2-96-00

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

00-296

Р5-2000-296

В.В.Пупышев*

К ЗАДАЧЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ С ПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ, ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ КВАДРАТАМ РАССТОЯНИЙ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

2000

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], радиальное двухчастичное уравнение Шредингера с потенциалом $v(x) = cx^{-2}$ и угловым моментом b при положительной энергии e и достаточно большой константе c,

$$e \geq 0\,, \quad c > c_b \equiv -(b+1/2)^2\,, \tag{1}$$

имеет только сингулярное на малых расстояниях x, но физически допускаемое $(x\psi^b \to 0, x \to 0)$ решение ψ^b,

$$\psi^b(x;e) \sim O(x^q) \to 0\,, \quad q \equiv -1/2 + \sqrt{c+c_b} > 0\,, \quad x \to 0\,, \tag{2}$$

описывающее рассеяние, при $c < c_b$ имеется и дискретный спектр, причем основное состояние отвечает энергии $e = -\infty$. В этом состоянии частицы находятся в бесконечно малой окрестности их центра масс ($x = 0$), поэтому говорят, что происходит "падение" частиц в точку $x = 0$.

Взаимодействие, обратно пропорциональное квадрату расстояния, часто называют взаимодействием центробежного типа. В общем случае теорема существования и единственности физически приемлемых решений задачи трех и более частиц с парными взаимодействиями центробежного типа либо с парными взаимодействиями, ведущими себя как такие взаимодействия лишь при малых или же больших расстояниях, не доказана [2]. Некоторые приемлемые решения такой задачи и достаточные для их существования условия найдены лишь в частном случае [3], а именно: в задаче трех тождественных частиц с S-волновыми парными взаимодействиями центробежного типа и полным угловым моментом, равным [4] или не обязательно равным [5] нулю.

Предложенный в предыдущей работе [5] метод построения и доказательства критерия существования точных решений такой частной задачи, представимых в виде произведения зависящей от гиперрадиуса функции Бесселя на конечную линейную комбинацию трехчастичных гипергармоник, является аналитическим и достаточно простым, так как в его рамках исходная задача сводится к анализу на совместность и последующему решению конечных систем линейных уравнений. Поэтому и для дальнейшего развития теории Фаддеева, и для прикладных аналитических исследований представляется интересным обобщение этого метода для систем из трех не обязательно тождественных частиц с центральными парными взаимодействиями центробежного типа или же конечными подсуммами операторных разложений таких взаимодействий по их собственным базисам из сферических функций. Такое обобщение – главная цель настоящей работы.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом (p_1, p_2, p_3) обозначим исследуемую систему трех **разных** частиц p_1, p_2 и p_3 с массами m_1, m_2 и m_3. Стандартным образом [6] в ее шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$ определим приведенные координаты Якоби $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$, $i = 1,2,3$. Объединим их в шестимерные векторы $\mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ с обычными гиперсферическими координатами (r, Ω_i) [7], где $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ – гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ – набор из пяти гиперсферических углов: $\hat{x}_i$ и $\hat{y}_i$ – пары сферических углов векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$, а $\varphi_i \equiv \operatorname{arctg}(y_i/x_i)$.

Таким образом, в $\mathcal{R}^6$ существуют три ($i = 1,2,3$) якобиевские или декартовы ($\langle \mathbf{r}_i| = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i|$) и три соответствующие им гиперсферические ($\langle \mathbf{r}_i| = \langle r_i, \Omega_i|$) координатные представления. Переход от представления $\langle \mathbf{r}_i|$ к другому представлению $\langle \mathbf{r}_k|$,

$k \neq i$, называется кинематическим преобразованием [3] и характеризуется кинематическим углом:

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki} \operatorname{arctg} \, (m_j(m_1 + m_2 + m_3)/m_k m_i)^{1/2} \, . \tag{3}$$

По определению таких шести углов, если $(k, i) = (1, 2), (3, 1), (2, 3)$, то

$$g_{ki} = -g_{ik} = 1 \, , \quad 0 \leq \gamma_{ki} \leq \pi/2 \, , \quad \sum_{(k,i)} \gamma_{ki} = \pi \, , \tag{4}$$

а значения $\gamma_{ki} = \pm\pi/2, \pm\pi/4, 0$ являются предельными. Например,

$$\begin{aligned} &\gamma_{12} \to \frac{\pi}{2}, \, \gamma_{23} \to 0, \, \gamma_{31} \to \frac{\pi}{2}, \text{ если } \quad m_1/m_2 \to 0 \, , \quad m_2 = O(m_3) \, ; \\ &\gamma_{12} \to \frac{\pi}{4}, \, \gamma_{23} \to \frac{\pi}{2}, \, \gamma_{31} \to \frac{\pi}{4}, \text{ если } \quad m_1/m_2 \to \infty \, , \quad m_2 = m_3 \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть I – единичный оператор, $\mathbf{l}_{x_i}$ и $\mathbf{l}_{y_i}$ – операторы угловых моментов, сопряженные векторам $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$, а $\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_{x_i} + \mathbf{l}_{y_i}$ и $\mathbf{L}$ – операторы полного углового момента и гипермомента. Квадраты всех перечисленных операторов и оператор, описывающий инверсию $\mathbf{r}_i \to -\mathbf{r}_i$, коммутируют с оператором кинематического преобразования $K(\gamma)$ [8]. Если $\gamma = \gamma_{ki}$, то $K(\gamma_{ki}) = P_{ik}P_{jk}$, где P_{ij} – оператор перестановки частиц p_i и p_j.

Свободный гамильтониан системы (p_1, p_2, p_3) в представлении $\langle \mathbf{r}_i | = \langle r, \Omega_i |$ –

$$H_0(\mathbf{r}_i) = -r^{-5}\partial_r(r^5\partial_r) + r^{-2}\mathbf{L}^2(\Omega_i) \, . \tag{6}$$

Для каждой $(k = 1, 2, 3)$ пары (p_i, p_j) частиц p_i и p_j определим оператор взаимодействия V_k в его собственном декартовом представлении $\langle \mathbf{r}_k |$:

$$V_k(\mathbf{x}_k) \equiv c_k x_k^{-2} \, I_k^d \, , \quad I_k^d \equiv \sum_b^d P_k^b \, , \quad P_k^b \equiv \sum_{\beta=-b}^{b} |Y_{b\beta}(\hat{x}_k)\rangle\langle Y_{b\beta}(\hat{x}_k)| \, , \tag{7}$$

где c_k – ненулевая действительная константа, индекс b принимает целые значения, причем $b \leq d$, а $Y_{b\beta}$ – сферическая функция. Если $b = 0, 1, \ldots, d = \infty$, то I_k^d – сумма всех проекторов P_k^b на состояния частиц p_i и p_j с угловыми моментами $\ell_{x_k} = b$ – единичный оператор: $I_k^d = I$. В этом случае V_k – центральное взаимодействие $(V_k(\mathbf{x}_k) = V_k(x_k))$, действующее в его собственном гиперсферическом представлении $\langle \mathbf{r}_k, \Omega_k |$ как оператор умножения на функцию $c_k/r^2 \cos^2 \varphi_k$. В любом другом случае взаимодействие V_k – нецентральное, так как является подсуммой операторного разложения центрального взаимодействия $V_k(x_k)$ по его собственному базису из сферических функций и включено лишь в определенном числе парциальных волн. Например, при $b = d = 0$ это взаимодействие является S-волновым. В несобственном представлении $\langle r_i, \Omega_i |$, $i \neq k$, оператор V_k становится более сложным, так как функция $\cos^2 \varphi_k$ зависит от углов Ω_i и γ_{ki}:

$$V_k(\mathbf{x}_k(\mathbf{r}_i; \gamma_{ki})) = I_k^d \, c_k/r^2 \cos^2 \varphi_k \, , \quad \varphi_k = \varphi_k(\varphi_i, u, \gamma_{ki}) \, , \tag{8}$$

$$\cos^2 \varphi_k = \cos^2(\gamma_{ki} - \varphi_i) + (1/2)(u - 1) \sin 2\gamma_{ki} \sin 2\varphi_i, \; u \equiv \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_i}{x_i y_i}. \tag{9}$$

Состояние $\langle\varepsilon|$ системы (p_1,p_2,p_3) характеризуем полным набором ε сохраняющихся квантовых чисел. При любых индексах b и d в представлениях (7) взаимодействий сохраняется полная энергия E этой системы, квадрат $\ell(\ell+1)$ ее полного углового момента $\mathbf{l}$ и его третья проекция m, т.е. $E,\ell,m\in\varepsilon$. Если в этих представлениях $b=0,1,\ldots,d=\infty$ или же b принимает только четные или только нечетные значения, то в силу соотношения $(P_{ij}-I)V_k(x_k)=0$ или $P_{ij}Y_{b\beta}(\hat{x}_k)=(-1)^b Y_{b\beta}(\hat{x}_k)$ сохраняется и четность σ по отношению к инверсии $\mathbf{r}_i\to-\mathbf{r}_i$. В этих трех случаях $\varepsilon=(E,\ell,m,\sigma)$.

Решение Ψ^ε уравнения Шредингера для трехчастичного состояния $\langle\varepsilon|$

$$(H_0+\sum_{k=1}^{3}V_k-E)\,\Psi^\varepsilon=0 \tag{10}$$

и сопоставленное этому решению формулой

$$\Psi^\varepsilon=\sum_{k=1}^{3}\Psi_k^\varepsilon \tag{11}$$

решение $(\Psi_1^\varepsilon,\Psi_2^\varepsilon,\Psi_3^\varepsilon)$ системы уравнений Фаддеева [2]

$$(\,H_0-E\,)\,\Psi_i^\varepsilon=-V_i\sum_{k=1}^{3}\Psi_k^\varepsilon\,,\quad i=1,2,3\,, \tag{12}$$

будем искать в классе $\mathcal{B}^\varepsilon$, состоящем из квадратично-интегрируемых на единичной сфере $\mathcal{S}^5$ в $\mathcal{R}^6$ функций, обладающих данным набором квантовых чисел ε. Для такого класса полный и ортонормированный на $\mathcal{S}^5$ угловой базис образуют вполне определенные трехчастичные гипергармоники [6]:

$$\begin{aligned} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) &= N_{Lab}\,(\sin\varphi_i)^a\,(\cos\varphi_i)^b\,P_n^{(a+1/2,\,b+1/2)}(\cos 2\varphi_i)\;\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{y}_i,\hat{x}_i)\,, \\ L &= a+b+2n,\; n=0,1...,\; \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{l}\,, \end{aligned} \tag{13}$$

где N_{Lab} – известный нормировочный множитель, $P_n^{(a+1/2,b+1/2)}$ и $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$ – полином Якоби и бисферическая гармоника, а в случае $\sigma\in\varepsilon$ индексы a и b подчиняются еще одному дополнительному условию: $(-1)^{a+b}=\sigma$.

Гипергармоники (13) – собственные функции операторов P_{jk}, $\mathbf{l}_{x_i}^2,\mathbf{l}_{y_i}^2$ и $\mathbf{L}^2$:

$$\begin{aligned} &\Big(P_{jk}-(-1)^b\Big)\,Q=0,\;\Big(\mathbf{l}_{y_i}^2-a(a+1)\Big)\,Q=0, \\ &\Big(\mathbf{l}_{x_i}^2-b(b+1)\Big)\,Q=0,\;\Big(\mathbf{L}^2-L(L+4)\Big)\,Q=0,\;Q\equiv Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \end{aligned} \tag{14}$$

но не являются таковыми для оператора $K(\gamma_{ki})$. Этот оператор сохраняет квантовые числа $L,\ell(\ell+1),m,\sigma$, но не сохраняет числа $a(a+1)$ и $b(b+1)$:

$$K(\gamma_{ki})\,Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_i)\equiv Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_k(\Omega_i;\gamma_{ki}))=\sum_{ab}\langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell}\,Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,. \tag{15}$$

Здесь и всюду далее, где не оговорено, индексы a и b пробегают все допустимые при заданных L и ε значения. Матричные элементы оператора $K(\gamma)$ в случае $\gamma=\gamma_{ki}$ являются коэффициентами Рейнала-Реваи [9] и при любых $\gamma,\gamma'\in[-\pi/2,\pi/2]$

подчиняются следующим соотношениям симметрии, ортонормированности и правилу сумм [8]:

$$\langle a'b'|K(-\gamma)|ab\rangle_{L\ell} = (-1)^{b'+b}\,\langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}\,, \tag{16}$$

$$\sum_{ab}\langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}\,\langle ab|K(-\gamma)|a''b''\rangle_{L\ell} = \delta_{a'a''}\,\delta_{b'b''}\,, \tag{17}$$

$$\langle a'b'|K(\gamma+\gamma')|a''b''\rangle_{L\ell} = (-1)^{L}\sum_{ab}\langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}\,\langle ab|K(\gamma')|a''b''\rangle_{L\ell}\,. \tag{18}$$

3. МЕТОД

Поставим задачу следующим образом: в случае взаимодействий (7) доказать в классе $\mathcal{B}^{\epsilon}$ критерий существования и сформулировать метод построения всех решений уравнения Шредингера (10) типа

$$\Psi^{\epsilon}(\mathbf{r}_i;p^2) = r^{-2}Z_p(z)\,F^{\epsilon}(\Omega_i;p^2)\,,\quad z\equiv r\sqrt{E}\,, \tag{19}$$

$$F^{\epsilon}(\Omega_i;p^2) = \sum_{L=s}^{t}\sum_{ab}{}^{i}B^{\ell}_{Lab}\,Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\,, \tag{20}$$

где s – минимально возможное при данном ϵ значение гипермомента, $t<\infty$, а все коэффициенты ${}^{i}B^{\ell}_{Lab}$ зависят от значений константы p^2.

Начнем с важного замечания. Исследуемый случай парных взаимодействий центробежного типа (7) является исключительным: только такие взаимодействия зависят от гиперрадиуса так же как и единственное действующее на переменные Ω_i слагаемое $r^{-2}\mathbf{L}^2(\Omega_i)$ свободного гамильтониана (6). Поэтому после умножения уравнения Шредингера (10), записанного в представлении $\langle r,\Omega_i|$, на r^2 получается уравнение

$$\left(r^{-3}\partial_r(r^5\partial_r)+r^2E\right)\,\Psi^{\epsilon}(\mathbf{r}_i) = \left(\mathbf{L}^2(\Omega_i)+\sum_{k=1}^{3}I^d_k\,c_k\,\sec^2\varphi_k\right)\,\Psi^{\epsilon}(\mathbf{r}_i)\,, \tag{21}$$

в левой части которого все операторы действуют только на один аргумент r, а в правой части – на все остальные переменные Ω_i. Дифференциальные уравнения, обладающие таким свойством, могут иметь факторизованные решения, которые строятся методом разделения переменных [10]. Применим этот метод к уравнению (21): подстановкой (19) сведем его к двум уравнениям, связанным посредством пока неизвестной постоянной разделения p^2 переменных r и Ω_i. Первое уравнение – хорошо изученное при всех комплексных z и p уравнение Бесселя [11] с пока неопределенным p:

$$\left(z^2\partial_z^2+z\partial_z+z^2-p^2\right)Z_p(z)=0\,, \tag{22}$$

а второе уравнение можно интерпретировать как трехчастичное уравнение Шредингера на $\mathcal{S}^5$ с параметром p^2-4 в качестве энергии:

$$\left(\mathbf{L}^2(\Omega_i)+\sum_{k=1}^{3}I^d_k c_k\,\sec^2\varphi_k-(p^2-4)\right)\,F^{\epsilon}(\Omega_i;p^2)=0\,. \tag{23}$$

Поставленная задача частично решена: из уравнения Шредингера (10) определена функциональная зависимость его искомого решения (19) от r.

Аналитическое исследование всех решений уравнения (23) представляется очень сложной задачей по трем причинам: в этом уравнении содержится свободный параметр p^2, число независимых переменных $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i$, равное пяти, достаточно велико, более того зависимость (9) функций $\cos^2\varphi_k$ с $k \neq i$ от аргументов Ω_i непростая. Все переменные можно разделить, применив к обсуждаемому уравнению (23) метод гипергармоник. Исследуем, что получится в результате. Подставим ряд (20) с пока неопределенным t в это уравнение. Полученное уравнение спроектируем на гиперсферический базис (13). Таким образом выведем, вообще говоря, бесконечную однородную систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов ${}^iB^{\ell}_{Lab}$. Потенциальная часть матрицы этой системы содержит интегралы

$$c_k \int_{S^5} d\Omega_i \, \left(Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\right)^* \, I^d_k \sec^2\varphi_k \, Y^{\ell m}_{L'a'b'}(\Omega_i) \, , \quad k = 1, 2, 3,$$

которые с помощью формул (15) и известного представления [11] полинома $P^{a+1/2, b+1/2}_n(q)$ переменной $q \equiv \cos 2\varphi_i$ в виде конечного ряда по целым степеням $(1 \pm q)$ сведем к конечным суммам табличных интегралов [12]. В итоге каждый исходный интеграл представится конечной суммой, содержащей коэффициенты Рейнала-Реваи и гипергеометрические ряды ${}_3F_2$ от комбинаций индексов L, a, b, a' и b'. Из-за столь сложной зависимости потенциальных матричных элементов от пяти индексов аналитическое исследование системы уравнений для коэффициентов ${}^iB_{Lab}$ представляется невозможным.

Первопричина того, что методом гипергармоник не удалось свести уравнение (23) к более простой задаче такова: это уравнение, как и исходное уравнение Шредингера (10), содержит сумму трех взаимодействий и допускает запись только в одном координатном представлении, которое всегда оказывается несобственным для двух парных взаимодействий, что и приводит к сложным потенциальным матрицам. В отличие от уравнения Шредингера (10) каждое уравнение фаддеевской системы (12) содержит только одно взаимодействие и по определению записывается в собственном для этого взаимодействия координатном представлении. Поэтому уравнения Фаддеева более удобны для построения точных решений задачи трех частиц с любыми парными взаимодействиями, чем отвечающее им уравнение Шредингера. Приведенные ниже построения еще раз подтверждают этот известный факт [2].

Чтобы закончить построение функций (19), необходимо определить постоянную p, индекс t и коэффициенты ${}^iB^{\ell}_{Lab}$ ряда (20). Для этого перейдем к уравнениям Фаддеева (12). Так как в искомой функции (19) переменные r и Ω_i разделены, то ее фаддеевские компоненты имеют вид

$$\Psi^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i; p^2) = r^{-2} Z_p(z) \, F^{\varepsilon}_i(\Omega_i; p^2) \, , \quad i = 1, 2, 3, \tag{24}$$

а функция F^{ε} представляется суммой своих фаддеевских компонент F^{ε}_k:

$$F^{\varepsilon}(\Omega_i; p^2) = \sum_{k=1}^{3} F^{\varepsilon}_k(\Omega_k(\Omega_i; \gamma_{ki}); p^2) \, . \tag{25}$$

Используя представления (24) и (25) и тот факт, что Z_p – решение уравнения (22), выводим из исходных уравнений Фаддеева (12) в $\mathcal{R}^6$ уравнения Фаддеева на $\mathcal{S}^5$:

$$\cos^2\varphi_i \, \left(\mathbf{L}^2(\Omega_i) + 4 - p^2\right) \, F^{\varepsilon}_i(\Omega_i; p^2) = -c_i \, I^d_i \sum_{k=1}^{3} F^{\varepsilon}_k(\Omega_k; p^2) \, , \quad i = 1, 2, 3 \, . \tag{26}$$

Для углового анализа этой системы представим искомые функции F_i^ε рядами по **их собственным** гиперсферическим базисам с пока неизвестными постоянными t и $B_{Lab}^{i\ell}$:

$$F_i^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = \sum_{L=s}^{t} \sum_{ab} B_{Lab}^{i\ell} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3, \tag{27}$$

и выведем два вспомогательных соотношения. Подставим ряды (20) и (27) в равенство (25). Затем, применяя правило (15), получим первое соотношение – связь между коэффициентами разложений функции $F^\varepsilon(\mathbf{r}_i; p^2)$ и ее компонент $F_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k; p^2)$:

$${}^i B_{Lab}^{\ell} = B_{Lab}^{i\ell} + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} \, B_{La'b'}^{k\ell} \,. \tag{28}$$

Для вывода второго соотношения – разложения по гипергармоникам произведения $\cos^2 \varphi_i \, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ – используем представление (13) и положим $q \equiv \cos 2\varphi_i$ и $\cos^2 \varphi_i = (1+q)/2$. Затем по известной формуле [11] представим функцию $q P_n^{(a+1/2, b+1/2)}(q)$ с индексом $n = (L-a-b)/2 \neq 0$ линейной комбинацией двух полиномов $P_{n\pm 1}^{(a+1/2,b+1/2)}(q)$, а в оставшемся случае $n = 0$ – произведением числового множителя на полином $P_1^{(a+1/2,b+1/2)}(q)$. Учтем также, что по определению индекса s при данном ε не существует гипергармоник с индексами гипермомента $L < s$. В итоге получим искомое и ключевое для дальнейших построений представление

$$\cos^2 \varphi_i \, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) = \sum_{L'=L_-(L)}^{L+2} C_{L'L}^{ab} \, Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega_i) \,, \tag{29}$$

где $L_-(L) \equiv L - 2(1-\delta_{Ls})(1-\delta_{L,a+b})$, $L = a + b + 2n$ и

$$\begin{aligned} C_{LL}^{ab} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(b-a)(a+b+1)}{(L+1)(L+3)}\right), \quad C_{LL'}^{ab} = C_{L'L}^{ab}\,, \\ C_{L,L-2}^{ab} &= \frac{1}{4}\left(\left(1 - \frac{a+b}{L}\right)\left(1 + \frac{a+b}{L+2}\right)\right)^{1/2} \left(1 - \left(\frac{a-b}{L+1}\right)^2\right)^{1/2} . \end{aligned} \tag{30}$$

Оно означает, что оператор умножения на функцию $\cos^2 \varphi_i$ отображает гипергармонику $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ в линейную комбинацию гипергармоник с теми же самыми индексами a и b и индексами гипермомента $L, L+2$ в случаях $L = s$ или $L = a + b$ и индексами $L, L \pm 2$ во всех остальных случаях.

Приступим к угловому анализу системы (26) в самом общем случае трех центральных взаимодействий (7), когда $I_k^d = I$, $k = 1, 2, 3$. Каждое ($i = 1, 2, 3$) уравнение этой системы преобразуем следующим образом: подставим в него искомые ряды (27), затем применим формулы (14), (28) и (29), приведем подобные члены, получившееся соотношение спроектируем на собственные для исследуемого уравнения базисные гипергармоники $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ с любыми допустимыми при данном ε индексами L, a и b. Упорядочим полученные линейные уравнения для искомых коэффициентов $B_{Lab}^{i\ell}$. Сначала скомпонуем L-блоки, составив каждый L-блок из уравнений для коэффициентов $B_{Lab}^{i\ell}$, $i = 1, 2, 3$, полученных проектированием всех трех уравнений (26) на гипергармоники с одним и тем же L, но всеми возможными ($L = a + b + 2n, n = 0, 1, \ldots$) при таком L индексами a и b. Число $N_{L\varepsilon}$ всех возможных пар таких индексов конечно.

Внутри каждого L-блока, состоящего из $3N_{L\varepsilon}$ уравнений, сначала запишем все $N_{L\varepsilon}$ уравнения для коэффициентов $B^{i\ell}_{Lab}$, порожденные проектированием на гипергармоники с одним и тем же индексом L первого ($i=1$) уравнения системы (26), затем – второго ($i=2$) и наконец – третьего ($i=3$). Упорядоченные таким образом L-блоки ($L=s,...,t+2$) запишем в порядке возрастания индекса L. Для сокращения записи используем символы ${}^iB^{\ell}_{Lab}$ линейных комбинаций (28) искомых коэффициентов $B^{i\ell}_{Lab}$. В итоге первые L-блоки с $L=s,s+2,...,t-2$ дадут незамкнутую систему уравнений

$$\sum_{L'=L_-(L)}^{L_+(L)} \left((L'+2)^2-p^2\right) C^{ab}_{L'L}\, B^{i\ell}_{L'ab} + c_i\, {}^iB^{\ell}_{Lab} = 0\,, \tag{31}$$

где $L_+(L)=L+2$, а предел $L_-(L)$ – такой же как в суммах (29), предпоследний L-блок ($L=t$) составят уравнения

$$(t^2-p^2)C^{ab}_{t-2,t}B^{i\ell}_{t-2,ab} + ((t+2)^2-p^2)C^{ab}_{tt}B^{i\ell}_{tab} + c_i\,{}^iB^{\ell}_{tab} = 0\,, \tag{32}$$

а последний L – блок ($L=t+2$) – не зацепляющиеся по индексам i,a, и b уравнения

$$\left((t+2)^2-p^2\right) C^{ab}_{t,t+2}\, B^{i\ell}_{tab} = 0\,. \tag{33}$$

Этим не зацепляющимся уравнениям всегда удовлетворяют нулевые значения всех коэффициентов $B^{i\ell}_{tab}$. В этом случае уравнения (32) совместны только при всех нулевых значениях $B^{i\ell}_{t-2,ab}$, так как все коэффициенты $C^{ab}_{L'L}$ (см. формулы (30)) положительные, по той же причине система (31) имеет только тривиальное решение. Рассматриваемая система (33) имеет нетривиальные решения ($B^{i\ell}_{tab}\neq 0$ хотя бы при одной тройке индексов i,a и b) тогда и только тогда, когда $p^2=(t+2)^2$. При таком, подразумеваемом всюду далее, соотношении последний L-блок ($L=t-2$) системы (31) не содержит неизвестных $B^{i\ell}_{tab}$. Поэтому в этой системе далее полагаем $L_+(L)=L+2(1-\delta_{L,t-2})$, а соотношения (32) переписываем в виде уравнений, определяющих неизвестные $B^{i\ell}_{tab}$ через неизвестные $B^{i\ell}_{t-2,ab}$:

$$c_i\,{}^iB^{\ell}_{tab} = c_i\left(B^{i\ell}_{tab} + \sum_{k\neq i}\sum_{a'b'}\langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{t\ell}\, B^{k\ell}_{ta'b'}\right) = 4(t+1)C^{ab}_{t,t-2}\, B^{i\ell}_{t-2,ab}\,. \tag{34}$$

Исследуем на совместность полученную совокупность систем (31) и (34). Возможны всего два случая: все коэффициенты $B^{i\ell}_{t-2,ab}$ нулевые или хотя бы один из них не равен нулю.

Пусть все коэффициенты $B^{i\ell}_{t-2,ab}$ – нулевые. Тогда система (34) становится однородной. Подставим в нее некоторые произвольные коэффициенты $B^{2\ell}_{tab}$ и $B^{3\ell}_{tab}$, а все коэффициенты $B^{1\ell}_{tab}$ выберем так, чтобы заведомо удовлетворялись все уравнения с индексом $i=1$:

$$B^{1\ell}_{tab} = -\sum_{k=2}^{3}\sum_{a'b'}\langle ab|K(\gamma_{k1})|a'b'\rangle_{t\ell}\, B^{k\ell}_{ta'b'}\,, \quad \forall B^{k\ell}_{tab}\,, \quad \forall a,b. \tag{35}$$

Затем, применяя формулы (4) и (16) – (18), сведем все полученные таким образом соотношения к тождествам типа $0=0$. Следовательно, однородная система, отвечающая системе (34), всегда имеет нетривиальные решения типа (35). Значит, по известной теореме линейной алгебры [13] матрица $\mathbf{M}^t$ этой системы всегда вырождена ($\det \mathbf{M}^t = 0$).

Если все коэффициенты $B^{i\ell}_{t-2,ab}$ нулевые, то из системы (31) следует, что все коэффициенты $B^{i\ell}_{Lab}$ с $L < t-2$ также равны нулю. Поэтому трехкратные ряды (27) вырождаются в суммы по индексам a и b с неоднозначно определенными коэффициентами (35):

$$F^{\varepsilon}_i(\Omega_i; p^2) = \sum_{ab} B^{i\ell}_{tab}\, Y^{\ell m}_{tab}(\Omega_i)\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{36}$$

При любых таких коэффициентах в сумме (20) все коэффициенты (28) равны нулю, а сама сумма – тривиальная функция: $F^{\varepsilon} \equiv 0$. Следовательно, найденные нетривиальные решения (36) уравнений Фаддеева (26) – ложные решения [3].

Пусть теперь хотя бы один из коэффициентов $B^{i\ell}_{t-2,ab}$ не равен нулю. Тогда система (34) несовместна как неоднородная система с вырожденной матрицей $\mathbf{M}^t$.

Итак, в случае центральных взаимодействий (7) уравнение Шредингера (10) никогда не имеет нетривиальных решений типа (19), (20), а уравнения Фаддеева (12) имеют ложные решения, заданные формулами (24), (35) и (36).

Исследуем теперь случай нецентральных взаимодействий: $I^d_i \neq I, i = 1, 2, 3$, на $\mathcal{S}^5$.

Пусть все три взаимодействия V_k последовательные ($b = 0, 1, \ldots, d < \infty$) конечные подсуммы разложения оператора I по соответствующим сферическим базисам. Тогда оператор I^d_i – единичный для всех гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)$ с индексом $b \leq d$ и эквивалентен оператору умножения на нуль для всех остальных гипергармоник тех же аргументов.

Пусть в искомых рядах (20) и (27) максимальное значение t гипермомента настолько мало, что в представлении $t = a + b + 2n$, где $n = 0, 1, \ldots$, все возможные при данном ε и всех допустимых n значения b не превышают d. Тогда на линейной оболочке гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)$ с $L = s, ..., t$ оператор I^d_i эквивалентен единичному оператору. Поэтому в результате проектирования уравнений (26) на все такие гипергармоники получатся системы (31) и (32), в которых индексы a', b', a и b будут принимать, как и в вышерассмотренном случае ($d = \infty$), все допустимые определением гипергармоник (13) значения. Индексы a и b в проекциях (33) уравнений (26) на гипергармоники $Y^{\ell m}_{t+2,ab}$ окажутся ограниченными условием $b \leq d$. Оно никак не повлияет ни на анализ системы (31) – (33) описанным выше способом, ни на окончательные выводы об отсутствии в рассмотренном случае нетривиальных решений (19), (20) уравнения Шредингера (21).

Теперь предположим, что в искомых рядах (20) и (27) значение t настолько велико, что хотя бы для одной пары слагаемых a и $2n$ в сумме $t = a + b + 2n$ индекс b может превышать d. Тогда матричные элементы

$$\int_{\mathcal{S}^5} d\Omega_i \, \left(Y^{\ell m}_{tab}(\Omega_i) \right)^* \, I^d_i \, Y^{\ell m}_{tab'}(\Omega_i)$$

равны единице при $b' = b \leq d$ и нулю при $b' \neq b$ или $b' = b > d$. Поэтому проектированием уравнений (26) на весь базис (13) получатся уравнения (31) – (33), в которых индексы a', b', a и b подчиняются дополнительным к перечисленным в формулах (13) условиям $b', b \leq d$, и уравнения

$$((L+2)^2 - p^2) B^{i\ell}_{Lab} = 0\,, \quad L = s, s+2, ..., t\,, \quad b > d\,.$$

Удовлетворим эти уравнения, положив $B^{i\ell}_{Lab} = 0$ при всех $L \leq t$ и $b > d$. Из равенств (33) с $b < d$ опять получаем $p^2 = (t+2)^2$. Теперь в рядах (20), (27) и суммах (28) индексы b' и b не превышают d, а значения индексов a' и a также оказываются ограниченными условиями треугольника.

Если, несмотря на дополнительные ограничения на индексы, матрица $\mathbf{M}^t$ системы (34) вырождена, то, как и в случае центральных взаимодействий, имеются только ложные решения (35), (36) уравнений Фаддеева (26). Если же, благодаря этим ограничениям, $\det \mathbf{M}^t \neq 0$, то возможны два случая: матрица $\mathbf{A}^t$ системы (31) не вырождена и вырождена. Пусть $\det \mathbf{A}^t \neq 0$, тогда эта система имеет лишь тривиальное решение и поэтому такое же решение имеет система (34). Если же $\det \mathbf{A}^t = 0$, то система (31), а значит и система (34), имеют нетривиальные решения.

Итак, если в случае нецентральных взаимодействий, заданных формулами (7), в которых $b = 0, 1, \ldots, d < \infty$, выполняются условия

$$p^2 = (t+2)^2\,, \quad t > d, \quad \det \mathbf{A}^t = 0\,, \quad \det \mathbf{M}^t \neq 0\,, \tag{37}$$

а коэффициенты $B^{i\ell}_{Lab}$ удовлетворяют системам (31) и (34), то функция Ψ^ε, заданная формулами (19), (20) и (28), – точное решение уравнения Шредингера (21).

Докажем, что эти же условия являются и необходимыми. Пусть функция Ψ^ε типа (19), (20) удовлетворяет уравнению Шредингера (21). Дословно повторим вывод соотношения $p^2 = (t+2)^2$ и систем (31), (34). Теперь коэффициенты $B^{i\ell}_{Lab}$ удовлетворяют этим системам по определению. Так как однородная система (31) имеет решение, то ее матрица $\mathbf{A}^t$ вырождена. Неоднородная система (34) тоже имеет решение. Следовательно, $\det \mathbf{M}^t \neq 0$, что, как было показано, возможно только при $t > d$.

Исследуем доказанный критерий существования (37) точных решений. Элементы матрицы $\mathbf{A}^t$ и $\mathbf{M}^t$ систем (31) и (34) зависят от параметров c_1, c_2, c_3 взаимодействий и от кинематических углов – функций (3) двух отношений масс частиц, например, m_1/m_3 и m_2/m_3. Поэтому условие $\det \mathbf{M}^t \neq 0$ может выполняться при любых ненулевых параметрах c_1, c_2 и c_3, но не при всех отношениях масс частиц, а равенство $\det \mathbf{A}^t = 0$ может быть справедливым только при определенных отношениях масс частиц и значениях этих параметров.

Пусть $N^d_{L\varepsilon}$ – число гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}$ с индексами $b \leq d$ и любыми допустимыми при таких b индексами a. Так как каждый L-блок системы (31) содержит $N^d_{L\varepsilon}$ уравнений, то матрица $\mathbf{A}^t$ имеет размерность

$$N = 3\sum_{L=s}^{t-2} N^d_{L\varepsilon}$$

и является ленточной матрицей с шириной ленты $3N^d_{t-2,\varepsilon}$. Ее детерминант удобно представить полиномом степени N по целым степеням аргумента q – одного из параметров c_1, c_2, c_3 взаимодействий (7), с коэффициентами C_n, зависящими от двух других параметров и двух отношений масс частиц. Массу одной из частиц можно принять за единицу масс. При нашем выборе $q = c_2$ и $m_3 = 1$ получается характеристическое уравнение

$$\det \mathbf{A}^t = \sum_{n=0}^{N} C_n(c_1, c_3, m_1, m_2)\, c_2^n = 0\,, \tag{38}$$

а анализ условия $\det \mathbf{A}^t = 0$ сводится к исследованию всех его действительных нулей $c_2(c_1; c_3, m_1, m_2)$ как функций аргумента c_1 и параметров c_3, m_1, m_2, причем параметры m_1 и m_2 берутся лишь такими, при которых $\det \mathbf{M}^t(m_1, m_2) \neq 0$.

Итак, случай взаимодействий (7) с индексом суммирования $b = 1, 2, \ldots, d < \infty$ полностью рассмотрен. Все остальные случаи, когда индекс b пробегает произвольную, но конечную последовательность ($b \leq d < \infty$), можно исследовать тем же способом и показать, что независимо от выбора такой последовательности сформулированный выше критерий остается в силе.

До сих пор три частицы считались разными. Для полноты стоит рассмотреть и два оставшихся случая тождественных частиц.

Пусть две из трех частиц, для определенности p_2 и p_3, тождественные. Тогда $m_2 = m_3$, $c_2 = c_3$ и, согласно определениям (3), $\gamma_{12} = \gamma_{31}$, а на решение Ψ^ε уравнения Шредингера (10) и его три фаддеевские компоненты Ψ_k^ε накладываются известные условия перестановочной симметрии [2]:

$$\Psi^\varepsilon = \pm P_{23}\Psi^\varepsilon;\ \Psi_1^\varepsilon = \pm P_{23}\Psi_1^\varepsilon,\ \Psi_2^\varepsilon = \pm P_{23}\Psi_3^\varepsilon,\ \Psi^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon + (I \pm P_{23})\Psi_2^\varepsilon. \tag{39}$$

Здесь и далее, где не оговорено, берется знак плюс или минус, если p_2 и p_3 бозоны или, соответственно, фермионы. Свойства перестановочной симметрии (14) гипергармоник и условия (39) порождают дополнительные ограничения на коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ рядов фаддеевских компонент (27) и комбинаций (28): $B_{Lab}^{1\ell} = 0$ при всех L,a и нечетном (четном) b, если p_1 и p_2 – бозоны (фермионы) и в любом случае $B_{Lab}^{2\ell} = B_{Lab}^{3\ell}$ при всех L, a и b. Из-за таких условий системы (31) и (34) упрощаются: в них индекс $i = 1, 2$ принимает теперь не три, а два значения ($i = 1, 2$), при $i = 1$ индексы b' и b – только четные (нечетные), если p_2, p_3 – бозоны (фермионы), а комбинации (28) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
{}^1B_{1Lab}^{\ell} &= B_{Lab}^{1\ell} + ((-1)^b \pm 1)\sum_{a'b'}(-1)^{b'}\langle ab|K(\gamma_{12})|a'b'\rangle_{L\ell}\, B_{La'b'}^{2\ell}\,, \qquad (40)\\
{}^2B_{Lab}^{\ell} &= \sum_{a'b'}\langle ab|K(\gamma_{12})|a'b'\rangle_{L\ell}\, B_{La'b'}^{1\ell} + \\
&+\ B_{Lab}^{2\ell} \pm (-1)^b\sum_{a'b'}\langle ab|K(\gamma_{23})|a'b'\rangle_{L\ell}\, {}^2B_{La'b'}^{2\ell}\,.
\end{aligned}$$

Пусть теперь все три частицы тождественные. Тогда при любых $i, k = 1, 2, 3$ верны равенства $m_i = m_k$, $c_i = c_k$, $|\gamma_{ki}| = \pi/3$. Условия симметрии [2]:

$$\Psi^\varepsilon = \pm P_{ki}\Psi^\varepsilon; \quad \Psi_i^\varepsilon = \pm P_{ki}\Psi_k^\varepsilon,\ \Psi^\varepsilon = (I \pm P_{12} \pm P_{23})\Psi_i^\varepsilon, \quad i \neq k = 1, 2, 3\,, \tag{41}$$

будут выполняться для искомой функции (19), если в рядах (20), (27) и суммах (28) положить $B_{Lab}^{1\ell} = B_{Lab}^{2} = B_{Lab}^{3\ell}$ при всех L,a и b, а индексы b' и b брать четные или нечетные, если три частицы – бозоны или фермионы. Тогда в системах (31) и (34) индекс i будет принимать лишь одно значение ($i = 1$), индексы b' и b подчинятся тем же условиям, а формулы (28) примут совсем простой вид:

$${}^1B_{Lab}^{\ell} = \sum_{a'b'}\left(\delta_{aa'}\delta_{bb'} + 2\langle ab|K(\pi/3)|a'b'\rangle_{L\ell}\right)\ B_{L'a'b'}^{1\ell}\,. \tag{42}$$

Учет описанных ограничений на коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ и индексы не вносит ничего существенного в анализ систем (31) и (34), а значит и в его окончательные выводы:

уравнение Шредингера (21) не имеет факторизованных точных решений (19), (20) с перестановочной симметрией (39) или (41) в случае центральных взаимодействий и обладает такими, если в противном случае выполнены условия (37).

4. ПРИМЕРЫ

Для пояснения предложенного метода проанализируем самый простой случай. Пусть все взаимодействия S-волновые, а полный угловой момент равен нулю.

Так как $d = 0$ и $\ell = 0$, то полный угловой базис образуют гипергармоники Y^{00}_{L00}, индексы s, a', b', a и b могут принимать всюду только нулевые значения, а L и t – всегда четные числа: $L = 2(n-1), t = 2(m-1)$, где m и n – натуральные. Для всех искомых и известных коэффициентов с такими индексами удобно ввести сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} B^i_n &\equiv B^{i\ell}_{Lab}\,; \quad {}^iB_n \equiv {}^iB_{Lab}\,, \\ K_n(\gamma_{ki}) &\equiv \langle 00|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0} = \frac{\sin 2n\gamma_{ki}}{n \sin 2\gamma_{ki}}\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Тогда искомые функции (19) и (24) примут вид

$$\Psi^\varepsilon(r,\varphi_i;4m^2) = \frac{1}{2\pi^{3/2}}\, r^{-2} Z_{2m}(z) \sum_{n=1}^{m} {}^iB_n\, \frac{\sin 2n\varphi_i}{\sin 2\varphi_i}\,, \tag{44}$$

$$\Psi^\varepsilon_i(r,\varphi_i;4m^2) = \frac{1}{2\pi^{3/2}}\, r^{-2} Z_{2m}(z) \sum_{n=0}^{m} B^i_n\, \frac{\sin 2n\varphi_i}{\sin 2\varphi_i}\,. \tag{45}$$

Коэффициенты (30) с $a = 0$ и $b = 0$ не зависят от L, L': $C^{00}_{LL} = 1/2$, а $C^{00}_{L,L\pm 2} = 1/4$. Поэтому последовательными подстановками (43) и

$$B^i_n = X^i_n/(n^2 - m^2)\,, \quad n = 1,2,\ldots,m-1\,; \quad X^i_m = B^i_m \tag{46}$$

в соответствующие рассматриваемой перестановочной симметрии определения (28), (40), (42) и системы (31) и (34) получаем более удобную для анализа систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}^1\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = 0\,, \\ &\mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{D}^n\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n+1} = 0\,, \quad n = 2,3,\ldots,m-2\,, \\ &\mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{D}^{m-1}\mathbf{X}_{m-1} = 0\,, \end{aligned} \tag{47}$$

и, соответственно, одно матричное уравнение:

$$\mathbf{M}^t\mathbf{X}_m = -\mathbf{X}_{m-1}/4\,. \tag{48}$$

Систему (47) можно представить и одним матричным уравнением:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{X} = 0\,, \quad \mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{m-1})^T\,, \tag{49}$$

где $\mathbf{A}^t$ – блочно трехдиагональная матрица. Блоки ее главной диагонали – матрицы $\mathbf{D}^n$, а все блоки нижней и верхней диагоналей – единичные матрицы.

Если все частицы разные, то в полученных уравнениях (47) и (48) все столбцы новых неизвестных коэффициентов X_n^i и матрицы трехмерные:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &\equiv (X_n^1, X_n^2, X_n^3)^T, \quad n = 1, 2, \ldots, m, \\ D_{ii}^n &= 2 + \frac{c_i}{n^2 - m^2}, \quad D_{ik}^n = (D_{ii}^n - 2) K_n(\gamma_{ki}); \\ M_{ii}^t &= c_i, \quad M_{ik}^t = c_i K_m(\gamma_{ki}), \quad k \neq i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{50}$$

Если частицы p_2 и p_3 – тождественные бозоны, то из условия симметрии $B_{Lab}^{2\ell} = B_{Lab}^{3\ell}$, следует, что $X_n^2 = X_n^3$ при всех n, поэтому все столбцы и матрицы становятся двухмерными:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &\equiv (X_n^1, X_n^2)^T, \quad n = 1, 2, \ldots, m, \\ D_{ii}^n &= 2 + \frac{c_i}{n^2 - m^2}\,(1 + \delta_{i2} K_n(\gamma_{23})), \quad D_{ik}^n = \frac{c_i}{n^2 - m^2}\,(1 + \delta_{k2})\, K_n(\gamma_{12}); \\ M_{ii}^t &= c_i\,(1 + \delta_{i2}\, K_m(\gamma_{23})), \quad M_{ik}^t = c_i\,(1 + \delta_{k2}\, K_m(\gamma_{ki})), \quad k \neq i = 1, 2. \end{aligned} \tag{51}$$

Если p_1, p_2, p_3 – тождественные бозоны, то из-за условий симметрии ($X_n^i = X_n^k$ при любых i, k, n) все столбцы и матрицы уравнений (47) и (48) одномерные:

$$\mathbf{X}_n \equiv X_n^1,\ \mathbf{D}^n = \frac{c_2}{n^2 - m^2}\,(1 + 2K_n(\pi/3))\ ;\ \mathbf{M}^t = c_2\,(1 + 2K_m(\pi/3))\,. \tag{52}$$

Опишем наиболее экономный способ решения системы (47), основанный на известном методе прямой и обратной подстановок и удобный для операторного накопления [14]. Сначала все столбцы $\mathbf{X}_n$, начиная со второго, последовательно выражаем через первый столбец:

$$\mathbf{X}_2 = -\mathbf{D}^1\,\mathbf{X}_1\,, \quad \mathbf{X}_3 = \left(\mathbf{D}^2\,\mathbf{D}^1 - \mathbf{I}\right)\mathbf{X}_1\,, \ldots \tag{53}$$

Таким образом, исходную систему (47) или (49) сколь угодно большой, но конечной размерности сводим к уравнению

$$\mathbf{G}^t \mathbf{X}_1 = 0\,. \tag{54}$$

По построению размерность его матрицы $\mathbf{G}^t$ не превышает трех, а характеристическое уравнение (38) эквивалентно уравнению

$$\det \mathbf{G}^t = 0\,. \tag{55}$$

После того, как найден корень c_2 этого уравнения и соответствующее ему решение $\mathbf{X}_1$ уравнения (54), все остальные столбцы $\mathbf{X}_n, n = 2, \ldots, m-1$, последовательно вычисляем по формулам (53).

Как известно [15], матрицы $\mathbf{M}^t$ с элементами (50) или (51) вырождены при $t = 0, 2$ и не вырождены при $t = 4, 6, \ldots$ Следовательно, если $t = 4, 6, \ldots$, а параметры c_1, c_2, c_3 взаимодействий удовлетворяют уравнению (55), то функции (44) и (45) будут нетривиальными точными решениями соответствующих уравнений (10) и (12). Как пример исследуем уравнение (55) в случае $t = 4$, когда $m = t/2 + 1 = 3$ и $\mathbf{G}^4 = \mathbf{I} - \mathbf{D}^1\mathbf{D}^2$.

Три разные частицы. Характеристическое уравнение (55) является квадратным:

$$\begin{aligned}
& \det \mathbf{G}^4 = Ac_2^2 + Bc_2 + C = 0\,; && (56)\\
A & \equiv 15 + 2(t_1^2-1)c_1 + 2(t_3^2-1)c_3\,, \\
B & \equiv 2(t_1^2-1)c_1^2 + 2(t_3^2-1)c_3^2 - 390 - \\
& - 2(16t_1^2+5t_1-36)c_1 - 2(16t_3^2+5t_3-36)c_3 + \\
& + \frac{2}{3}\Big(4(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+t_1+t_2+t_3-12\Big)c_1c_3 - \\
& - \frac{2}{3}\left(\cos 2(\gamma_{12}-\gamma_{31})+\cos 2(\gamma_{12}-\gamma_{23})+\cos 2(\gamma_{31}-\gamma_{23})\right)c_1c_3\,, \\
C & \equiv 15(c_1^2+c_3^2) + 2\Big((t_2^2-1)(c_1+c_3) - 16t_2^2 - 5t_2 + 36\Big)c_1c_3 - \\
& - 390(c_1+c_3) + 1800\,, \\
t_1 & \equiv \cos 2\gamma_{12}\,, \quad t_2 \equiv \cos 2\gamma_{31}\,, \quad t_3 \equiv \cos 2\gamma_{23}\,,
\end{aligned}$$

и поэтому может иметь не более двух действительных решений: $c_2 = c_2^+$ и $c_2 = c_2^-$. Их исследование начнем с предельных случаев (5).

При $m_1 = 0$ в исследуемом уравнении (56) $t_1, t_2 = -1, t_3 = 1$, поэтому $A = 15$ и при любом c_3 дискриминант $D = B^2 - 4AC > 0$. Значит, имеется два разных ($c_2^+ \neq c_2^-$), непрерывных по c_1 и не зависящих от m_2 решения:

$$c_2^\pm(c_1; c_3, 0, m_2) = -\frac{5}{3}c_1 - c_3 + 13 \pm \frac{1}{3}\left(16c_1^2 - 156c_1 + 441\right)^{1/2}.$$

Если $m_1 = \infty$ и $m_2 = m_3$, то при любом c_3 в точке $c_1 = c_1^s \equiv 15/2$ коэффициент $A = 15 - 2c_1$ обращается в нуль, но всегда $B \neq 0$ и $D > 0$. Поэтому решение c_2^+ терпит разрыв второго рода в точке c_1^s, а решение c_2^- непрерывно:

$$c_2^\pm(c_1; c_3, m_1, m_2) = -\frac{B^2}{2A}\left(1 \pm \operatorname{sign}(c_1^s - c_1)\left(1 - 4\frac{AD}{B^2}\right)^{1/2}\right). \qquad (57)$$

Рассмотрим все оставшиеся случаи, когда $m_1, m_2 \in (0, \infty)$. Теперь, в отличие от случая $m_1 = \infty$, положение нуля c_1^s функции A зависит от c_3:

$$c_1 = c_1^s \equiv \frac{15 + 2(t_3^2-1)c_3}{2(1-t_1^2)}\,,$$

но всегда $B \neq 0$ и $D > 0$, поэтому существует два разных решения (57), причем решение c_2^+ терпит разрыв в точке $c_1 = c_1^s$, а решение c_2^- – всюду непрерывная функция.

Чтобы наглядно представить все характерные особенности семейства решений $c_2^\pm$, на рис. 1 в координатной плоскости (c_1, c_2) изображены графики функций $c_2^\pm$ при одинаковых $m_1 = 2$ и $m_2 = 4$, но разных c_3, равных -2 и $+2$.

Перечислим главные особенности функций $c_2^\pm$.

График решения c_2^+ всегда имеет горизонтальную, $c_1 = c_1^s$, и вертикальную,

$$c_2 = c_2^s \equiv \frac{15 + 2(t_2^2-1)c_3}{2(1-t_1^2)}\,,$$

асимптоты, пересекающиеся в точке (c_1^s, c_2^s), лежащей на прямой

$$c_2 = \frac{1-t_2^2}{1-t_1^2}c_1 + \frac{15}{2}(t_2^2 - t_1^2)\,.$$

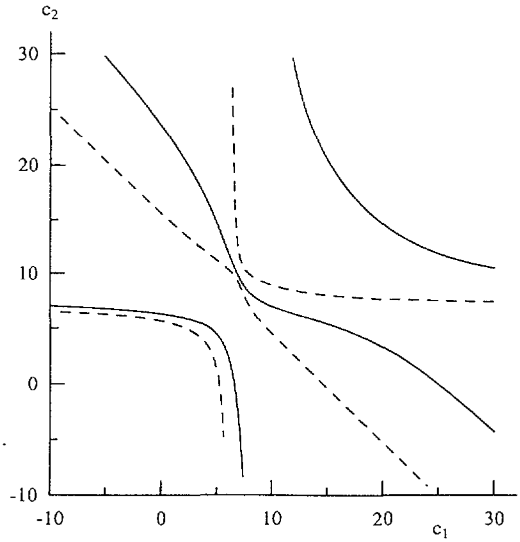

Рисунок 1: Функции $c_2^{\pm}(c_1; c_3, m_1, m_2)$ в случае $m_1 = 2$, $m_2 = 4$ при $c_3 = -2$ (сплошные кривые) и при $c_3 = 2$ (пунктир)

При любых фиксированных m_1, m_2 и c_3 выполняются неравенства $c_2^+ < c_2^s$, если $c_1 < c_1^s$, и $c_2^+ > c_2^s$, если $c_1 > c_1^s$. Поэтому, если c_3 возрастает или убывает, то точка (c_1^s, c_2^s) смещается по этой прямой вниз или, соответственно, вверх, таким же образом при изменении c_3 смещаются и графики функций $c_2^{\pm}$. Следовательно, при любых массах и параметре c_3 для любого c_1 найдутся два значения $c_2 = c_2^{\pm}$ такие, что соответствующие им две функции (44) с индексом $m = 3$ будут точными решениями уравнения Шредингера (21). В трехчастичных состояниях, описываемых такими всюду регулярными волновыми функциями, ни при каких $E \geq 0$, c_1, c_3 и $c_2 = c_2^{\pm}$ не происходит "падения" частиц ни в точку тройного ($r = 0$), ни в точки парных ($x_k = 0, k = 1, 2, 3$) столкновений. Из определений коэффициентов (56) и формул (57) следует, что $c_2^- \to \infty$ при $c_1 \to -\infty$ и любом c_3. Значит, даже если условие (1) при $c = c_1$ и $b = 0$ не выполняется ($c_1 < -1/4$) и две частицы p_2 и p_3 в отсутствие третьей "падают друг на друга", то в трехчастичной системе (p_1, p_2, p_3) их "падение" в состоянии с волновой функцией (44) предотвращается отталкивающим взаимодействием между частицами p_1 и p_3. В этом смысле сильное притяжение ($c_1 \to -\infty$) в одной паре частиц компенсируется соответствующим ($c_2 = c_2^- \to \infty$) сильным отталкиванием в другой паре частиц. Таким образом, асимптотическое поведение корня c_2^- характеристического уравнения (56) представляется интуитивно понятным. Поведение корня c_2^+ при $c_1 \to c_1^s - 0$ выглядит необычно. В этом случае (см. рис. 1) бесконечно сильное притяжение ($c_2 = c_2^+ \to -\infty$) в паре (p_1, p_3) компенсируется **конечными** ($c_1 < c_1^s, c_3 < \infty$) отталкиваниями в других парах частиц.

Две частицы – тождественные бозоны. Теперь, в отличие от предыдущего случая, всегда $m_2 = m_3$ и $c_2 = c_3$. Поэтому уравнение (55) более простое,

$$\det \mathbf{G}^4 = Ac_2^2 + Bc_2 + C = 0\,; \tag{58}$$
$$A \equiv 12t_1^2\,, \quad B \equiv 4\left((2t_1^2 - t_1 + 2)c_1 - 24t_1^2 - 15\right)\,,$$
$$C \equiv 3(c_1^2 - 6)(c_1 - 20)\,, \quad t_1 \equiv -(1+m_1)^{-1}\,,$$

а его действительные решения $c_2 = c_2^{\pm}(c_1; m_1)$ зависят от одного аргумента c_1 и одного параметра m_1. Анализ всех таких решений начнем с предельных случаев (5).

При $m_1 = 0$ в уравнении (58) $t_1 = 1$, $A > 0$ и $D = B^2 - 4AC > 0$ для любых c_1. Поэтому его решения разные и нелинейные по c_1:

$$c_2^{\pm}(c_1; 0) = -\frac{5}{6}\,c_1 + \frac{13}{2} \pm \frac{1}{6}\left(16c_1^2 - 156c_1 + 441\right)^{1/2}. \tag{59}$$

Если $m_1 = \infty$, то $A = 0$, а единственное решение терпит разрыв при $c_1 = c_1^s = 15/2$:

$$c_2(c_1; \infty) = \frac{3}{4}\,\frac{(c_1 - 6)(c_1 - 20)}{15 - 2c_1}\,. \tag{60}$$

В особом случае $m_1 = 3/5$ дискриминант D – полный квадрат переменной c_1, поэтому оба решения – линейные функции аргумента c_1:

$$c_2^{+}(c_1; 3/5) = -\frac{6}{25}\,c_1 + \frac{24}{5}\,, \quad c_2^{-}(c_1; 3/5) = -\frac{8}{3}c_1 + 16\,. \tag{61}$$

При любых $m_1 \neq 0, 3/5, \infty$ и c_1 дискриминант $D > 0$, поэтому имеется два различных нелинейных по аргументу c_1 решения

$$\begin{aligned} c_2^{\pm}(c_1; m_1) &= \left(t_1 - 2t_1^2 - 2)c_1 + 24t_1^2 + 15\right)/6t_1^2 \pm \\ &\pm \left[4(t_1^4 - t_1^3 - t_1 + 1)c_1^2 + 6(8t_1^3 - 16t_1^4 + 13t_1^2 + 5t_1 - 10)\,c_1 + \right. \\ &+ \left. 9(64t_1^4 - 40t_1^2 + 25)\right]^{1/2}/6t_1^2\,, \end{aligned} \tag{62}$$

с соответствующими асимптотиками при $c_1 \to \pm\infty$:

$$c_2^{\pm}(c_1; m_1) \sim \frac{c_1}{6t_1^2}\left(\left(t_1 - 2t_1^2 - 2\right) \pm 2(1 - t_1)\sqrt{t_1^2 + t_1 + 1}\right). \tag{63}$$

Найденное семейство (59)–(62) всех решений уравнения (58) обладает особыми свойствами: $c^{+}(20; m_1) = c^{-}(6; m_1) = 0$ при всех m_1, но значения $c_2^{\pm}$ при $c_1 = 0$ зависят от m_1:

$$c_2^{\pm}(0; m_1) = (1/6t_1^2)\left(24t_1^2 + 15 \pm 3(64t_1^4 - 40t_1^2 + 25)^{1/2}\right).$$

Благодаря этим свойствам семейства и его непрерывности по параметру m_1 при любых c_1 в координатной плоскости (c_1, c_2) графики всех решений c_2^{-} пересекают ось абсцисс в точке $(6, 0)$, а графики всех решений c^{+} – в точке $(20, 0)$, график решения $c_2^{+}(c_1; m_1)$ или $c^{-}(c_1; m_1)$ при любом $m_1 \in (0, \infty)$ проходит между графиками соответствующих предельных решений $c_2^{\pm}(c_1; 0)$ и $c_2^{\pm}(c_1, \infty)$, изображенных на рис. 2.

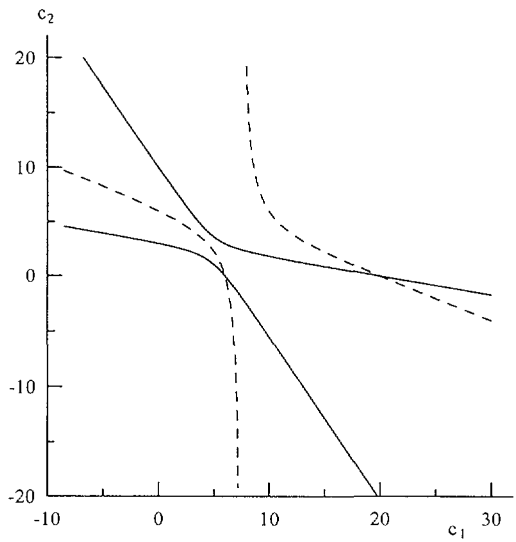

Рисунок 2: Функции $c_2^\pm(c_1; m_1)$ при $m_1 = 0$ (сплошные кривые) и при $m_1 = \infty$ (пунктир)

В рассматриваемом случае, в отличие от предыдущего случая трех разных частиц, явные выражения для коэффициентов B_n^i рядов (45) настолько компактные, что их стоит вывести в явном виде. При $c_2 = c_2^\pm$ оба уравнения двумерной системы (54), т.е. системы

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{D}^2\mathbf{D}^1\right) \mathbf{X}_1 = 0\,,$$

линейно зависимые. Поэтому элемент X_1^1 искомого столбца $\mathbf{X}_1 = (X_1^1, X_1^2)^T$ можно задать любым числом кроме нуля, затем вычеркнуть из этой системы первое уравнение, а второе разрешить относительно X_1^2. Потом по формулам (53) нетрудно найти столбец $\mathbf{X}_2 = -\mathbf{D}^1\mathbf{X}_1$, затем вычислить столбец $\mathbf{X}_3$ как решение системы (48) при $m = 3$ и, наконец, с помощью соотношений (46) определить все коэффициенты B_n^i. При выборе $X_1^1 = -8$ получается два набора B_n^{i+} и B_n^{i-} коэффициентов B_n^i, отвечающих решениям $c_2 = c_2^\pm$ уравнения (58), причем $B^{1\pm} = 1$, а

$$\begin{aligned}
B_1^{2\pm} &= \frac{c_2^\pm}{2f^\pm}\left(c_1 - 10 + 2t_1(t_1 c_2^\pm - 2)\right)\,,\\
B_2^{1\pm} &= \frac{4}{5f^\pm}\left(10(6 - c_2^\pm) + t_1(\,c_1 + 2t_1(c_2^\pm - 8)\,)c_2^\pm\right)\,,\\
B_2^{2\pm} &= \frac{2c_2^\pm}{5f^\pm}\left(10 - c_1 - 2t_1(c_2^\pm - 8)\right)\,,\\
B_3^{1\pm} &= \frac{15}{8g^\pm}\left((8t_1^2(t_1^2 - 1) + 3)c_2^\pm\, B_2^{1\pm} + (1 - 4t_1^2)c_1\, B_2^{2\pm}\right)\,,
\end{aligned}$$

$$B_3^{2\pm} = \frac{15}{16g^{\pm}}\left((1-4t_1^2)c_2^{\pm} B_2^{1\pm} + 3c_1 B_2^{2\pm}\right);$$
$$f^{\pm} \equiv (c_1 - 10)(c_2^{\pm} - 6) + 2t_1^2 c_2^{\pm}(c_2^{\pm} - 8),\ g^{\pm} \equiv (1-t_1^2)^2 c_1 c_2^{\pm}.$$

Как было показано, при любых массах и для любого значения c_1 найдутся два значения $c_2 = c_3 = c_2^{\pm}$ такие, что соответствующие им две функции (44) с индексом $m = 3$ и коэффициентами $B_n^{1\pm}$ будут точными решениями уравнения Шредингера (21). Так как в асимптотиках (63) коэффициенты пропорциональности $\alpha^{\pm}$ отрицательные, то такие регулярные решения существуют даже при сколь угодно сильном притяжении ($c_1 \to -\infty$) в паре частиц p_2, p_3 и соответствующем ему достаточно сильном отталкивании ($c_2 = c_3 = c_2^{\pm} \sim \alpha^{\pm} c_1 > 0$) в двух других парах частиц. Следовательно, даже если условие (1) при $c = c_1$ и $b = 0$ не выполняется ($c_1 < -1/4$) и два бозона p_2 и p_3 в отсутствие третьей частицы p_1 "падают друг на друга", то в трехчастичной системе, содержащей эти же бозоны, их "падение" в состоянии (44) предотвращается отталкивающими взаимодействиями с третьей частицей.

Три тождественных бозона. Теперь $m_k = 1$ и $c_k = c_2$ при всех $k = 1, 2, 3$. Поэтому характеристическое уравнение (55) имеет вид $c_2 - 4 = 0$. Его корню $c_2 = 4$ отвечают коэффициенты $B_1^1 = 1$, $B_2^1 = -4/5$ и $B_3^1 = -1$.

Случай трех тождественных бозонов подробно описан в работе [5]. Дополним ее важными замечаниями, справедливыми при любом $t = 2(m-1)$.

Матрица $\mathbf{A}^t$ системы (49) является трехдиагональной и симметричной матрицей с диагональными элементами (52). Эта матрица имеет диагональное преобладание, если $c_2 \le 0$. Поэтому все корни $c_2^1, \ldots, c_2^{m-1}$ характеристического уравнения (55) действительные и положительные.

Если, последовательно полагая $n = 1, 2, \ldots, m$, вычислять детерминанты d_n главных миноров порядка n матрицы $\mathbf{A}^t$ разложением по элементам их последних строк, то получится рекуррентная цепочка равенств:

$$d_1 = \mathbf{D}^1,\ d_2 = \mathbf{D}^2 d_1 - 1,\ d_n = \mathbf{D}^n d_{n-1} - d_{n-2},\ n = 3, \ldots, m-1;\ \det \mathbf{A}^t = d_{m-1},$$

согласно которой, если $\det \mathbf{A}^t = 0$, то $d_{m-2} \ne 0$. Следовательно, только два уравнения системы (49) для искомых коэффициентов X_n^1 могут быть линейно зависимыми. Значит все корни $c_2^1, \ldots, c_2^{m-1}$ разные.

Итак, если в системе трех тождественных бозонов взаимодействия притягивающие ($c_2 < 0$), то функция типа (44) не может быть точным решением уравнения Шредингера (21), а в противном случае для любого $t = 4, 6, \ldots$ существует $m-1 = t/2$ разных значений $c_2 > 0$, при которых такие функции – точные решения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат работы – доказательство критерия существования точных решений (19),(20) уравнения Шредингера (21) с нецентральными взаимодействиями (7) и полное описание метода построения этих решений и их фаддеевских компонент. Последние можно использовать как эталонные для тестов алгоритмов численного решения уравнений Фаддеева.

Основные физические выводы таковы.

Все решения (2) двухчастичного уравнения Шредингера с потенциалом центробежного типа сингулярны в точке парного столкновения. Присутствие третьей частицы радикально изменяет ситуацию: при условиях (37) существуют всюду регулярные решения трехчастичного уравнения Шредингера с парными взаимодействиями того же типа. Из примеров следует, что даже если условие "падения" выполняется в выбранной паре частиц, то для системы трех частиц при вполне определенных параметрах взаимодействий в других парах частиц такое "падение" не происходит.

Литература

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Квантовая механика. М: Наука, 1974.
2. *С.П. Меркурьев, Л.Д. Фаддеев.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
3. *В.В. Пупышев.* ЭЧАЯ. 1999. Т.30. С.1562.
4. *Y. Avishai.* J. Math. Phys. 1975. V.16. P.1491.
5. *V.V. Pupyshev.* Phys. Lett. 1989. V.A140. P.151.
6. *Р.И. Джибути, Н.Б. Крупенникова.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
7. *Н.Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
8. *В.В. Пупышев.* ЯФ. 1999. Т.62. С.1955.
9. *J. Raynal, J. Revai.* Nuovo Cimento. 1970. V.A68. P.612.
10. *Э. Камке.* – Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М.: Наука, 1976.
11. *М. Абрамовиц, И. Стиган.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
12. *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1883. С.581.
13. *P. Lankaster.* Theory of Matrices. New York–London: Academic Press, 1969.
14. *В.В. Воеводин.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
15. *В.В. Пупышев.* Препринт Р4-2000-136. "Физические и ложные слагаемые центральных парных взаимодействий". ОИЯИ. Дубна, 2000.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 декабря 2000 года.