ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5-2003-156

И. Р. Ломидзе*

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ B-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

Направлено в «Georgian Mathematical Journal»

*Кафедра теоретической физики Тбилисского государственного университета им. Иванэ Джавахишвили

2003

1. В работе автора настоящей статьи [1] была определена функция

$$\mathrm{B}_n(r_0,r_1,\ \dots,r_n)=\mathrm{B}_n(\mathbb{r})=$$

$$=\begin{cases} 1, \quad \text{если } n=0, \\ \det^{-1}\left[x_j^{i-1}\right]_1^n \det\left[x_j^{i-1}\int\limits_{x_{j-1}/x_j}^{1} u^{i-1}(1-u)^{r_j-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(\dfrac{x_j u - x_k}{x_j - x_k}\right)^{r_k-1} du\right]_1^n, \text{ если } n\geq 1 \\ \qquad (0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

и поставлена задача: при произвольных комплексных значениях параметров r_j доказать справедливость формулы

$$\mathrm{B}_n(\mathbb{r}) =\prod\nolimits_{j=0}^{n}\Gamma(r_j)\,/\,\Gamma(\sum\nolimits_{j=0}^{n} r_j), \qquad (2)$$

где $\Gamma(t)=\int\limits_0^{\infty} e^{-u}u^{t-1}du$ – гамма-функция Эйлера.

Формула (2) при $n=0$ справедлива по определению (1), а при $n=1$ сводится к известной формуле Эйлера:

$$\mathrm{B}_1(\mathbb{r})=\mathrm{B}(r_0,r_1)=\int\limits_0^1 u^{r_0-1}(1-u)^{r_1-1}du=\Gamma(r_0)\Gamma(r_1)/\Gamma(r_0+r_1), \qquad (3)$$

где $\mathrm{B}(r_0,r_1)$ – бета-функция Эйлера, определенная при произвольных комплексных значениях переменных r_0 и r_1 ($\mathrm{Re}\,r_0>0$, $\mathrm{Re}\,r_1>0$).

В работе [1] доказана справедливость формулы (2) при $r_0>0$, $r_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,n}$. Таким образом, требуется аналитически продолжить соотношение, справедливое на множестве, не имеющем точки сгущения.

В настоящей статье эта задача решена при n=2 и показаны сложности, возникающие при $n\geq 3$.

2. Интегралы

$$b_{ij}=\int\limits_{x_{j-1}/x_j}^{1} u^{i-1}(1-u)^{r_j-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{x_j u - x_k}{x_j - x_k}\right)^{r_k-1} du, \quad i,j=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

фигурирующие в определении (1), можно выразить через гипергеометрическую функцию (ГГФ) от n переменных. В частности, при n=2 воспользуемся формулой Эйлера (см., напр., [2], 2.1(10)) для ГГФ Гаусса

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-zu)^{-a}du = {}_2F_1(a,b;c;z) =$$

$$= {}_2F_1(b,a;c;z) \equiv {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b;z\\ c\end{matrix}\right]. \quad (\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0) \qquad (5)$$

Там где это не вызовет неясностей, будем писать ${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b;c;z)$.

Из формулы (4) получаем

$$b_{i1} = \int_0^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_1-1}\left(\frac{x_1 u - x_2}{x_1 - x_2}\right)^{r_2-1} du, \qquad (6_1)$$

$$b_{i2} = \int_{x_1/x_2}^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_2-1}\left(\frac{x_2 u - x_1}{x_2 - x_1}\right)^{r_1-1} du. \qquad (6_2)$$

$$(i=1,2)$$

Введем обозначение $x_1/x_2 = z$ и сделаем подстановку в интеграле (6_2):

$$u = 1-\widetilde{u}(1-z); \qquad \widetilde{u} = \frac{1-u}{1-z}, \qquad 1-\widetilde{u} = \frac{u-z}{1-z}.$$

Получим

$$b_{i1} = (1-z)^{1-r_2}\int_0^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_1-1}(1-zu)^{r_2-1}du, \qquad (7_1)$$

$$b_{i2} = (1-z)^{r_2}\int_0^1 [1-\widetilde{u}(1-z)]^{r_0+i-2}\,\widetilde{u}^{\,r_2-1}(1-\widetilde{u})^{r_1-1}d\widetilde{u}. \qquad (7_2)$$

Интегралы (7) являются однозначными аналитическими функциями переменной z, если $|\arg(1-z)|<\pi$, $\mathrm{Re}\,r_j>0$, $j=\overline{0,2}$. В этом случае, учитывая интегральное представление (5), после очевидных упрощений из определения (1) получим

$$\mathbb{B}_2(\mathbf{r}) = \mathbb{B}_2(r_0,r_1,r_2) = (x_2-x_1)^{-1}\det\left[x_j^{i-1}b_{ij}\right]_{i,j=1,2} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \int_0^1 u^{r_0-1}(1-u)^{r_1-1}(1-zu)^{r_2-1}du & \int_0^1 [1-(1-z)u]^{r_0-1}u^{r_2-1}(1-u)^{r_1-1}du \\ z\int_0^1 u^{r_0}(1-u)^{r_1-1}(1-zu)^{r_2-1}du & \int_0^1 [1-(1-z)u]^{r_0}u^{r_2-1}(1-u)^{r_1-1}du \end{bmatrix} =$$

$$(\mathrm{Re}\,r_j>0, \quad j=\overline{0,2})$$

$$= \det\begin{bmatrix} F(1-r_2, r_0;\ r_0+r_1;\ z)\dfrac{\Gamma(r_0)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_0+r_1)} & F(r_2, 1-r_0;\ r_1+r_2;\ 1-z)\dfrac{\Gamma(r_2)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_2+r_1)} \\ zF(1-r_2, r_0+1;\ r_0+r_1+1;\ z)\dfrac{\Gamma(r_0+1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_0+r_1+1)} & F(r_2, -r_0;\ r_1+r_2;\ 1-z)\dfrac{\Gamma(r_2)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_2+r_1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\Gamma(r_0)\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_0+r_1+r_2)}D(\mathbf{r};z), \qquad (8)$$

где введено новое обозначение

$$D(\mathbf{r};z) =$$

$$= \frac{\Gamma(r)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_0+r_1)}\det\begin{bmatrix} F(1-r_2, r_0;\ r_0+r_1;\ z) & F(r_2, 1-r_0;\ r_1+r_2;\ 1-z) \\ \dfrac{zr_0}{r_0+r_1}F(1-r_2, r_0+1;\ r_0+r_1+1;\ z) & F(r_2, -r_0;\ r_1+r_2;\ 1-z) \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Здесь для краткости обозначено $r = r_0 + r_1 + r_2$.

Из формулы (8) следует, что для доказательства равенства (2) при $n=2$ достаточно показать, что

$$D(\mathbf{r};z) = 1, \quad z \in [0,\infty). \qquad (10)$$

Отметим, что точки $z=0$ и $z=1$ являются особыми для определенной формулой (9) функции $D(\mathbf{r};z)$, т.к. эти точки являются особыми для ГГФ Гаусса. Как известно,

$$F(a,b;c;0) = 1, \qquad (11_1)$$

а при $z=1$ имеем (см., напр., [3], 14.11)

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad (11_2)$$

$$\mathrm{Re}(c-a-b)>0, \quad c \neq 0, -1, -2, \ldots.$$

Учитывая формулы $(11_{1,2})$, легко показать, что

$$D(\mathbf{r};0) = 1, \quad \text{если} \quad \mathrm{Re}(r_1+r_0)>0, \qquad (12_1)$$

$$D(\mathbf{r};1) = 1, \quad \text{если} \quad \mathrm{Re}(r_1+r_2-1)>0. \qquad (12_2)$$

Таким образом, соотношение (10) справедливо в обеих особых точках, если $\mathrm{Re}\,r_j>0$, $j=\overline{0,2}$ и $\mathrm{Re}(r_1+r_2-1)>0$.

ГГФ Гаусса $F(a,b;c;z)$ определена при произвольных комплексных значениях параметров a, b, c ($c\neq 0, -1, -2, \ldots$). Поэтому формулы (8) и (9) дают аналитическое продолжение функции $B_2(\mathbb{r})$ в комплексную область значений параметров r_0, r_1, r_2.

Теорема 1. *a) при произвольных комплексных значениях параметров* r_j, $\operatorname{Re} r_j > 0$, $j=\overline{0,2}$, *определенная формулой (9) функция* $D(\mathbb{r}; z)$ *является аналитической функцией переменной z на всей комплексной плоскости и, следовательно, не зависит от z.*

b) на всей комплексной плоскости переменной z выполняется равенство

$$F(a,b;c;\,z)F(1-a,-b;1-c;\,z)+z\frac{b(c-a)}{c(1-c)}F(a,b+1;\,c+1;z)F(1-a,1-b;\,2-c;\,z)=1. \quad (13)$$

Доказательство: Воспользуемся известным соотношением [3]

$$F(a,\,b;\,c;\,1-z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,\,b;\,a+b-c+1;\,z)+$$
$$+z^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(c-a,\,c-b;\,c-a-b+1;\,z), \quad (14)$$
$$(\,|\arg(1-z)|<\pi)$$

которое в явном виде показывает характер особенности ГГФ Гаусса $F(a,b;c;z)$ в точке $z=1$ (в этой точке начинается разрез вдоль положительного направления вещественной оси). Применяя (14), преобразуем второй столбец в определении (9). Получим

$$D(\mathbb{r};z)=D_1(z)+\;z^{r_1+r_0}\frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_0+r_1+r_2)\Gamma(-r_0-r_1)}{\Gamma(r_2)\Gamma(-r_0)\Gamma(r_0+r_1)}D_2(z), \quad (15)$$

причем обе функции $D_1(z)$ и $D_2(z)$ регулярны в точке $z=0$:

$$D_1(z)=\det\begin{bmatrix} F(1-r_2,\,r_0;\,r_0+r_1;\,z) & \dfrac{r}{r_0+r_1-1}F(1-r_0,\,r_2;\,2-r_0-r_1;\,z) \\ \dfrac{zr_0}{r_0+r_1}F(1-r_2,\,r_0+1;\,r_0+r_1+1;\,z) & F(-r_0,\,r_2;\,1-r_0-r_1;\,z)\end{bmatrix}, \quad (16_1)$$

$$D_2(z)=\det\begin{bmatrix} F(r_0,\,1-r_2;\;r_0+r_1;\;z) & F(r_1,\,r-1;\;r_0+r_1;\;z) \\ F(r_0+1,\,1-r_2;\;r_0+r_1+1;\;z) & F(r_1,\,r;\,r_0+r_1+1;\,z)\end{bmatrix}. \quad (16_2)$$

Точка $z=1$ является особой для обеих функций $D_1(z)$ и $D_2(z)$, т. к. условие $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$ не выполняется одновременно для ГГФ, стоящих в первом и во втором столбце формул (16):

$$D_1(z)\colon \begin{cases}\operatorname{Re}(r_0+r_1-r_0+r_2-1)>0 \\ \operatorname{Re}(2-r_1-r_0+r_0-r_2-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Re}(r_1+r_2-1)>0 \\ \operatorname{Re}(1-r_1-r_2)>0\end{cases} \Rightarrow \left\{r_j|\; j=\overline{0,2}\right\}\in\varnothing,$$

$$D_2(z)\colon \begin{cases}\operatorname{Re}(r_1+r_2-1)>0 \\ \operatorname{Re}(r_0-r+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Re}(r_1+r_2-1)>0 \\ \operatorname{Re}(1-r_1-r_2)>0\end{cases} \Rightarrow \left\{r_j|\; j=\overline{0,2}\right\}\in\varnothing.$$

Поэтому будем изучать эти функции в круге $|z|<1$, там, где гипергеометрический ряд Гаусса абсолютно сходится и функции (16) являются аналитическими.

Учитывая известное свойство ГГФ Гаусса (см., напр., [4], 15.3.3)

$$F(c-a,\,c-b;\,c;\,z)=(1-z)^{a+b-c}F(a,b;\,c;\,z),\quad (|\arg(-z)|<\pi) \quad (17)$$

легко заметить, что второй столбец в формуле (15_2) пропорционален первому. Поэтому всюду в круге $|z|<1$, кроме точек $z\in(0,1)$, имеем

$$D_2(z)=0,\quad (|z|<1\,,\; z\notin(0,1)) \quad (18)$$

т.е. сингулярное слагаемое в формуле (15) исчезает и получаем

$$D(\mathbb{r};\,z)=D_1(z)=\det\begin{bmatrix} F(a,b;c;\,z) & z\dfrac{b(a-c)}{c(1-c)}F(1-a,1-b;\,2-c;\,z) \\ F(a,b+1;\,c+1;\,z) & F(1-a,-b;\,1-c;\,z)\end{bmatrix} \quad (19)$$
$$(|z|<1,\quad z\notin(0,1))$$

(здесь обозначено $a=1-r_2$, $b=r_0$, $c=r_0+r_1$).

Согласно (19), функция $D(\mathbb{r};z)$ регулярна в точке $z=0$. Поэтому в этой точке существует её производная произвольного порядка m, $m\in\mathbb{N}$. Учитывая, что

$$\frac{d^m}{dz^m}F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+m)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)}F(a+m,\,b+m;\,c+m;z)\;(m=1,\,2,\ldots) \quad (20)$$

и, следовательно, в точке $z=0$ производная m-го порядка ГГФ Гаусса является рациональной функцией от аргументов a, b, c. Поэтому при $z=0$ рациональной функцией является и производная m-го порядка от функции $D(\mathbb{r};z)$:

$$\frac{d^m}{dz^m}D(\mathbb{r};z)\Big|_{z=0}=R(m;\,r_0,\,r_1,\,r_2) \quad (21)$$

(явный вид рациональной функции $R(m;r_0,\,r_1,\,r_2)$ приведен в Дополнении 1).

В работе [1] показано, что при всех $r_0>0$, $r_{1,2}\in\mathbb{N}$ выполняется соотношение (2), правая часть которого не зависит от z. Следовательно, рациональная функция $R(m;\,r_0,\,r_1,\,r_2)$ в правой части формулы (21) равна нулю при всех $r_0>0$, $r_{1,2}\in\mathbb{N}$, т.е. равна нулю тождественно:

$$R(m; r_0, r_1, r_2) \equiv 0.$$

Итак, для всех значений параметров r_j, $\mathrm{Re}\, r_j > 0$, $j = \overline{0,2}$, имеем

$$\frac{d^m}{dz^m} D(\mathbf{r}; z)\Big|_{z=0} = 0, \qquad m = 1, 2, \dots, \quad (|z|<1) \tag{22}$$

т.е. если $\mathrm{Re}\, r_j > 0$, $j = \overline{0,2}$, то функция $D(\mathbf{r}; z)$ не зависит от переменной z в круге $|z|<1$ и, по принципу аналитического продолжения, является аналитической и постоянной на всей комплексной плоскости z. Отсюда, учитывая (12_1), получаем тождество (10). Подставляя тождество (10) в формулу (19), получаем требуемое равенство (13).

3. Из доказанной теоремы вытекает несколько следствий.

Следствие 1. При n=2 формула (2) справедлива для произвольных значений r_j, $\mathrm{Re}\, r_j > 0$, $j = \overline{0,2}$.

Для доказательства достаточно подставить (10) в формулу (8).

Следствие 2. Применяя формулы Гаусса и выражая входящие в формулу (13) ГГФ через смежные функции (смежными для функции $F(a,b;c;z)$ называются шесть ГГФ: $F(a\pm1, b; c; z)$, $F(a, b\pm1; c; z)$, $F(a, b; c\pm1; z)$), получим еще ряд соотношений для различных гипергеометрических функций.

Пример 1. Заменим в (13) обозначение параметра $c \to c = c_1 - 1$ и применим формулы Гаусса

$$\begin{aligned} &\alpha_1 F(a,b;\, c;\, z) + \beta_1 F(a, b+1;\, c; z) + \gamma_1 F(a,b; c-1;\, z) = 0, \\ &\alpha_2 F(a,b;\, c;\, z) + \beta_2 F(a, b-1;\, c; z) + \gamma_2 F(a,b; c+1;\, z) = 0, \end{aligned} \tag{*}$$

где (см., напр., [2], 2.8(42) и 2.8(43))

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -b + c - 1, \quad \beta_1 = b, \quad \gamma_1 = 1 - c, \\ &\alpha_2 = c(1-z), \quad \beta_2 = -c, \quad \gamma_2 = (c-a)z. \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\det\begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & b(z-1)F(1-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \\ F(a, b+1;\, c;\, z) & (c-b-1)F(1-a, -b;\, 2-c;\, z) \end{bmatrix} = c - 1. \tag{23}$$

Отсюда, заменяя обозначения $a \rightleftarrows b$ и учитывая свойство симметрии (5), находим

$$\det\begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & a(z-1)F(1-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \\ F(a+1, b;\, c;\, z) & (c-a-1)F(-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \end{bmatrix} = c - 1. \tag{24}$$

Аналогично, переобозначая $b \to b_1 = b+1$ и учитывая формулы (*), получаем

$$\det\begin{bmatrix} F(a,b; c; z) & z\dfrac{(c-a)(c-b)}{c(1-c)}F(1-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \\ F(a,b;\, c+1;\, z) & (1-z)F(1-a, 1-b;\, 1-c;\, z) \end{bmatrix} = 1. \tag{25}$$

Пример 2. Обозначая через a_1, b_1, c_1 параметры гипергеометрических функций во второй строке определителей (23)-(24) и переставляя первую строку со второй, получим формулы:

$$\det\begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & (b-c)F(1-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \\ F(a, b-1;\, c;\, z) & (1-z)(b-1)F(1-a, 2-b;\, 2-c;\, z) \end{bmatrix} = c - 1, \tag{23$'$}$$

$$\det\begin{bmatrix} F(a, b; c; z) & (a-c)F(1-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \\ F(a-1, b;\, c;\, z) & (1-z)(a-1)F(2-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \end{bmatrix} = c - 1. \tag{24$'$}$$

$$\det\begin{bmatrix} F(a,b; c; z) & (1-z)F(1-a, 1-b;\, 2-c;\, z) \\ F(a,b;\, c-1;\, z) & z\dfrac{(c-a-1)(c-b-1)}{(c-1)(c-2)}F(1-a, 1-b;\, 3-c;\, z) \end{bmatrix} = -1. \tag{25$'$}$$

Замечание: из доказанной теоремы следует, что особенности ГГФ, фигурирующих в формулах (19) и (23)-(25$'$) (разрез вдоль луча $z\in[1,\infty)$) сокращаются. Поэтому точка z=1 является регулярной точкой для этих определителей и найденные соотношения выполняются в этой точке и в тех случаях, когда нарушены условия применимости формулы (11_2). Для иллюстрации в Дополнении 2 рассмотрена формула (25).

Следствие 3. Воспользуемся в формуле (24) соотношениями (см., напр., [2], 2.8(21) и 2.8(23))

$$\begin{aligned} &aF(a+1, b;\, c; z) = z^{1-a}\, d/dz\big(z^a u_1(z)\big), \\ &(a-c+1)F(-a, 1-b;\, 2-c;\, z) = z^{c-a}(1-z)^{1+a+b-c}\, d/dz\big(z^a u_5(z)\big), \end{aligned}$$

где (см., напр., [2], 2.9(1), (2) и 2.9(17), (18))

$$u_1(z)=F(a,b;\,c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;\,c;\,z),$$
$$u_5(z)=z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a,1-b;\,2-c;\,z)=z^{1-c}F(1+a-c,1+b-c;\,2-c;\,z) \qquad (**)$$

обозначают куммеровские решения гипергеометрического уравнения Гаусса. После упрощений получим вронскиан этих двух решений $u_1(z)$ и $u_5(z)$:

$$w_{15}(z)=w\{u_1(z),u_5(z)\}=\det\begin{bmatrix} u_1(z) & u_5(z)\\ d/dz\,u_1(z) & d/dz\,u_5(z)\end{bmatrix}=(1-c)z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1} \qquad (26)$$

(см., напр., [5], (2.1.12)).

Отметим, что вытекающий из формул (9) и (10) результат

$$\det\begin{bmatrix} F(a,b;\,c;\,z) & F(1-a,1-b;c-a-b+1;1-z)\\ z\dfrac{b}{c}F(a,b+1;\,c+1;\,z) & F(1-a,-b;c-a-b+1;1-z)\end{bmatrix}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a+1)\Gamma(c-b)} \qquad (27)$$

сводится к формуле для вронскиана $w_{16}(z)\equiv w\{u_1(z),u_6(z)\}$, если учесть связь ГГФ, стоящих во втором столбце определителя, с $u_6(z)$ – куммеровским решением гипергеометрического уравнения Гаусса (см., напр., [2], 2.9(25) и 2.8(23)):

$$F(1-a,1-b;c-a-b+1;1-z)=z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}u_6(z),$$
$$F(1-a,-b;\,c-a-b+1;\,1-z)=(a-c)^{-1}z^{c}(1-z)^{1+a-c}d/dz\left[(1-z)^{b}u_6(z)\right]$$

и формулу (см., напр., [2], 2.8(25))

$$b\,F(a,b+1;\,c+1;z)=c\,(1-z)^{1-b}(a-c)^{-1}d/dz\left((1-z)^{b}u_1(z)\right).$$

После упрощений получим

$$w_{16}(z)=-w_{61}(z)=-\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}. \qquad (28)$$

Учитывая соотношения Куммера, связывающие любые три из решений $u_1(z),\dots,u_6(z)$ гипергеометрического уравнения Гаусса (см., напр., [2], 2.9(35)-(43))

$$u_q(z)=\alpha_q u_1(z)+\beta_q u_5(z),\qquad q=\overline{1,6}, \qquad (29)$$

где коэффициенты α_q и β_q не зависят от z, из формул (26) и (29) получим

$$w_{pq}(z)\equiv w\{u_p(z),u_q(z)\}=K_{pq}z^{-c}(1-z)^{c-a-b-1}, \qquad (30)$$

где

$$K_{pq}=-K_{qp}=(1-c)(\alpha_p\beta_q-\alpha_q\beta_p)=(1-c)\det\begin{bmatrix}\alpha_p & \beta_p\\ \alpha_q & \beta_q\end{bmatrix},\quad p,q=\overline{1,6}. \qquad (31)$$

Коэффициенты K_{pq} для всех нетривиальных значений индексов $p,q=\overline{1,6}$ выписаны в Дополнении 4 (см. формулы $(A.15)$ - $(A.29)$).

Следствие 4. Преобразуем левую сторону формулы (30):

$$u_p(z)\frac{d}{dz}u_q(z)-u_q(z)\frac{d}{dz}u_p(z)=u_p^2(z)\frac{d}{dz}\left[u_q(z)/u_p(z)\right].$$

Отсюда, учитывая формулу (30), находим

$$\int_{z_0}^{z}u_p^{-2}(z)\,w_{pq}(z)\,dz=\frac{u_q(z)}{u_p(z)}-\frac{u_q(z_0)}{u_p(z_0)}. \qquad (32)$$

Положим здесь $p=1$. Учитывая формулы (29)-(31) и (**), получим

$$\int_{z_0}^{z}\frac{(1-c)(1-t)^{c-a-b-1}}{t^{c}\left[F(a,b;c;t)\right]^{2}}dt=$$
$$=\frac{(1-z)^{c-a-b}F(1-a,1-b;\,2-c;\,z)}{z^{c-1}F(a,b;c;\,z)}-\frac{(1-z_0)^{c-a-b}F(1-a,1-b;2-c;\,z_0)}{z_0^{c-1}F(a,b;c;\,z_0)}. \qquad (33)$$

Подставляя в (33) $z_0=0$ и $z=1$, получим

$$\int_0^1\left[F(a,b;c;t)\right]^{-2}t^{-c}(1-t)^{c-a-b-1}dt=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}.\quad (\mathrm{Re}(a+b)<\mathrm{Re}\,c<1) \qquad (34)$$

Полагая в (33) $z_0=1$, $z=\infty$, после упрощений (см. Дополнение 5) получим

$$\int_1^{\infty\pm i0}\frac{\Gamma^2(c)}{t^{c}(t-1)^{a+b-c+1}\left[F(a,b;c;t)\right]^{2}}dt=e^{\pm i\pi b}\sin\pi b\,\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b). \qquad (35)$$

$$\left(\mathrm{Re}(a-b)\le 0,\quad \mathrm{Re}(c-a-b)>0\right)$$

Следствие 5. Выбирая различные частные значения параметров ГГФ Гаусса, из формул (13), (23)-(28) и (30)-(35) получим ряд соотношений для различных элементарных и специальных функций.

Пример 6. Полагая в (33) $b=1-a$, $t=(1-\xi)/2$ и учитывая, что (см., [4], 15.4.16)

$$F(a,1-a;c;\,(1-\xi)/2)=\Gamma(c)[(\xi-1)/(\xi+1)]^{(1-c)/2}P_{-a}^{1-c}(\xi),$$
$$F(1-a,a;2-c;\,z)=F(a,1-a;2-c;\,z)=\Gamma(2-c)[(-z)/(1-z)]^{(c-1)/2}P_{-a}^{c-1}(1-2z),$$
$$(\xi\notin(-1,1),\quad |\arg(\xi-1)|<\pi,\quad |\arg(\xi+1)|<\pi),$$

где $P_\nu^\mu(\xi)$ – функция Лежандра, переобозначая $\mu=1-c$, $\nu=-a$, $\eta=1-2z$, $\eta_0=1-2z_0$, после упрощений получим

$$\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{d\xi}{(\xi^2-1)\left[P_\nu^\mu(\xi)\right]^2}=\frac{\pi}{2\sin\pi\mu}\left\{\frac{P_\nu^\mu(\eta)}{P_\nu^{-\mu}(\eta)}-\frac{P_\nu^\mu(\eta_0)}{P_\nu^{-\mu}(\eta_0)}\right\}.$$

Пример 7. Применим формулу (33) при $c\to 1$. Полагая $c=1-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, перейдем к пределу $\varepsilon\to 0$ (легко видеть, что интеграл (33) сходится равномерно), учитывая (17). Получим

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t(1-t)^{a+b}[F(a,b;1;t)]^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\left\{\frac{z^{\varepsilon}F(1-a,1-b;1+\varepsilon;z)}{F(1-\varepsilon-a,1-\varepsilon-b;1-\varepsilon;z)}-\frac{z_0^{\varepsilon}F(1-a,1-b;1+\varepsilon;z_0)}{F(1-\varepsilon-a,1-\varepsilon-b;1-\varepsilon;z_0)}\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\frac{z^{\varepsilon}F(1-a,1-b;1+\varepsilon;z)}{F(1-\varepsilon-a,1-\varepsilon-b;1-\varepsilon;z)}-\frac{z_0^{\varepsilon}F(1-a,1-b;1+\varepsilon;z_0)}{F(1-\varepsilon-a,1-\varepsilon-b;1-\varepsilon;z_0)}\right\}.$$

Применяя здесь интегральное представление (5) и учитывая непрерывность гамма-функции, находим

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t(1-t)^{a+b}[F(a,b;1;t)]^2}=\ln\frac{z}{z_0}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{z^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(\varepsilon,z)-z_0^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(\varepsilon,z_0)\right\},$$

где использовано обозначение

$$f(\varepsilon,z)\equiv\frac{\int_0^1 u^{1-b-1}(1-u)^{b+\varepsilon-1}(1-zu)^{a-1}du}{\int_0^1 u^{1-b-\varepsilon-1}(1-u)^{b-1}(1-zu)^{a+\varepsilon-1}du}.$$

Выполняя дифференцирование под знаком интеграла и учитывая (5) и (A.2), в пределе $\varepsilon\to 0$ получим

$$\int_{z_0}^{z}\frac{t^{-1}(1-t)^{-a-b}dt}{[F(a,b;1;t)]^2}=\ln\frac{z}{z_0}+\frac{\sin\pi b}{\pi}\left[\frac{I(a,b;z)}{F(1-a,1-b;1;z)}-\frac{I(a,b;z_0)}{F(1-a,1-b;1;z_0)}\right],\quad(36)$$

$$(0<\operatorname{Re}b<1)$$

где $I(a,\,b;\,z)$ обозначает интеграл

$$I(a,b;z)\equiv\int_0^1 u^{-b}(1-u)^{b-1}(1-zu)^{a-1}\ln\frac{u(1-u)}{1-zu}du.$$

При $a=1$ выражение (36) упрощается и сводится к известному соотношению (см., напр., [4], 6.6.8)

$$F(1,2-b;2;z)=-z^{-1}\mathrm{B}_z(1,b-1)=z^{-1}(b-1)^{-1}[1-(1-z)^{b-1}].\quad(***)$$

Действительно, учитывая в левой части формулу $F(1,b;1;t)=(1-t)^{-b}$ (см., напр., [4], 15.2.12), а в правой части – тождество $F(0,b;c;z)=1$, получаем

$$\int_{z_0}^{z}t^{-1}(1-t)^{-1+b}dt=\ln\frac{z}{z_0}+\frac{\sin\pi b}{\pi}\int_0^1 u^{-b}(1-u)^{b-1}\ln\frac{1-z_0u}{1-zu}du.$$

$$(0<\operatorname{Re}b<1)$$

Отсюда, дифференцируя по z и учитывая в правой части интегральное представление (5), после очевидных упрощений получаем формулу (***).

Пример 8. Подставляя в (36) $a=b=1/2$ и учитывая, что (см., напр., [4], 17.3.9)

$$F(1/2,\ 1/2;\,1;\,z)=(2/\pi)\mathbb{K}(z)=(2/\pi)F(\pi/2|\,z),$$

где $\mathbb{K}(z)=F(\pi/2\,|\,z)$ полный эллиптический интеграл первого рода, находим

$$\frac{\pi^2}{4}\int_{z_0}^{z}\left[t(1-t)\mathbb{K}^2(z)\right]^{-1}dt=\ln(z/z_0)+\frac{I(1/2,1/2,z)}{2\mathbb{K}(z)}-\frac{I(1/2,1/2,z_0)}{2\mathbb{K}(z_0)}.$$

Учитывая формулу (см. Дополнение 6, (A.33)), получаем

$$\int_{z_0}^{z}\left[t(1-t)\mathbb{K}^2(z)\right]^{-1}dt=-\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\mathbb{K}(1-z)}{\mathbb{K}(z)}-\frac{\mathbb{K}(1-z_0)}{\mathbb{K}(z_0)}\right\}.\quad(z\neq 0,\ z_0\neq 0)\quad(37)$$

В частности, находим

$$\int_{1/2}^{1}\left[t(1-t)\mathbb{K}^2(z)\right]^{-1}dt=\frac{4}{\pi}.\quad(37')$$

Аналогично, полагая в (37) $a=-b=-1/2$ и учитывая, что ([4], 17.3.10)

$$F(-1/2,\ 1/2;\ 1;\ z)=(2/\pi)\mathbb{E}(z)=(2/\pi)E(\pi/2\,|\,z),$$

где $\mathbb{E}(z)=E(\pi/2\,|\,z)$ полный эллиптический интеграл второго рода, находим

$$\frac{\pi^2}{4}\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t\mathbb{E}^2(t)}=\ln(z/z_0)+\frac{I(3/2,1/2,z)}{\pi F(3/2,1/2;1;z)}-\frac{I(3/2,1/2,z_0)}{\pi F(3/2,1/2;1;z_0)}.$$

Подставляя сюда (A.36), получаем

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t\mathbb{E}^2(t)}=-4\pi^{-1}\left\{(1-z)\frac{\mathbb{D}(1-z)}{\mathbb{E}(z)}-(1-z_0)\frac{\mathbb{D}(1-z_0)}{\mathbb{E}(z_0)}\right\}.\quad(38)$$

Здесь $\mathbb{D}(z)$ – полный эллиптический интеграл третьего рода (см. [6], 8.111(5)).

Следствие 6. Из формулы (22), с учетом (19), (20) и (11_1), вытекает аналог формулы Заальшютца [9] (см. так же [2], 2.1(30)) (см. Дополнение 3)

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{\Gamma(a+m-k)\Gamma(b+m-k)\Gamma(c-k)\,m!}{\Gamma(a+1-k)\Gamma(b+1-k)\Gamma(c+1+m-k)\,k!(m-k)!}\times$$

$$\times\left[abc+ab(m-2k)+k(m-k)(c-a-b)\right]=0. \qquad (39)$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\quad a,b,c\in\mathbb{C})$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает соотношение для обобщенных (конечных) гипергеометрических рядов ${}_4F_3(\alpha_r;\rho_l;\,z)\big|_{z=1}$

$$abc\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}a+m-1,\ b+m-1,\ c-m-1,\ -m;\\ a,\ b,\ c;\end{matrix}\ 1\right]-$$

$$-2m(a+m-1)(b+m-1)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}a+m,\ b+m,\ c-m,\ -m+1;\\ a+1,\ b+1,\ c+1;\end{matrix}\ 1\right]=$$

$$=m(m-1)(c-a-b-2m+1)\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}a+m,\ b+m,\ c-m,\ -m+2;\\ a+1,\ b+1,\ c+1;\end{matrix}\ 1\right]. \qquad (40)$$

$$(m=1,2,\ldots)$$

Отметим, что ряд ${}_4F_3(\alpha_r;\rho_l;\,z)$ в правой части формулы (40) является рядом вида Заальшютца:

$$(a+m)+(b+m)+(c-m)+(-m+2)=(a+1)+(b+1)+(c+1)-1,$$

в то время как ряды в левой части этой формулы не являются таковыми.

Отметим так же, что соотношение (40) можно записать несколькими различными способами, применяя, например, формулу (см. [7в], 7.5.3.(21))

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,\ b,\ c,\ -m;\\ a-m+1,\ b-m+1,\ c+m-1;\end{matrix}\ 1\right]=$$

$$=\frac{m(m-1)(m+c-a-1)(m+c-b-1)}{(a-m+1)(b-m+1)(c+m-1)(c+m)}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}a+1,\ b+1,\ c,\ -m+2;\\ a+2-m,\ b+2-m,\ c+1+m;\end{matrix}\ 1\right].$$

4. При $n\geq 3$ интегралы (4) сводятся к ГГФ от $n-1$ переменных. Действительно, сделаем в формулах (4) подстановку

$$\widetilde{u}=1-u,\ \ j=1,\qquad \widetilde{u}=\frac{1-u}{1-x_{j-1}/x_j},\quad 1-\widetilde{u}=\frac{x_j u-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}},\ \ j\geq 2.$$

Получим

$$\mathrm{B}_n=\det{}^{-1}\left[x_j^{i-1}\right]_{i,j=\overline{1,n}}\det\left[x_j^{i-1}\widetilde{b}_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,n}}, \qquad (41)$$

где (для простоты пишем u вместо $\widetilde{u}$)

$$\widetilde{b}_{i1}=\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{x_j}{x_1-x_j}\right)^{r_j-1}\int_0^1 u^{r_0+i-2}(1-u)^{r_1-1}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{x_1}{x_k}u\right)^{r_k-1}du, \qquad (42_1)$$

$$\widetilde{b}_{ij}=\left(1-x_{j-1}/x_j\right)^{r_j}\int_0^1\left[1-\left(1-\frac{x_{j-1}}{x_j}\widetilde{u}\right)\right]^{i-1}\widetilde{u}^{\,r_j-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(1-\frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_k}\widetilde{u}\right)^{r_k-1}d\widetilde{u}. \qquad (42_j)$$

$$j=2,3,\ldots\qquad (i=\overline{1,n})$$

Интегралы (42) сходятся, если выполнены условия

$$r_0>0,\ \ r_j>0,\ \ j=\overline{1,n},\ \ 0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n.$$

По аналогии с интегральным представлением (5) введем обозначение

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\prod_{k=1}^{n}(1-z_k u)^{-b_k}du=F\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix};\,b_1,z_1;\ldots;b_n,z_n\right)=F\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix};\,\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right), \qquad (43)$$

где

$$\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n=\{b_1,z_1;\ldots;b_n,z_n\},\ \ n=1,2,\ldots\ .$$

Лемма. *Если* $|z_j|<1,\ j=\overline{1,n}$, *то для функции* $F\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix};\,\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)$, *определенной равенством (43), справедливо представление равномерно сходящимся рядом*

$$F\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix};\,\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)=\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1+\ldots+k_n}}{(c)_{k_1+\ldots+k_n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(b_j)_{k_j}z_j^{k_j}}{k_j!}, \qquad (44)$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

где $(a)_k$ *обозначает символ Похгаммера:*

$$(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=(-1)^k\frac{1}{(1-a)_{-k}},\quad k\in\mathbb{N}. \qquad (45)$$

Доказательство: При $n=1$ формула (44) справедлива – в этом случае она сводится к гипергеометрическому ряду Гаусса для ГГФ, определенной формулой (5). Пусть $n\geq 2$. Учитывая условие $|z_n|<1$, разложим подинтегральное выражение в (43) в (биномиальный) ряд по z_n. Получим

$$F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\ \{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\prod_{k=1}^{n-1}(1-z_k u)^{-b_k}(1-z_n u)^{-b_n}\,du=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-b_n+1)}{k_n!\,\Gamma(-b_n+1-k_n)}(-z_n)^{k_n}\int_0^1 u^{a+k_n-1}(1-u)^{c-a-1}\prod_{k=1}^{n-1}(1-z_k u)^{-b_k}du.$$

Отсюда, учитывая очевидное равенство

$$\frac{\Gamma(-b_n+1)}{\Gamma(-b_n+1-k_n)}=(-1)^{k_n}b_n(b_n+1)\dots(b_n+k_n-1)=(-1)^{k_n}\frac{\Gamma(b_n+k_n)}{\Gamma(b_n)},$$

получаем

$$F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\ \{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k_n)}{\Gamma(c+k_n)}\frac{\Gamma(b_n+k_n)}{k_n!\,\Gamma(b_n)}z_n^{\,k_n}F\left(\begin{matrix}a+k_n\\ c+k_n\end{matrix};\ \{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right).\qquad(46)$$

Сделаем индуктивное предположение

$$F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\ \{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1+\dots+k_{n-1}}}{(c)_{k_1+\dots+k_{n-1}}}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(b_j)_{k_j}z_j^{k_j}}{k_j!}\qquad(n=1,2,\dots)$$

и подставим в формулу (46). Учитывая равномерную сходимость рядов, после упрощений получим требуемый результат (44).

Замечание: При $n=2$ формулы (43) и (44) дают разложение в ряд функции Аппеля – гипергеометрической функции от двух переменных (см., напр., [2], 5.7(6), 5.8(5)), а формула (46) устанавливает связь ГГФ Аппеля с ГГФ Гаусса.

Предложение. При $n\geq 3$ коэффициенты ряда (44) удовлетворяют условиям Горна [8] для разложения ГГФ от многих переменных (см. так же [2], 5.7(2)): степенной ряд $\sum_{k_j=0,\ j=\overline{1,n}}^{\infty}A_{k_1\dots k_n}z^{k_1}\dots z^{k_n}$ от многих переменных z_1, ..., z_n определяет гипергеометрическую функцию от этих переменных, если отношения коэффициентов $(A_{k_1k_2\dots k_{j-1}k_j+1k_{j+1}\dots k_n})/(A_{k_1k_2\dots k_{j-1}k_jk_{j+1}\dots k_n})$ рациональны по переменным k_j, $j=\overline{1,n}$. Для коэффициентов ряда (44) эти условия выполнены.

Действительно, учитывая определение символа Похгаммера (45), из (44) получаем

$$\frac{A_{k_1k_2\dots k_{j-1}k_j+1k_{j+1}\dots k_n}}{A_{k_1k_2\dots k_{j-1}k_jk_{j+1}\dots k_n}}=\frac{a+k_1+\dots+k_j+\dots+k_n}{c+k_1+\dots+k_j+\dots+k_n}\,\frac{b_j+k_j}{k_j+1},\qquad(47)$$
$$\left(j=\overline{1,n}\right)$$

что и требовалось.

Следуя [2], введем операторы

$$\delta_j\equiv z_j\frac{\partial}{\partial z_j},\qquad j=\overline{1,n}.$$

Обозначим $G_j(\mathbb{k})$ и $\widetilde{G}_j(\mathbb{k})$ полиномы (степени $p_j=2$), стоящие в числителе и знаменателе правой части формулы (47)

$$\left(a+k_1+\dots+k_j+\dots+k_n\right)\left(b_j+k_j\right)\equiv G_j\left(k_1,\dots,k_j,\dots,k_n\right),$$
$$\left(c+k_1+\dots+k_j+\dots+k_n\right)\left(1+k_j\right)\equiv \widetilde{G}_j\left(k_1,\dots,k_j,\dots,k_n\right)\qquad j=\overline{1,n}\qquad(48)$$

и составим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left[\widetilde{G}_j\left(\delta_1,\dots,\delta_j,\dots,\delta_n\right)z_j^{-1}-G_j\left(\delta_1,\dots,\delta_j,\dots,\delta_n\right)\right]u\left(z_1,\dots,z_j,\dots,z_n\right)=0.\qquad(49)$$
$$j=\overline{1,n}$$

Теорема 2. *Определенная равенством (43) функция* $F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\ \{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)$ *удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных вида (49).*

Доказательство: Согласно Лемме, достаточно показать справедливость утверждения для ряда (44). Учитывая определение (48), видим, что при $n=1$ формула (49) принимает вид

$$\left[\left(c+z\partial/\partial z\right)\left(1+z\partial/\partial z\right)z^{-1}-\left(a+z\partial/\partial z\right)\left(b+z\partial/\partial z\right)\right]u(z)=0$$

и, следовательно, совпадает с гипергеометрическим уравнением Гаусса. Решение этого уравнения при $|z|<1$ имеет вид (44) (при $n=1$). Таким образом, в этом случае утверждение верно. Отметим, что при $n=2$ формула (49) совпадает с системой уравнений для функции Аппеля F_1 (см., напр., [2], 5.9.(9)), также представимой рядом (44) (при $n=2$).

Запишем левую часть системы уравнений (49) в следующем виде:

$$\begin{cases} \left[(c+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}+\delta_n)(1+\delta_j)z_j^{-1}-(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}+\delta_n)(b_j+\delta_j)\right]F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right), & (50_j)\\ \qquad j=\overline{1,n-1}, & \\ \left[(c+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}+\delta_n)(1+\delta_n)z_n^{-1}-(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}+\delta_n)(b_n+\delta_n)\right]F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right). & (50_n)\end{cases}$$

Сделаем индуктивное предположение

$$\left[(c+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})(1+\delta_j)z_j^{-1}-(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})(b_j+\delta_j)\right]F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)=0$$

$$j=\overline{1,n-1}$$

и воспользуемся формулой (46). В выражениях (50_j) получим

$$\left[(c+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}+\delta_n)(1+\delta_j)z_j^{-1}-(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}+\delta_n)(b_j+\delta_j)\right]F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)=$$

$$=\sum\nolimits_{k_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_n}(b_n)_{k_n}}{(c)_{k_n}}\left\{\frac{z_n^{k_n}}{k_n!}\left[(-k_n)(1+\delta_j)z_j^{-1}-(-k_n)(b_j+\delta_j)\right]F\left(\begin{matrix}a+k_n\\ c+k_n\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\delta_n\frac{z_n^{k_n}}{k_n!}\right]\left[(1+\delta_j)z_j^{-1}-(b_j+\delta_j)\right]F\left(\begin{matrix}a+k_n\\ c+k_n\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)\right\}=$$

$$=\sum\nolimits_{k_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_n}(b_n)_{k_n}}{(c)_{k_n}}\left\{\left[(\delta_n-k_n)\frac{z_n^{k_n}}{k_n!}\right]\left[(1+\delta_j)z_j^{-1}-(b_j+\delta_j)\right]F\left(\begin{matrix}a+k_n\\ c+k_n\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)\right\}=0,$$

$$j=\overline{1,n-1}$$

поскольку $(\delta_n-k_n)z_n^{k_n}=0,\ k_n=0,1,\ldots$.

Учитывая симметрию формулы (44) относительно изменений нумерации по индексам j, $j=\overline{1,n}$, циклически перенумеруем переменные в (46):

$$z_i,\ b_i\to z_{i+1},\ b_{i+1},\ i=\overline{1,n-1},\quad z_n,\ b_n\to z_1,\ b_1.$$

При этом очевидно, что

$$F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)=\sum\nolimits_{k_1=0}^{\infty}\frac{(a)_1(b)_1}{(c)_1}\frac{z_1^{k_1}}{k_1!}F\left(\begin{matrix}a+k_1\\ c+k_1\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right),\qquad (46')$$

причем, согласно индуктивному предположению, функция $F\left(\begin{matrix}a+k_1\\ c+k_1\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[(c+k_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)(1+\delta_n)z_n^{-1}-(a+k_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)(b_n+\delta_n)\right]F\left(\begin{matrix}a+k_1\\ c+k_1\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)=0.$$

Подставляя (46') в (50_n) и учитывая это уравнение, получаем

$$\left[(c+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)(1+\delta_n)z_n^{-1}-(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)(b_n+\delta_n)\right]F\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_n\right)=$$

$$=\sum\nolimits_{k_1=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1}(b_n)_{k_1}}{(c)_{k_1}}\left[(\delta_1-k_1)\frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\right]\left\{\left[(1+\delta_n)z_n^{-1}-(b_n+\delta_n)\right]F\left(\begin{matrix}a+k_1\\ c+k_1\end{matrix};\{\mathbb{b},\mathbb{z}\}_{n-1}\right)\right\}=0.$$

Следовательно, ряд (44), а вместе с ним, согласно Лемме, и функция (43), удовлетворяет всем уравнениям системы вида (49).

Таким образом, если интегралы (42) сходятся (т.е. если выполняются условия $r_0>0$, $r_j>0$, $j=\overline{1,n}$, $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$), то они определяют гипергеометрическую функцию порядка $p_j=2$ ($j=\overline{1,n}$, $n\geq 1$), от n переменных, которая является непосредственным обобщением ГГФ Гаусса и ГГФ Аппеля. Такие функции изучались Лауричелла (см. [12], гл. VII, а также [2], [6], [7]).

Согласно вышесказанному, имеем

$$\tilde{b}_{i1}=\frac{\Gamma(r_0+i-1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(r_0+r_1+i-1)}F\left(\begin{matrix}r_0+i-1\\ r_0+r_1+i-1\end{matrix};\left\{1-r_k,\ \frac{x_1}{x_k}\,\middle|\,k=\overline{2,n}\right\}_{n-1}\right)\prod\nolimits_{j=2}^{n}\left(\frac{x_j}{x_1-x_j}\right)^{r_j-1},$$

$$\tilde{b}_{ij}=\frac{\Gamma(r_j)\Gamma(r_{j-1})}{\Gamma(r_j+r_{j-1})}F\left(\begin{matrix}r_j\\ r_j+r_{j-1}\end{matrix};2-r_0-i,\ \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j};\left\{1-r_k,\ \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_k}\,\middle|\,\begin{matrix}k=\overline{1,n}\\ k\neq j,\ j-1\end{matrix}\right\}_{n-2}\right)\left(1-\frac{x_{j-1}}{x_j}\right)^{r_j}$$

$$j=\overline{2,n},\ \ i=\overline{1,n}\qquad (n=3,4,\ldots)$$

и, после упрощений, из формул (41) и (42) получаем

$$B_n=\left[\prod\nolimits_{j=3}^{n}\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_1}\right)^{r_j-1}\right]\prod\nolimits_{j=2}^{n}\prod\nolimits_{k=0}^{j-2}(x_j-x_k)^{-1}\prod\nolimits_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(r_j)\Gamma(r_{j-1})}{\Gamma(r_j+r_{j-1})}D_n,\quad (51)$$

где $x_0=0$ и

$$D_n = \det\begin{bmatrix} x_1^{i-1} F\left(\begin{matrix} r_0+i-1 \\ r_0+r_1+i-1 \end{matrix}; \left\{1-r_k, \frac{x_1}{x_k} \,\middle|\, k=\overline{2,n}\right\}_{n-1}\right) \dfrac{(r_0)_{i-1}}{(r_0+r_1)_{i-1}} \\ x_j^{i-1} F\left(\begin{matrix} r_j \\ r_j+r_{j-1} \end{matrix}; 2-r_0-i, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j}; \left\{1-r_k, \frac{x_j-x_{j-1}}{x_j-x_k} \,\middle|\, \begin{matrix} k=\overline{1,n} \\ k\neq j, j-1 \end{matrix}\right\}_{n-2}\right) \end{bmatrix}_{i,\, j=\overline{1,n}} . \quad (52)$$

Из полученных формул (51) и (52) ясно, что, помимо очевидного усложнения, связанного с громоздкостью этих выражений, для доказательства формулы (2) при $n \geq 3$ необходимо исследовать особенности функций, зависящих от $n-1$ комплексных переменных, причем аргументы соответствующих ГГФ связаны между собой нелинейными соотношениями.

Отметим также, что при $n \geq 3$ в формуле (51) появился дополнительный множитель, зависящий от переменных x_j, $j=\overline{1,n}$ (в случае $n=2$ соответствующий множитель сокращается).

Наконец, отметим связь формулы (2) в случае $n=2$ с вронскианом гипергеометрического уравнения Гаусса. Соответствующее понятие для системы дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, для уравнений Аппеля и Лауричелла в литературе не встречается.

Дополнение

1. Применяя формулу Лейбница для производной от определителя, из (19), (20) и (11_1) получаем

$$\frac{d^m}{dz^m} D(\mathbb{r};z)\big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \det\begin{bmatrix} \dfrac{(a)_{m-k}(b)_{m-k}}{(c)_{m-k}} & k\dfrac{b(a-c)}{c(1-c)}\dfrac{(1-a)_{k-1}(1-b)_{k-1}}{(2-c)_{k-1}} \\ \dfrac{(a)_{m-k}(b+1)_{m-k}}{(c+1)_{m-k}} & \dfrac{(1-a)_k(-b)_k}{(1-c)_k} \end{bmatrix}, \quad (A.1)$$

$$(m=1,2,\ldots)$$

Из формулы (45), учитывая соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z, \quad (A.2)$$

находим

$$(a)_{m-k}(1-a)_k = (-1)^k (a-k)_m, \quad (1-c)(2-c)_{k-1} = (1-c)_k \cdot \quad (k=0,1,2,\ldots,m)$$

Поэтому после упрощений формула $(A.1)$ принимает следующий вид:

$$\frac{d^m}{dz^m} D(\mathbb{r};z)\big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{m} R_k(m;a,b,c) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(a-k)_m (b-k)_m}{(c-k)_m} \det\begin{bmatrix} 1 & k\dfrac{(a-c)}{(a-k)(b-k)} \\ \dfrac{b+m-k}{c+m-k} & \dfrac{b}{b-k} \end{bmatrix}, \quad (A.3)$$

$$(m=1,2,\ldots)$$

Легко заметить, что формула $(A.3)$ справедлива и при $m=0$.

Каждое слагаемое $R_k(m;a,b,c)$ в сумме $(A.3)$ является рациональной функцией от совокупности переменных a, b, c:

$$R_0(m;a,b,c) = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}, \qquad R_0(0;a,b,c)=1,$$

$$R_k(m;a,b,c) = \binom{m}{k}(-1)^k \frac{(a-k)_m(b-k)_m}{(c-k)_m} \frac{abc+ab(m-2k)+k(m-k)(c-a-b)}{(a-k)(b-k)(c+m-k)} =$$

$$= \binom{m}{k}(-1)^k \frac{(a-k+1)_{m-1}(b-k+1)_{m-1}}{(c-k)_{m+1}} \left[abc+ab(m-2k)+k(m-k)(c-a-b)\right]. \quad (A.4)$$

$$(k=1,\ldots,m, \quad m=1,2,\ldots)$$

Поэтому сумма (A.3) принимает следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{m} R_k(m;a,b,c) = P_L(a,b,c)/Q_l(a,b,c), \qquad (A.5)$$

где $P_L(a,b,c)$ и $Q_l(a,b,c)$ являются многочленами от совокупности переменных a, b, c, степеней L и l, соответственно:

$$L=(2m-2)+(m+1)m+3=(m+1)^2+m, \qquad l=(m+1)^2=L-m.$$

Отметим, что при малых m формулу (A.5) нетрудно проверить прямым вычислением правой части, однако уже при $m\geq 3$ эти вычисления весьма трудоёмки. Доказательство по индукции общего результата

$$\frac{d^m}{dz^m}D(r;z)\Big|_{z=0} = \sum_{k=0}^{m} R_k(m;a,b,c) = \begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m\geq 1\end{cases} \qquad (A.6)$$

так же наталкивается на сложности.

2. Обозначим в определителе (25) $z=1-y$ и применим к первому столбцу формулу (14). Получим

$$D(1-y) = \det\begin{bmatrix} F(a,b;c;1-y) & (1-y)\dfrac{(c-a)(c-b)}{c(1-c)}F(1-a,1-b;2-c;1-y) \\ F(a,b;c+1;1-y) & yF(1-a,1-b;1-c;1-y)\end{bmatrix} =$$

$$=\det\begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F_1(y) & (1-y)\dfrac{(c-a)(c-b)}{c(1-c)}F(1-a,1-b;2-c;1-y) \\ \dfrac{\Gamma(c+1)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(1-a+c)\Gamma(1-b+c)}F_2(y) & yF(1-a,1-b;1-c;1-y)\end{bmatrix} +$$

$$+y^{c-a-b+1}\det\begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F_3(y) & (1-y)\dfrac{(c-a)(c-b)}{c(1-c)}F(1-a,1-b;2-c;1-y) \\ \dfrac{\Gamma(c+1)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}F_4(y) & F(1-a,1-b;1-c;1-y)\end{bmatrix} =$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\det\begin{bmatrix} F_1(y) & \dfrac{1-y}{1-c}F(1-a,1-b;2-c;1-y) \\ (c-a-b)F_2(y) & yF(1-a,1-b;1-c;1-y)\end{bmatrix} +$$

$$+y^{c-a-b+1}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\det\begin{bmatrix} F_3(y) & \dfrac{1-y}{1-c}F(1-a,1-b;2-c;1-y) \\ \dfrac{(c-a)(c-b)}{a+b-c-1}F_4(y) & F(1-a,1-b;1-c;1-y)\end{bmatrix}.$$

Здесь для сокращения записи, использованы обозначения

$F_1(y)=F(a,b;1+a+b-c;y)$; $\quad F_2(y)=F(a,b;a+b-c;y)$;

$F_3(y)=F(c-a,c-b;1-a-b+c;y)$; $\quad F_4(y)=F(1-a+c,1-b+c;2-a-b+c;y)$.

Аналогично, применяя формулу (14) ко второму столбцу определителя, после соответствующих преобразований получим

$$D(1-y)=$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left\{\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}\det\begin{bmatrix} F_1(y) & (1-y)\widetilde{F}_1(y) \\ (c-a-b)F_2(y) & \dfrac{y(a-c)(b-c)}{a+b-c-1}\widetilde{F}_2(y)\end{bmatrix} +\right.$$

$$+y^{a+b-c}\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\det\begin{bmatrix} F_1(y) & (1-y)\widetilde{F}_3(y) \\ F_2(y) & \widetilde{F}_4(y)\end{bmatrix}\Bigg\} +$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left\{y^{c-a-b+1}\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c-1)}{\Gamma(a-c)\Gamma(b-c)}\det\begin{bmatrix} F_3(y) & (1-y)\widetilde{F}_1(y) \\ F_4(y) & \widetilde{F}_2(y)\end{bmatrix} +\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\det\begin{bmatrix} F_3(y) & y(1-y)\widetilde{F}_3(y) \\ \dfrac{(a-c)(b-c)}{a+b-c-1}F_4(y) & (c-a-b)\widetilde{F}_4(y)\end{bmatrix}\right\}. \qquad (A.7)$$

Здесь использованы обозначения

$\widetilde{F}_1(y)=F(1-a,1-b;1-a-b+c;y)$; $\quad \widetilde{F}_2(y)=F(1-a,1-b;2-a-b+c;y)$;

$\widetilde{F}_3(y)=F(1+a-c,1+b-c;1+a+b-c;y)$; $\quad \widetilde{F}_4(y)=F(a-c,b-c;a+b-c;y)$.

Согласно (17), с учетом симметрии $a\rightleftarrows b$, имеем

$$\widetilde{F}_1(y)=(1-y)^{c-1}F_3(y),\ \ \widetilde{F}_2(y)=(1-y)^{c}F_4(y),$$
$$\widetilde{F}_3(y)=(1-y)^{c-1}F_1(y),\ \ \widetilde{F}_4(y)=(1-y)^{c}F_2(y),$$
$$\left(|\arg(y-1)|<\pi\right)$$

поэтому определители во втором и третьем слагаемом формулы (A.7) обращаются в ноль, а в первом и четвертом слагаемом – различаются только знаком. В результате выражение (A.7) упрощается:

$$D(1-y)=$$

$$=(1-y)^c\det\begin{bmatrix} F_1(y) & F_3(y) \\ F_2(y) & y\dfrac{(a-c)(b-c)}{(a+b-c)(1-a-b+c)}F_4(y)\end{bmatrix}\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c)\Gamma(1-a-b+c)\times$$

$$\times\left\{[\Gamma(c-a)\Gamma(1-c+a)\Gamma(c-b)\Gamma(1-c+b)]^{-1} - [\Gamma(a)\Gamma(1-a)\Gamma(b)\Gamma(1-b)]^{-1}\right\}.$$

Применяя формулу (A.2), упростим множители, содержащие гамма-функции:

$$\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c)\Gamma(1-a-b+c)=\frac{\pi^2}{\sin\pi c\,\sin\pi(a+b-c)};$$

$$\left[\Gamma(c-a)\Gamma(1-c+a)\Gamma(c-b)\Gamma(1-c+b)\right]^{-1}-\left[\Gamma(a)\Gamma(1-a)\Gamma(b)\Gamma(1-b)\right]^{-1}=$$

$$=\frac{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)\;-\;\sin\pi a\sin\pi b}{\pi^2};$$

$$\frac{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)\;-\;\sin\pi a\sin\pi b}{\sin\pi c\,\sin\pi(a+b-c)}=$$

$$=\frac{\cos\pi(a-b)-\cos\pi(2c-a-b)-\cos\pi(a-b)+\cos\pi(a+b)}{\cos\pi(2c-a-b)-\cos\pi(a+b)}=-1.$$

Переставим строки определителя и во втором столбце опять воспользуемся свойством (17). Окончательно, получим (в исходных обозначениях)

$$D(z)=\det\begin{bmatrix} F(a,b;c;z) & z\dfrac{(c-a)(c-b)}{c(1-c)}F(1-a,1-b;2-c;z) \\ F(a,b;c+1;z) & (1-z)F(1-a,1-b;1-c;z)\end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix} F(a,b;a+b-c;1-z) & \dfrac{(1-z)(a-c)(b-c)}{(a+b-c)(1-a-b+c)}F(1-a,1-b;2-a-b+c;1-z) \\ F(a,b;1+a+b-c;1-z) & F(1-a,1-b;1-a-b+c;1-z)\end{bmatrix}.$$

$$(A.8)$$

Точка $z=1$ является регулярной для ГГФ в правой части формулы (A.8), причем все эти ГГФ в этой точке $\to 1$. Поэтому в (A.8) можно перейти к пределу $z\to 1$. Получим

$$D(z)\big|_{z\to 1}=1,$$

причем результат одинаков на верхнем и нижнем краю разреза, т.е. разрезы в определителе (A.8) (как и в определителях (19) и (23)-(28)) сокращаются. По принципу аналитического продолжения, полученный результат верен при произвольных (комплексных) значениях параметров a, b, c.

3. Учитывая (A.4) и (45) в (A.6), после упрощений получаем формулу (39). Перенося первое слагаемое (при k=0) суммы (A.6) в правую часть и переобозначая $k\to k_1=k-1$, $m\to m_1=m-1$, получаем

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-m)_k}{(k+1)!}\frac{(a-k)_m(b-k)_m}{(c-k)_m}\frac{ab(c+m-2k-1)-(k+1)(m-k)(a+b-c)}{(c+m-k)(c-k-1)}=$$

$$=\frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{(m+1)(c)_{m+1}},\qquad (m=1,2,\ldots)\qquad (A.9)$$

где учтено соотношение

$$\binom{m+1}{k+1}(-1)^k=\frac{m+1}{(k+1)!}(-m)_k.$$

Применим вытекающие из формулы (A.2) соотношения

$$\frac{\Gamma(a+m-k)}{\Gamma(a+1-k)}=\frac{\Gamma(k-a)}{\Gamma(1-a-m+k)}\frac{\sin(a-k)}{\sin(a-k+m)}=$$

$$=(-1)^m\frac{\Gamma(k-a)}{\Gamma(1-a-m+k)}=(-1)^m\frac{(-a)_k}{(1-a-m)_k}\frac{\Gamma(-a)}{\Gamma(1-a-m)},$$

$$\frac{\Gamma(c-k)}{\Gamma(c+m+1-k)}=\frac{\Gamma(-c-m+k)}{\Gamma(1-c+k)}\frac{\sin(-c-m+k)}{\sin(c-k)}=(-1)^{m+1}\frac{(-c-m)_k}{(1-c)_k}\frac{\Gamma(-c-m)}{\Gamma(1-c)}.$$

Тогда формула (A.9) примет следующий вид

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{(\tilde a)_k}{(\tilde a+1-m)_k}\frac{(\tilde b)_k}{(\tilde b+1-m)_k}\frac{(\tilde c)_k}{(\tilde c+1+m)_k}\times$$

$$\times\left[\tilde a\tilde b\tilde c+2\tilde a\tilde b k+k(m-k)(-\tilde a-\tilde b+\tilde c+m)\right]=0,\qquad (A.10)$$

где использованы новые обозначения

$$\tilde a=-a,\ \tilde b=-b,\ \tilde c=-c-m.$$

Разобьём левую часть выражения (A.10) на три слагаемых:

$$\tilde a\tilde b\tilde c\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{(\tilde a)_k}{(\tilde a+1-m)_k}\frac{(\tilde b)_k}{(\tilde b+1-m)_k}\frac{(\tilde c)_k}{(\tilde c+1+m)_k}+$$

$$+2\tilde a\tilde b\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\frac{(\tilde a)_k}{(\tilde a+1-m)_k}\frac{(\tilde b)_k}{(\tilde b+1-m)_k}\frac{(\tilde c)_k}{(\tilde c+1+m)_k}+$$

$$+(m-\tilde a-\tilde b+\tilde c)\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\frac{m!}{(k-1)!(m-k-1)!}\frac{(\tilde a)_k}{(\tilde a+1-m)_k}\frac{(\tilde b)_k}{(\tilde b+1-m)_k}\frac{(\tilde c)_k}{(\tilde c+1+m)_k}=0.$$

Воспользовавшись здесь формулами

$$(a)_k = a(a+1)_{k-1}, \qquad (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} = (-m)_k,$$

$$(-1)^k \frac{m!}{(m-k-1)!} = m(-m+1)_k = m(1-m)(2-m)_{k-1}$$

после сокращения на общий множитель $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \neq 0$, получим

$$L\sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)_k}{k!} \frac{(\tilde{a})_k}{(\tilde{a}+1-m)_k} \frac{(\tilde{b})_k}{(\tilde{b}+1-m)_k} \frac{(\tilde{c})_k}{(\tilde{c}+1+m)_k} +$$

$$+M\sum_{k=1}^{m} \frac{(-m+1)_{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\tilde{a}+1)_{k-1}}{(\tilde{a}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{b}+1)_{k-1}}{(\tilde{b}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{c}+1)_{k-1}}{(\tilde{c}+2+m)_{k-1}} +$$

$$+N\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-m+2)_{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\tilde{a}+1)_{k-1}}{(\tilde{a}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{b}+1)_{k-1}}{(\tilde{b}+2-m)_{k-1}} \frac{(\tilde{c}+1)_{k-1}}{(\tilde{c}+2+m)_{k-1}} = 0. \qquad (A.11)$$

где

$$L = (\tilde{a}+1-m)(\tilde{b}+1-m)(\tilde{c}+1+m), \;\; M = -2m\tilde{a}\tilde{b}, \;\; N = m(1-m)(m-\tilde{a}-\tilde{b}+\tilde{c}).$$

Согласно определению обобщенной гипергеометрической функции ${}_4F_3$,

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4; \\ \rho_1,\rho_2,\rho_3;\end{matrix}\; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k(\alpha_3)_k(\alpha_4)_k}{(\rho_1)_k(\rho_2)_k(\rho_3)_k} \frac{z^k}{k!}$$

и учитывая, что

$$(-m)_k = 0, \quad k = m+1,\, m+2, \ldots,$$

формула (A.11) принимает следующий вид:

$$L\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\tilde{a},\,\tilde{b},\,\tilde{c},-m; \\ \tilde{a}+1-m,\tilde{b}+1-m,\tilde{c}+1+m;\end{matrix}\; 1\right] + M\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\tilde{a}+1,\,\tilde{b}+1,\,\tilde{c}+1,\,1-m; \\ \tilde{a}+2-m,\,\tilde{b}+2-m,\,\tilde{c}+2+m;\end{matrix}\; 1\right] +$$

$$+N\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\tilde{a},\,\tilde{b},\,\tilde{c},-m; \\ \tilde{a}+2-m,\tilde{b}+2-m,\tilde{c}+2+m;\end{matrix}\; 1\right] = 0.$$

Заменяя здесь обозначения

$$a = \tilde{a}+1-m, \;\; b = \tilde{b}+1-m, \;\; c = \tilde{c}+1+m,$$

получим требуемую формулу (40).

4. Коэффициенты α_q и β_q в соотношениях Куммера (29), связывающие различные куммеровские решения $u_1(z), \ldots, u_6(z)$ гипергеометрического уравнения Гаусса, (см., напр., [2],2.9(35),(37),(39),(43)), имеют слеующий вид:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 1, && \beta_1 = 0; \\
&\alpha_2 = \frac{\Gamma(1+a+b-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}, && \beta_2 = \frac{\Gamma(1+a+b-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\
&\alpha_3 = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-b)}, && \beta_3 = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}e^{i\pi\sigma(c-1)}, \\
&\alpha_4 = \frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+b-c)\Gamma(1-a)}, && \beta_4 = \frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}e^{i\pi\sigma(c-1)}, \qquad (A.12) \\
&\alpha_5 = 0, && \beta_5 = 1, \\
&\alpha_6 = \frac{\Gamma(1-a-b+c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, && \beta_6 = \frac{\Gamma(1-a-b+c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},
\end{aligned}$$

где

$$\sigma \equiv \mathrm{sign}(\mathrm{Im} z) = \begin{cases} +1, & \mathrm{Im}\, z > 0, \\ -1, & \mathrm{Im}\, z < 0. \end{cases} \qquad (A.13)$$

Подставим эти значения в формулу (31) и учтем свойство (A.2), а так же легко проверяемое соотношение

$$\sin\alpha + \sin(\beta-\alpha)e^{\pm i\beta} = \sin\beta\, e^{\pm i(\beta-\alpha)}. \qquad (A.14)$$

После упрощений получим:

$$K_{1q} = -K_{q1} =$$

$$= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \qquad q=2; \qquad (A.15)$$

$$= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}e^{i\pi\sigma(c-1)}, \qquad q=3; \qquad (A.16)$$

$$= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a+b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}e^{i\pi\sigma(c-1)}, \qquad q=4; \qquad (A.17)$$

$$= 1-c, \qquad q=5; \qquad (A.18)$$

$$= -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad q=6; \qquad (A.19)$$

$$K_{2q}=-K_{q2}=$$

$$=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)}e^{i\pi\sigma(c-b)},\qquad q=3;\qquad (A.20)$$

$$=\frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(1+b-c)}e^{i\pi\sigma(c-a)},\qquad q=4;\qquad (A.21)$$

$$=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)},\qquad q=5;\qquad (A.22)$$

$$=a+b-c,\qquad q=6;\qquad (A.23)$$

$$K_{3q}=-K_{q3}=$$

$$=(b-a)e^{i\pi\sigma c},\qquad q=4;\qquad (A.24)$$

$$=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-b)},\qquad q=5;\qquad (A.25)$$

$$=-\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)}e^{i\pi\sigma a},\qquad q=6;\qquad (A.26)$$

$$K_{4q}=-K_{q4}=$$

$$=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-a+b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)},\qquad q=5;\qquad (A.27)$$

$$=-\frac{\Gamma(1-a+b)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)}e^{i\pi\sigma b},\qquad q=6;\qquad (A.28)$$

$$K_{56}=-K_{65}=-\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}.\qquad (A.29)$$

5. Учитывая асимптотические свойства ГГФ (см., напр., [2], 2.10(2) и (5))

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(-z)^{-a}F(a,1+a-c;1+a-b;z^{-1})+$$
$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}(-z)^{-b}F(b,1+b-c;1+b-a;z^{-1}),$$
$$\left(a\neq b,\quad |\arg(-z)|<\pi\right)$$

и подставляя в (33) $z_0=1$ и $z=\infty$, получим

$$\int_1^{\infty\pm i0}\frac{dt}{t^c(t-1)^{a+b-c+1}[F(a,b;c;t)]^2}=$$
$$=\lim_{z\to\infty\pm i0}\frac{F(1+a-c,1+b-c;\,2-c;\,z)}{(1-c)z^{c-1}F(a,b;c;z)}-\frac{F(1+a-c,1+b-c;2-c;\,1)}{(1-c)\,F(a,b;\,c;\,1)}=$$
$$=\lim_{z\to\infty\pm i0}\frac{(-z)^{c-a-1}\dfrac{\Gamma(1-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)}+(-z)^{c-b-1}\dfrac{\Gamma(1-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)}}{z^{c-1}\left[(-z)^{-a}\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}+(-z)^{-b}\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}\right]}-$$
$$-\frac{F(1+a-c,1+b-c;2-c;\,1)}{(1-c)\,F(a,b;c;\,1)}.$$
$$\left(a\neq b,\quad |\arg(-z)|<\pi\right)$$

Согласно условию $|\arg(-z)|<\pi$, имеем

$$z^{c-1}=(-z)^{c-1}e^{i\pi\sigma(c-1)},$$

где σ определено в $(A.13)$. Поэтому после очевидных упрощений получаем

$$\int_1^{\infty\pm i0}\frac{dt}{t^c(1-t)^{a+b-c+1}[F(a,b;c;t)]^2}=$$
$$=e^{\pm i\pi(c-1)}\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(c)}\lim_{z\to\infty\pm i0}\frac{\dfrac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)}+(-z)^{a-b}\dfrac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)}}{\dfrac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}+(-z)^{a-b}\dfrac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}}-$$
$$-\frac{F(1+a-c,1+b-c;2-c;\,1)}{(1-c)\,F(a,b;c;\,1)}.$$
$$(a\neq b)$$

Полагая здесь $\mathrm{Re}(a-b)<0$, $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ и учитывая (11_2), находим

$$\int_1^{\infty\pm i0} [F(a,b;c;t)]^{-2} t^{-c}(1-t)^{c-a-b-1}dt =$$
$$= e^{\pm i\pi(c-1)}\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-b)\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)} - \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{(1-c)\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)},$$
$$\mathrm{Re}(a-b)<0, \quad \mathrm{Re}(c-a-b)>0.$$

Последнее соотношение преобразуем, применяя (A.2). Получим

$$\int_1^{\infty\pm i0}\frac{\Gamma^2(c)\,dt}{t^c(1-t)^{a+b-c+1}[F(a,b;c;t)]^2} = \Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(b)}\times$$
$$\times\left\{e^{\pm i\pi(c-1)}\frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(1+a-c)} - \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}\right\} =$$
$$= -\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\frac{\sin\pi b}{\sin\pi c}\left\{e^{\pm i\pi c}\sin\pi(c-a)+\sin\pi a\right\}.$$
$$\big(\mathrm{Re}(a-b)<0, \ \mathrm{Re}(c-a-b)>0\big)$$

Отсюда, согласно (A.14), находим

$$\int_1^{\infty\pm i0}\frac{\Gamma^2(c)\,dt}{t^c(1-t)^{a+b-c+1}[F(a,b;c;t)]^2} = e^{\pm i\pi(c-a-1)}\sin\pi b\,\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b).$$
$$\big(\mathrm{Re}(a-b)<0, \ \mathrm{Re}(c-a-b)>0\big)$$

Учитывая в левой части этой формулы, что, согласно условию $|\arg(1-t)|<\pi$,

$$1-t=(t-1)e^{-i\pi\sigma},$$

получим формулу (35). По принципу аналитического продолжения, полученный результат верен и при $a=b$.

6. Для вычисления интеграла $I(1/2,1/2,z)$ (см. пример 8) перепишем выражение (14) в обозначениях $F_R(a,b;c;z)\equiv\Gamma^{-1}(c)F(a,b;c;z)$. Учитывая ($A$.2), имеем

$$F_R(a,b;c;1-z)=$$
$$=\frac{\pi}{\sin\pi(c-a-b)}\left\{\frac{F_R(a,b;a+b-c+1;z)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} - z^{c-a-b}\frac{F_R(c-a,c-b;c-a-b+1;z)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right\}. \quad (14')$$

Полагая в (14′) $c=a+b+\varepsilon$, перейдем к пределу $\varepsilon\to 0$. Получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_R(a,b;a+b+\varepsilon;1-z)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\left\{\frac{F_R(a,b;1-\varepsilon;z)}{\Gamma(b+\varepsilon)\Gamma(a+\varepsilon)} - z^{\varepsilon}\frac{F_R(b+\varepsilon,a+\varepsilon;1+\varepsilon;z)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right\}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\frac{F_R(a,b;1-\varepsilon;z)}{\Gamma(b+\varepsilon)\Gamma(a+\varepsilon)} - z^{\varepsilon}\frac{F_R(b+\varepsilon,a+\varepsilon;1+\varepsilon;z)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right\}.$$

Применяя здесь формулы (5) и (A.2) и дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$F_R(a,b;a+b;1-z)=\frac{\sin\pi b}{\pi\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{-b}(1-zu)^{-a}\phi(u,z)\,du,$$

где

$$\phi(u,z)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+\varepsilon)}\frac{\sin\pi(b+\varepsilon)}{\sin\pi b}(1-u)^{-\varepsilon} - (zu)^{\varepsilon}(1-zu)^{-\varepsilon}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+\varepsilon)}\right\}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+\varepsilon)}\frac{\sin\pi(b+\varepsilon)}{\sin\pi b} - \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+\varepsilon)}\right\} - \ln\frac{zu(1-u)}{1-zu}=$$
$$=\psi(b)-\psi(a)+\pi\cot\pi b-\ln z-\ln\frac{u(1-u)}{1-zu}.$$

Здесь

$$\psi(z)=d/dz\ln\Gamma(z).$$

Отсюда находим выражение для интеграла (37)

$$I(a,b;z)\equiv\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{-b}(1-zu)^{-a}\ln\frac{u(1-u)}{1-zu}\,du=$$
$$=\frac{\pi}{\sin\pi b}\left\{\left[\psi(b)-\psi(a)+\pi\cot\pi b-\ln z\right]F(a,b;1;z)-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}F(a,b;a+b;1-z)\right\}. \quad (A.30)$$
$$(0<\mathrm{Re}\,b<1)$$

Сравнивая (A.30) с формулами, вытекающими из [$7a$], 2.612(7) и 2.6.12(9)

$$\int_0^1\frac{u^{b-1}}{(1-u)^b}\frac{\ln(1-u)}{(1-zu)^a}\,du=\frac{\pi}{\sin\pi b}\left\{\psi(1-b)F(a,b;1;z)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(k!)^2}z^k\psi(1+k)\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{u^{b-1}}{(1-u)^b}\frac{\ln u}{(1-zu)^a}du = \frac{\pi}{\sin\pi b}\left\{\psi(1-b)F\left(a,b;1;\frac{z}{z-1}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{z-1}\right)^k\psi(1+k)\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{u^{b-1}}{(1-u)^b}\frac{\ln(1-zu)}{(1-zu)^a}\,du = \frac{\pi}{\sin\pi b}\left\{\psi(a)\,F(a,b;1;z)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(k!)^2}z^k\,\psi(a+k)\right\},$$

и учитывая, что (см., напр., [2], 2.9(32))

$$F\left(a,b;1;\frac{z}{z-1}\right)=(z-1)^{-b}F\left(a,b;1;z\right)$$

и (см., напр., [2], 1.7(10))

$$\psi(b)+\pi\cot\pi b=\psi(1-b),$$

находим соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(k!)^2}z^k\left\{\psi(1+k)-\psi(a+k)+\frac{\psi(1+k)}{(z-1)^k}\right\}=$$

$$=\ln z\,F(a,b;1;z)+\mathrm{B}(a,b)\,F(a,b;a+b;1-z)+\psi(1-b)\,F\left(a,b;1;\frac{z}{z-1}\right).$$

Легко видеть, что при $z=1$ интеграл $I(a,b;1)$ сходится, если $\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Re}(a+b-1)\leq 0$. Переобозначая параметры $a+b=1-\nu$, $b=\mu$, после упрощений из (A.30) получаем известную формулу (см., напр., [6], 4.253(1), 4.293(13)), при более слабых ограничениях на параметры, чем в [6]:

$$I(1-\mu-\nu,\mu;1)\equiv\int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1}\ln u\,du=\int_0^1 u^{\nu-1}(1-u)^{\mu-1}\ln(1-u)\,du=$$

$$=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\left[\psi(\mu)-\psi(\mu+\nu)\right].\ (\mathrm{Re}\,\mu>0,\ \mathrm{Re}\,\nu\geq 0)\qquad (A.30')$$

Именно, поскольку интеграл в левой части выражения (A.30′) сходится при $\nu\to 0$, раскрывая неопределенность в правой части этого выражения, получаем (ср., напр., с [6], 4.251(4))

$$I(1-\mu,\mu;1)\equiv\int_0^1\frac{u^{\mu-1}\ln u}{1-u}du=\int_0^1\frac{(1-u)^{\mu-1}\ln(1-u)}{u}du=-\psi'(\mu).\qquad (A.31)$$

$$(\mathrm{Re}\,\mu>0)$$

Полагая в (A.30) $a=b=1/2$ и учитывая, что $F(1/2,1/2;1;z)=(2/\pi)\mathbb{K}(z)$, находим

$$I(1/2,1/2;z)=-2\pi\mathbb{K}(1-z)-2\ln z\,\mathbb{K}(z),\qquad 0<z<1.\qquad (A.32)$$

Положим в (A.31) $\mu=1/2$. Поскольку (см., напр., [4], 6.4.4 и 23.2.24) $\psi'(1/2)=\pi^2/2$, получаем известный результат (см. [6], 4.251(4))

$$I(1/2,1/2;1)=\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1}\ln u\,du=-\pi^2/2.\qquad (A.31')$$

Поскольку (см., напр., [4], 17.3.26)

$$\lim_{z\to 1}\mathbb{K}(1-z)=\pi/2,\qquad \lim_{z\to 1}\left[\mathbb{K}(z)+\frac{1}{2}\ln(1-z)\right]=2\ln 2,$$

и, следовательно, $\lim_{z\to 1}(\ln z\,\mathbb{K}(z))=0$, формулы ($A$.32) и ($A$.31′) можно объеденить:

$$I(1/2,1/2;z)=-2\pi\frac{\mathbb{K}(1-z)}{1+\delta_{1z}}-2\ln z\,\mathbb{K}(z),\qquad \delta_{1z}=\begin{cases}0, & z\neq 1,\\ 1, & z=1.\end{cases}\qquad (A.33)$$

Подставим в (A.30) $a=3/2$, $b=1/2$ и учитем, что (см., напр., [2], 1.7(8))

$$\psi(z)-\psi(1+z)=-z^{-1}.$$

Получим

$$I(3/2,1/2;z)=(-2-\ln z)\pi F(3/2,1/2;1;z)-\pi^2\frac{\pi}{2\Gamma(2)}F(3/2,1/2;2;1-z).\qquad (A.35)$$

Согласно (17), имеем

$$F(3/2,1/2;1;z)=F(1-(-1/2),1-1/2;1;z)=(1-z)^{-1}F(-1/2,1/2;1;z)=(1-z)^{-1}\frac{2}{\pi}\mathbb{E}(z).$$

Учитывая также соотношение (см., напр., [7в], 2.8.(26) и [6], 8.112(5))

$$\frac{\pi}{2}F(3/2,1/2;2;z)=2\mathbb{D}(z)=2z^{-1}\left[\mathbb{K}(z)-\mathbb{E}(z)\right]$$

где $\mathbb{D}(z)$ – полный эллиптический интеграл третьего рода (см. [6], 8.111(5)),

$$\mathbb{D}(z)=\int_0^1 u^2\left[(1-u^2)(1-zu^2)\right]^{-1/2}du,$$

из (A.35) получаем

$$\frac{I(3/2,1/2,z)}{\pi F(3/2,1/2;1;z)}=-(2+\ln z)-\pi(1-z)\frac{\mathbb{D}(1-z)}{\mathbb{E}(z)}=$$

$$=-(2+\ln z)+\pi\frac{\mathbb{E}(1-z)-\mathbb{K}(1-z)}{\mathbb{E}(z)}.\qquad (A.36)$$

Отметим, что аргументы всех эллиптических интегралов взяты, как в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lomidze I. Proceedings of the Georgian Academy of Sciences. Mathematics. 1 (1993), №4, p.453-466.
2. Erdélyi A. et al. HTF, N.Y. McGraw-Hill Book Co., v.I, 1953, (рус. пер.: Бейтмен Г., Эрдейи А. ВТФ, т.I. М.: «Наука», 1974, 296 с).
3. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. Cambridge: Cambridge Univ.Press, 1952, (рус. пер.: Уиттекер Э., Ватсон Г. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963, т.2, с.93).
4. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. NBS, 1964, (рус. пер.: Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: «Наука», 1979).
5. Slavyanov S. Yu., Lay W. Special Function: A Unified Theory Based on Singularities. Oxford; New York: Oxford Univ.Press, 2000, (рус. пер.: Славянов С. Ю., Лай В. Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. С-Пб.: Невский Диалект, 2002, 312 с).
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: «Наука», 1974.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.
   а) Интегралы и ряды. М.: «Наука», 1981, 800 с.
   б) Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: «Наука», 1983, 752 с.
   в) Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: «Наука», 1986, 800 с.
8. Horn J. Math. Ann., 34, 1889, p. 544-600; Math. Ann., 105, 1931, p. 381-407.
9. Zaalschütz L. Zeitschrift für Math. und Phys., 36, 1891, p. 278-295, 321-327.
10. Appel P., Kampé de Fériet M. J. Functions hypergeómétriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Gautier-Villars. 1926, 420 p.

Получено 7 августа 2003 г.