Yalta, 1966.
5. Y.Murai. Progr.Theor.Phys., 9, 147(1953);
М.Л. Граев. ДАН, 98, 517 (1954);
A.Kihlberg, V.F.Muller, F.Halbwasch. Preprint CERN, 66/250/5-TH.644.
6. C.Fronsdal. The representations of SL (n,C).Preprint UCLA.
7. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ, Р-2886, Дубна, 1966.
8. C.Fronsdal. High energy Physics and elementary particles, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 сентября 1966 г.