СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-2000-52

Е.П.Жидков, Е.Е.Перепелкин

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ОБЛАСТИ С УГЛОМ

2000

Жидков Е.П., Перепелкин Е.Е. Р5-2000-52

Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом

Данная работа посвящена изучению поведения решения краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения в области с углом. Постановка краевой задачи возникает в магнитостатике при отыскании распределения магнитного поля методом двух скалярных потенциалов в области, содержащей ферромагнетик и вакуум. Нелинейность задачи обусловлена зависимостью свойства среды (магнитной проницаемости) от самого искомого поля. В связи с тем, что решение такой задачи приходится искать численными методами, встает вопрос о поведении решения краевой задачи в окрестности угловой точки ферромагнетика. В данной работе показано, что если функция магнитной проницаемости удовлетворяет определенным условиям, то соответствующее решение краевой задачи будет иметь ограниченный градиент.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

1. Постановка краевой задачи

Ставится задача магнитостатики о нахождении распределения магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика (см. рис.1). Из уравнений Максвелла и из соотношений на границе раздела сред (считаем, что токи отсутствуют в рассматриваемой области) следует

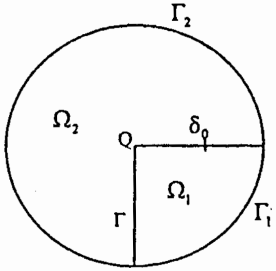

Рис.1

$$\operatorname{div}\vec{B}(p)=0,\quad \operatorname{rot}\vec{H}(p)=0,\quad p\in\Omega;$$
$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=0,\quad \vec{n}\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=0,\quad p\in\Gamma,$$

где Ω - область ферромагнетика и вакуума, Γ - граница раздела сред, $\vec{B},\vec{H}$ - векторы индукции и напряженности магнитного поля соответственно. Для области ферромагнетика Ω_2 можно записать $\vec{B}=\mu_0\mu(H)\vec{H}$, где $H=\left|\vec{H}\right|$, $\mu(H)$ - магнитная проницаемость, μ_0 - магнитная постоянная; для области вакуума Ω_1: $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$. Из - за отсутствия в области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ источников с током следует потенциальность поля, отсюда, справедливо представление

$$\vec{H}(p)=-\nabla u(p),\quad p\in\Omega,\quad u(p)=\begin{cases}u_1(p), & p\in\Omega_1,\\ u_2(p), & p\in\Omega_2,\end{cases}$$

где $u(p)$ - скалярный потенциал. Тогда постановка краевой задачи примет вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\left[\mu\left(\left|\nabla u_2(p)\right|\right)\nabla u_2(p)\right]=0,\quad p\in\Omega_2,\\
&\Delta u_1(p)=0,\quad p\in\Omega_1,\\
&u_1\big|_{\Gamma_-}=u_2\big|_{\Gamma_-},\\
&\mu\left(\left|\nabla u_2(p)\right|\right)\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_+}=\frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_-},\\
&u_1\big|_{\Gamma_1}=\Psi_1;\quad u_2\big|_{\Gamma_2}=\Psi_2,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

где функция $\mu(H)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
&1.\quad \mu(H)\in C^{(1)}[0,+\infty);\\
&2.\quad \text{для}\quad H\in[0,+\infty)\quad,\quad \mu(H)>1;\\
&3.\quad \mu(H)\xrightarrow{H\to+\infty}1.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Рассмотрим функцию $\overline{\mu}(H)$, аналог функции $\mu(H)$, у которой второе и третье условия заменены на следующе

$$\text{для } H'\ge H_0,\quad \overline{\mu}(H')=1\tag{1.3}$$

где H_0 - «достаточно велико». В дальнейшем будем предполагать, что решение краевой задачи (1.1) $u\in C(\Omega\cup\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$, из этого следует, что $\exists C_0>0\quad \forall p\in\Omega\cup\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\quad:\quad |u(p)|<C_0$.

2. Об одной краевой задаче

Прежде чем приступить к основным утверждениям данной статьи, рассмотрим вспомогательную задачу, которая подробно разобрана в [1]. Итак, рассмотрим краевую задачу (см. рис.2)

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{div}[q\nabla u(p)]=0,\quad p\in\Omega\\
&u\big|_{\Gamma_-}=u\big|_{\Gamma_+}\\
&q_2\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_+}=q_1\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_-}\\
&u\big|_{\Gamma_1}=\Psi_1;\quad u\big|_{\Gamma_2}=\Psi_2
\end{aligned}\right\},\ \text{где } q=\begin{cases}q_1, & p\in\Omega_1,\\ q_2, & p\in\Omega_2,\end{cases}$$

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,$$
$$\Omega_1=\{(r,\varphi):\quad 0<r<r_0\quad |\varphi|<\pi/4\},$$
$$\Omega_2=\{(r,\varphi):\quad 0<r<r_0\quad |\varphi|>\pi/4\},$$

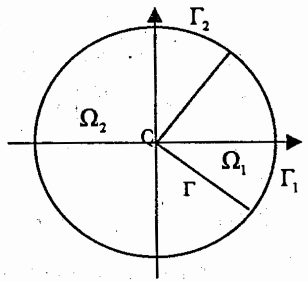

Рис.2

где $\Psi_i\in C^{(1)}(\Gamma_i)$, $i=1,2$ (см. рис.2). Введем полярную систему координат. Решение будем искать методом разделения переменных: $u\sim R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. В результате имеем

$$\Phi''+\lambda^2\Phi=0,\quad r^2R''+rR'-\lambda^2R=0.$$

Таким образом, для $R(r)$ в силу ограниченности в нуле $u(p)$, получим решение $R(r) \sim r^{\lambda}$, а для $\Phi(\varphi)$ - собственные функции, которые распадаются на две группы:

1. симметричные относительно $\varphi = 0$;
2. антисимметричные относительно $\varphi = 0$.

В первом случае собственные функции примут вид

$$\Phi_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} \cos(\lambda\varphi), & |\varphi| < \pi/4, \\ a_{\lambda} \cos(\lambda(\pi - \varphi)), & |\varphi| > \pi/4. \end{cases}$$

Здесь постоянная a_{λ} определяется из соотношения на границе для нормальных производных

$$a_{\lambda} = -\left[q_1 \sin\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)\right] \Big/ \left[q_2 \sin\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

а для определения собственных значений λ воспользуемся соотношением непрерывности для решения $u(r,\varphi)$ на границе раздела

$$-\frac{q_1}{q_2} = \frac{\cos\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right)} \frac{\sin\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Таким образом, или $\operatorname{tg}\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) = 0$ и тогда $\lambda = 4n$, или $\lambda = \pm\lambda_1 \pm 4n$, где λ_1 - наименьший корень уравнения

$$-\frac{q_1}{q_2} = \left[3 - \operatorname{tg}^2\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)\right] \Big/ \left[1 - 3\operatorname{tg}^2\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{2.1}$$

Особенность в решение будет вносить член ряда $r^{\lambda_1}\Phi_{\lambda_1}(\varphi)$ при $\lambda_1 < 1$. Из (2.1) следует, что

$$\lambda_1 = 1 \iff q_1 = q_2. \tag{2.2}$$

Это означает, что если $q_1 = q_2$, то $|\nabla u(p)|$ - будет ограничен.

3. Поведение решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу (1.1) с функцией магнитной проницаемости $\overline{\mu}$, область Ω, показана на рис.1.

<u>**Утверждение**</u>

$$\exists K > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < \rho(p,Q) < \delta \ : \ |\nabla u(p)| < K,$$

где $\rho(p,Q)$- расстояние между точками p и Q, а под ограниченностью на Γ понимается ограниченность на Γ_+ и на Γ_-.

<u>**Доказательство**</u>

Будем доказывать от противного. Предположим, что это не так, тогда

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < \rho(p,Q) < \delta \ : \ |\nabla u(p)| \geq K.$$

Возьмем $K = \max(H_0, 4C_0\sqrt{\pi})$, $0 < \delta_0 < \delta$, тогда для $p: \ 0 < \rho(p,Q) \leq \delta_0$ должно выполняться условие

$$|\nabla u(p)| \geq H_0 \ \Rightarrow \ \overline{\mu}(H) = 1. \tag{3.1}$$

Введем полярную систему координат с центром в точке Q. Пусть $u(r,\varphi)$ - решение нашей краевой задачи, удовлетворяющее условию (3.1), тогда на $\Gamma_{\pm}$ оно должно удовлетворять условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0,\varphi)\right|_{\varphi=0+} = \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0,\varphi)\right|_{\varphi=0-}, \tag{3.2}$$

а в силу непрерывности $u(\delta_0,\varphi)$ должно выполняться

$$u(\delta_0,\varphi)|_{\varphi=0+} = u(\delta_0,\varphi)|_{\varphi=0-} = u(\delta_0,0). \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что $\exists \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0,0)=\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0,\varphi)\Big|_{\varphi=0+}=\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0,\varphi)\Big|_{\varphi=0-}$,

таким образом, положив

$$\overline{\Psi}_i(\varphi)=u_i(\delta_0,\varphi),\quad i=1,2\,,\ \overline{\Psi}=\begin{cases}\overline{\Psi}_1, & \overline{\Gamma}_1,\\ \overline{\Psi}_2, & \overline{\Gamma}_2,\end{cases}$$

$$\overline{\Gamma}=\{(\delta_0,\varphi):\quad 0<\varphi\le 2\pi\ ,$$

получаем в δ_0 - окрестности точки Q краевую задачу

$$\begin{aligned}
&\Delta u_1(p)=0,\quad p\in\Omega_1,\\
&\Delta u_2(p)=0,\quad p\in\Omega_2,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma_+}=\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_-},\\
&u_1\big|_{\Gamma_-}=u_2\big|_{\Gamma_+},\\
&u\big|_{\overline{\Gamma}}=\overline{\Psi},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $\overline{\Psi}\in C^{(1)}(\overline{\Gamma})$. Из (2.2) (а также из [1]) получаем, что (3.4) не имеет особенностей, т.е. $\lim\limits_{p\to Q}|\nabla u(p)|=\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}\le 4C_0\sqrt{\pi}=K$, где a_1 и b_1 - коэффициенты ряда Фурье для функции $u(p)$ на границе $\overline{\Gamma}$. Следовательно, получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

Литература

[1] Г.Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. М. «Мир», 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 2000 года.