ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-2000-278

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Направлено в журнал «Inverse Problems»

2000

1. Введение

В настоящей работе речь идет о возможности применения метода обратной задачи рассеяния для исследования нелинейной эволюционной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g, \tag{1.1}$$

где f и g – скалярные функции, зависящие от независимых переменных x, t, решения $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ и его производных $u_k = \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$, $v_k = \dfrac{\partial^k v}{\partial x^k}$ по x до некоторого конечного порядка $k_0 \geq 0$. Ради единообразия мы часто будем использовать обозначение u_0, v_0 для самого решения u, v, считая его производной по x нулевого порядка. Для исследования этой системы мы используем метод обратной задачи рассеяния для оператора Дирака L вида

$$L = \sigma\partial + V, \tag{1.2}$$

где ∂ – оператор дифференцирования по x, а

$$\sigma = \text{ diag } (1, -1), \quad V = \sigma U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Мы предположим, что система (1.1) обладает решениями, стремящимися достаточно быстро к нулю при $x \to \pm\infty$ (позднее мы уточним смысл слов "достаточно быстро" и сформулируем условия, гарантирующие существование таких решений), и, таким образом, мы сможем применить для исследования системы (1.1) метод обратной задачи рассеяния для оператора L вида (1.2), (1.3), если нам удастся каким–либо способом получить эволюционные уравнения для данных рассеяния оператора L, когда его коэффициенты u, v эволюционируют согласно уравнениям системы (1.1). Операторное представление

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = 0 \tag{1.4}$$

для системы (1.1) (в том случае, когда оно существует) является одним из способов получения эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора L, хотя и не единственным. Действительно, такие уравнения, в том или ином виде, существуют практически всегда. Другое дело, что эти уравнения могут быть настолько сложными, что их получение и исследование может оказаться не менее, а может быть и более трудной задачей, чем исследование исходной системы (1.1). Поэтому будет логичным предположить сначала, что эволюционные уравнения для данных рассеяния оператора L принадлежат какому–нибудь не очень сложному классу, например, классу обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем выяснять, какой должна быть система (1.1), чтобы порождаемая ею эволюция данных рассеяния оператора L принадлежала этому классу. Исходя из сказанного выше, мы предположим, что эволюционное уравнение для S–матрицы оператора L имеет вид

$$\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} = J\left(S(\zeta), \zeta\right), \tag{1.5}$$

где ζ – спектральный параметр, а элементы $J_{\alpha,\beta},\ \alpha,\beta = 1,2$, матрицы J являются скалярными функциями от элементов $S_{\mu,\nu},\ \mu,\nu = 1,2$, матрицы S. Для того чтобы уравнение (1.5) удовлетворяло теореме о существовании и единственности решения задачи Коши, мы предположим, что функции $J_{\alpha,\beta},\ \alpha,\beta = 1,2$, зависят гладким образом от элементов $S_{\mu,\nu},\ \mu,\nu = 1,2$, матрицы S. Оказывается, что сделанное сейчас предположение является довольно сильным. В случае, когда функции f и g к тому же зависят достаточно гладким образом от x, решения u, v и его производных по x, мы покажем, что этому требованию удовлетворяют только те системы вида (1.1), в силу которых выполняется операторное соотношение (1.4) с дифференциальным (по x) оператором A. При этом оператор A допускает представление

$$A = \sum_{k=0}^{k_0} A_k L^{k_0-k} \tag{1.6}$$

с матрицами $A_k,\ k = 0, 1, ..., k_0$, которые удовлетворяют условиям

$$[\sigma,\ A_0] = 0, \quad [\sigma,\ A_{k+1}] = \frac{\partial A_k}{\partial x} + [U,\ A_k], \quad k = 0, 1, ..., k_0, \tag{1.7}$$

а сама эволюционная система (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\sigma,\ A_{k_0+1}], \text{ где } U = \sigma V = \begin{vmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

В этих условиях матрица A_0 оказывается диагональной матрицей с постоянными элементами, а элементы матриц A_k при $k = 1, ..., k_0 + 1$ являются полиномами от функций u, v и их производных по x до $(k-1)$-го порядка. Кроме того, порождаемая системой (1.1) эволюция S–матрицы оператора L вида (1.2), (1.3) описывается уравнением (1.5) с матрицей J вида

$$J = \rho(\zeta)\,[\sigma,\ S(\zeta)], \tag{1.9}$$

где ρ – полином от ζ степени k_0 со скалярными коэффициентами. Таким образом, в этих условиях система уравнений (1.5) оказывается линейной и притом имеет весьма специальный вид. Это значит, что если система (1.1) не имеет операторного представления вида (1.4) с удовлетворяющим условиям (1.6), (1.7) дифференциальным оператором A, то порождаемая ею эволюция S–матрицы оператора L не может быть описана уравнением (1.5) с матрицей J, зависящей гладким образом от элементов $S_{\mu,\nu},\ \mu,\nu = 1,2$, матрицы S. Отсюда вытекают два важных вопроса. Прежде всего, какова структура правой части уравнения (1.5), если система (1.1) определена с помощью достаточно хороших функций f и g, не обладающих операторным представлением (1.4), т.е. удовлетворяющих условию

$$\begin{vmatrix} 0 & f \\ -g & 0 \end{vmatrix} \neq [A, L]$$

с любым оператором A вида (1.6) и (1.7). И вопрос второй, какими свойствами должны обладать функции f и g для того чтобы порождаемая решениями системы (1.1) эволюция S–матрицы оператора L описывалась уравнением (1.5) с матрицей J, зависящей гладким образом от элементов $S_{\mu,\nu},\ \mu,\nu = 1,2$, матрицы S, по отличной от указанной выше с помощью равенства (1.9). Рассмотрению обоих этих вопросов будут посвящены последующие публикации на эту тему.

2. Вспомогательные результаты

Отправной точкой всех дальнейших рассмотрений послужит линейная система уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u\psi = i\zeta\varphi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + v\varphi + i\zeta\psi = 0 \tag{2.1}$$

с потенциалами $u = u(x)$ и $v = v(x)$, удовлетворяющими условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u(x)| + |v(x)|)\, dx < \infty. \tag{2.2}$$

Общеизвестно, что при выполнении условия (2.2) уравнения (2.1) при любом вещественном ζ имеют фундаментальную систему решений φ_1^-, ψ_1^- и φ_2^-, ψ_2^-, обладающих асимптотиками

$$\begin{aligned} &\varphi_1^-(x,\zeta) \sim \exp(i\zeta x),\ \psi_1^-(x,\zeta) \sim 0, \text{ если } x \to -\infty, \\ &\varphi_2^-(x,\zeta) \sim 0,\ \psi_2^-(x,\zeta) \sim \exp(-i\zeta x), \text{ если } x \to -\infty, \end{aligned} \tag{2.3}$$

и вторую фундаментальную систему решений φ_1^+, ψ_1^+ и φ_2^+, ψ_2^+, обладающих аналогичными асимптотиками

$$\begin{aligned} &\varphi_1^+(x,\zeta) \sim \exp(i\zeta x),\ \psi_1^+(x,\zeta) \sim 0, \text{ если } x \to \infty, \\ &\varphi_2^+(x,\zeta) \sim 0,\ \psi_2^+(x,\zeta) \sim \exp(-i\zeta x), \text{ если } x \to \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Образуемые с помощью этих решений матрицы Вронского

$$W_-(x,\zeta) = \begin{vmatrix} \varphi_1^-(x,\zeta) & \varphi_2^-(x,\zeta) \\ \psi_1^-(x,\zeta) & \psi_2^-(x,\zeta) \end{vmatrix}, \quad W_+(x,\zeta) = \begin{vmatrix} \varphi_1^+(x,\zeta) & \varphi_2^+(x,\zeta) \\ \psi_1^+(x,\zeta) & \psi_2^+(x,\zeta) \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

в силу (2.3) и (2.4) при любых $x, \zeta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условию

$$\det W_-(x,\zeta) = \det W_+(x,\zeta) = 1, \quad x,\zeta \in (-\infty,\infty). \tag{2.6}$$

Определяемая в соответствии с равенством

$$S(\zeta) = W_-^{-1}(x,\zeta) W_+(x,\zeta), \quad \zeta \in (-\infty,\infty), \tag{2.7}$$

S–матрица системы (2.1) не зависит от x и на основе (2.6) при любом вещественном ζ удовлетворяет условию

$$\det S(\zeta) = 1, \quad \zeta \in (-\infty,\infty). \tag{2.8}$$

Далее, с помощью определенных выше решений системы (2.1) образуем двухкомпонентные векторы-строки

$$\begin{aligned} \varphi_- &= (\varphi_1^-, \varphi_2^-), \quad \varphi_+ = (\varphi_1^+, \varphi_2^+) = \varphi_- S, \\ \psi_- &= (\psi_1^-, \psi_2^-), \quad \psi_+ = (\psi_1^+, \psi_2^+) = \psi_- S. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Наконец, положим

$$\Phi = \tilde{\varphi}_-\varphi_+,\ \Theta_+ = \tilde{\varphi}_-\psi_+,\ \Theta_- = \tilde{\psi}_-\varphi_+,\ \Psi = \tilde{\psi}_-\psi_+, \tag{2.10}$$

где знак тильда "$\sim$" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от векторов–строк к векторам–столбцам. Полученные таким образом квадратные матрицы второго порядка согласно (2.1) удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2u\Theta = 2i\zeta\Phi,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} + 2v\Theta + 2i\zeta\Psi = 0,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\Phi + u\Psi = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\Theta = \frac{1}{2}\left(\Theta_+ + \Theta_-\right). \tag{2.12}$$

Очевидно, что определенные выше матрицы Θ_+ и Θ_- обладают представлением

$$\Theta_+ = \Theta + \frac{1}{2}\Theta_0,\quad \Theta_- = \Theta - \frac{1}{2}\Theta_0, \tag{2.13}$$

где

$$\Theta_0 = \Theta_+ - \Theta_- = \sigma_0 S,\quad \sigma_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что матрица Θ_0 не зависит от x, т.е.

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial x} = 0, \tag{2.15}$$

а матрицы Θ_+ и Θ_- удовлетворяют уравнениям, получаемым из последнего уравнения системы (2.11) в соответствии с равенствами (2.13)-(2.15). Определенные посредством (2.9), (2.10) и (2.12) матрицы $\Phi,\Theta,\Psi,\Theta_+$ и Θ_- в силу (2.5) и (2.6) допускают представление

$$\begin{gathered}\Phi = \sigma_0 W_-^{-1}\sigma_- W_+,\quad \Theta = -\frac{1}{2}\sigma_0 W_-^{-1}\sigma W_+,\quad \Psi = -\sigma_0 W_-^{-1}\sigma_+ W_+,\\ \Theta_+ = \sigma_0 W_-^{-1}\sigma_+' W_+,\quad \Theta_- = -\sigma_0 W_-^{-1}\sigma_-' W_+,\end{gathered} \tag{2.16}$$

где

$$\begin{gathered}\sigma_- = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\quad \sigma_+ = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},\quad \sigma_0 = \sigma_+ - \sigma_-,\quad \sigma = [\sigma_+,\sigma_-],\\ \sigma_-' = \sigma_+\sigma_- = \mathrm{diag}(1,0),\quad \sigma_+' = \sigma_-\sigma_+ = \mathrm{diag}(0,1).\end{gathered} \tag{2.17}$$

В этой ситуации с учетом (2.7), (2.8), (2.16) и (2.17) нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{gathered}\Phi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(x,\zeta) = \Psi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(x,\zeta) = 0,\\ \Phi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(x,\zeta) = \Theta_+(x,\zeta),\quad \Psi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(x,\zeta) = -\Theta_-(x,\zeta),\\ \Phi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Theta(x,\zeta) = -\Theta(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(x,\zeta) = \frac{1}{2}\Phi(x,\zeta),\\ \Theta(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(x,\zeta) = -\Psi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Theta(x,\zeta) = \frac{1}{2}\Psi(x,\zeta),\end{gathered} \tag{2.18}$$

сыграющих важную роль в дальнейшем.

На основе (2.1) определенные посредством (2.5) матрицы W_- и W_+ удовлетворяют матричным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}W_-^{-1} - W_-^{-1}U + i\zeta W_-^{-1}\sigma = 0,\quad \frac{\partial}{\partial x}W_+ + UW_+ = i\zeta\sigma W_+, \tag{2.19}$$

где матрица U согласно (2.17) допускает представление

$$U = \sigma_+ u(x) + \sigma_- v(x). \tag{2.20}$$

Отсюда следует, что вариации δW_-^{-1} и δW_+ матриц W_-^{-1} и W_+ при варьировании потенциалов $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\delta W_-^{-1} - \delta W_-^{-1}U + i\zeta\delta W_-^{-1}\sigma = W_-^{-1}\delta U,\\ \frac{\partial}{\partial x}\delta W_+ + U\delta W_+ - i\zeta\sigma\delta W_+ = -\delta U W_+.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Умножая первое уравнение системы (2.19) справа на δW_+ и складывая с последним уравнением системы (2.21), умноженным слева на W_-^{-1}, получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(W_-^{-1}\delta W_+\right) = -W_-^{-1}\delta U W_+. \tag{2.22}$$

Аналогичным образом, умножая первое уравнение системы (2.21) справа на W_+ и складывая с последним уравнением системы (2.19), умноженным слева на δW_-^{-1}, получаем сходное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta W_-^{-1}W_+\right) = W_-^{-1}\delta U W_+. \tag{2.23}$$

С учетом граничных условий (2.3) и (2.4) отсюда следуют равенства

$$\begin{gathered}\delta W_-^{-1}(x,\zeta) = \int_{-\infty}^{x} W_-^{-1}(z,\zeta)\delta U(z)W_+(z,\zeta)dz W_+^{-1}(x,\zeta),\\ \delta W_+(x,\zeta) = W_-(x,\zeta)\int_{x}^{\infty} W_-^{-1}(z,\zeta)\delta U(z)W_+(z,\zeta)dz.\end{gathered} \tag{2.24}$$

В соответствии с этими равенствами нетрудно убедиться, что вариационные производные от матриц W_-^{-1} и W_+ в силу (2.16) и (2.20) допускают представление

$$\frac{\delta W_-^{-1}(x,\zeta)}{\delta u(z)} = \begin{cases} \sigma_0\Psi(z,\zeta)W_+^{-1}(x,\zeta), \text{ если } z < x, \\ 0, \text{ если } z > x, \end{cases}$$

$$\frac{\delta W_-^{-1}(x,\zeta)}{\delta v(z)} = \begin{cases} -\sigma_0\Phi(z,\zeta)W_+^{-1}(x,\zeta), \text{ если } z < x, \\ 0, \text{ если } z > x, \end{cases}$$

$$\frac{\delta W_+(x,\zeta)}{\delta u(z)} = \begin{cases} 0, \text{ если } z < x, \\ W_-(x,\zeta)\sigma_0\Psi(z,\zeta), \text{ если } z > x, \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\frac{\delta W_+(x,\zeta)}{\delta v(z)} = \begin{cases} 0, \text{ если } z < x, \\ -W_-(x,\zeta)\sigma_0\Phi(z,\zeta), \text{ если } z > x. \end{cases}$$

С помощью этих равенств получаем, что вариационные производные от определенных посредством (2.16) матриц Φ и Ψ имеют вид

$$\frac{\delta\Phi(x,\zeta)}{\delta u(z)} = \begin{cases} \Psi(z,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(x,\zeta), \text{ если } z < x, \\ \Phi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(z,\zeta), \text{ если } z > x, \end{cases}$$

$$\frac{\delta\Phi(x,\zeta)}{\delta v(z)} = \begin{cases} -\Phi(z,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(x,\zeta), \text{ если } z < x, \\ -\Phi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(z,\zeta), \text{ если } z > x, \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\frac{\delta\Psi(x,\zeta)}{\delta u(z)} = \begin{cases} \Psi(z,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(x,\zeta), \text{ если } z < x, \\ \Psi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(z,\zeta), \text{ если } z > x, \end{cases}$$

$$\frac{\delta\Psi(x,\zeta)}{\delta v(z)} = \begin{cases} -\Phi(z,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(x,\zeta), \text{ если } z < x, \\ -\Psi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(z,\zeta), \text{ если } z > x. \end{cases}$$

Аналогичным образом, на основе (2.7) и (2.25) находим для вариационных производных от S–матрицы следующие выражения:

$$\frac{\delta S(\zeta)}{\delta u(x)} = \sigma_0\Psi(x,\zeta), \quad \frac{\delta S(\zeta)}{\delta v(x)} = -\sigma_0\Phi(x,\zeta). \tag{2.27}$$

Предположим теперь, что входящая в равенства (2.21)–(2.24) вариация δU получена в результате сдвига за время δt по траекториям системы (1.1), т.е. с учетом (2.20) положим

$$\delta U = (\sigma_+ f + \sigma_- g)\,\delta t.$$

Перейдем теперь в равенствах (2.24) к пределу при $\delta t \to 0$. С помощью (2.16) получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}W_-^{-1}(x,\zeta) = \sigma_0 I_-(x,\zeta)W_+^{-1}(x,\zeta), \quad \frac{\partial}{\partial t}W_+(x,\zeta) = W_-(x,\zeta)\sigma_0 I_+(x,\zeta), \tag{2.28}$$

где

$$I_-(x,\zeta) = \int_{-\infty}^{x} \Big[\Psi(z,\zeta)\hat f(z) - \Phi(z,\zeta)\hat g(z)\Big]\,dz,$$

$$I_+(x,\zeta) = \int_{x}^{\infty} \Big[\Psi(z,\zeta)\hat f(z) - \Phi(z,\zeta)\hat g(z)\Big]\,dz. \tag{2.29}$$

Входящие в эти равенства величины $\hat f(z)$ и $\hat g(z)$ соответственно равны значениям функций f и g при $x = z$, $u_k = \dfrac{\partial^k u(z)}{\partial z^k}$ и $v_k = \dfrac{\partial^k v(z)}{\partial z^k}$, $k = 0, 1, ..., k_0$. Согласно (2.16) отсюда следуют равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,\zeta) = I_-(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Phi(x,\zeta) + \Phi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0 I_+(x,\zeta),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,\zeta) = I_-(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Psi(x,\zeta) + \Psi(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0 I_+(x,\zeta), \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta(x,\zeta) = I_-(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0\Theta(x,\zeta) + \Theta(x,\zeta)S^{-1}(\zeta)\sigma_0 I_+(x,\zeta),$$

а в силу (2.7), (2.28) и (2.29) получаем эволюционное уравнение для S–матрицы в следующем виде:

$$\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} = \sigma_0 I(\zeta), \tag{2.31}$$

где

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\Psi(z,\zeta)\hat f(z) - \Phi(z,\zeta)\hat g(z)\Big]\,dz. \tag{2.32}$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Для существования интегралов I_-, I_+ и I соответственно вида (2.29) и (2.32) функции f и g необходимо подчинить определенным требованиям. Именно, мы будем считать, что при всех $t \in (t_0, t_1)$, $t_0 < t_1$, $x \in (-\infty, \infty)$ и любом значении величины

$$\delta = \sum_{k=0}^{k_0}\left(\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right| + \left|\frac{\partial^k v}{\partial x^k}\right|\right)$$

функции f и g подчиняются требованию

$$|f| + |g| \le h_0(x) + c(\delta)\delta,$$

где положительная величина $c(\delta)$ не зависит от x и ограничена в любом конечном интервале $\delta \in (0, \delta_0)$, $0 < \delta_0 < \infty$, а функция $h_0(x)$ неотрицательна и удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_0(x)dx < \infty.$$

Более того, предположим, что при любом $t \in (t_0, t_1)$ потенциалы $u = u(x,t)$ и $v = v(x,t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{k_0+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| + \left| \frac{\partial^k v}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty.$$

В этой ситуации мы можем гарантировать существование интегралов I_-, I_+ и I, а следовательно, в силу (2.30), (2.31) и само существование производных по времени t от величин Φ, Ψ, Θ и S–матрицы.

3. Необходимые условия для существования уравнения (1.5)

В этом разделе мы покажем, что произвольная квадратная матрица $J = J(S(\zeta), \zeta)$ второго порядка, элементы которой зависят гладким образом от элементов $S_{\mu,\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2$, матрицы S, естественным образом порождает некоторое матричное решение системы (2.11). Далее, с помощью этого решения системы (2.11) мы получим необходимые условия, которым должны удовлетворять функции f и g для того чтобы порождаемая системой (1.1) эволюция S–матрицы оператора L описывалась уравнением (1.5) с ранее взятой правой частью J. Наконец, на основе анализа этих условий мы определим существенные структурные характеристики функций f и g и по этим характеристикам построим для системы (1.1) требуемое операторное представление вида (1.4). Достигается это следующим образом. Положим

$$F = -\frac{\delta J(\zeta)}{\delta v(x)}, \quad G = \frac{\delta J(\zeta)}{\delta u(x)}. \tag{3.1}$$

Согласно (2.17) и (2.27) справедливы равенства

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial J}{\partial S_{11}}\Phi_{21} + \frac{\partial J}{\partial S_{12}}\Phi_{22} - \frac{\partial J}{\partial S_{21}}\Phi_{11} - \frac{\partial J}{\partial S_{22}}\Phi_{12}, \\ G &= \frac{\partial J}{\partial S_{11}}\Psi_{21} + \frac{\partial J}{\partial S_{12}}\Psi_{22} - \frac{\partial J}{\partial S_{21}}\Psi_{11} - \frac{\partial J}{\partial S_{22}}\Psi_{12}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\Phi_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha^- \varphi_\beta^+$ и $\Psi_{\alpha,\beta} = \psi_\alpha^- \psi_\beta^+$, $\alpha, \beta = 1, 2$, соответственно являются элементами матриц Φ и Ψ вида (2.10). Далее, положим

$$H = \frac{\partial J}{\partial S_{11}}\Theta_{21} + \frac{\partial J}{\partial S_{12}}\Theta_{22} - \frac{\partial J}{\partial S_{21}}\Theta_{11} - \frac{\partial J}{\partial S_{22}}\Theta_{12}, \tag{3.3}$$

где $\Theta_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha^- \psi_\beta^+ + \psi_\alpha^- \varphi_\beta^+\right)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, являются элементами определенной посредством (2.10) и (2.12) матрицы Θ. Поскольку соответствующие элементы матриц

Φ, Ψ и Θ, т.е. элементы с одинаковыми индексами, удовлетворяют уравнениям (2.11), а матрицы $\dfrac{\partial J}{\partial S_{\mu,\nu}}$, $\mu, \nu = 1, 2$, не зависят от x, то определенные посредством (3.1)–(3.3) матрицы F, G и H удовлетворяют системе (2.11). Таким образом, имеют место равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2uH = 2i\zeta F, \quad \frac{\partial G}{\partial x} + 2vH + 2i\zeta G = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + vF + uG = 0. \tag{3.4}$$

Наконец, положим

$$\mathcal{F} = -\frac{\delta I(\zeta)}{\delta v(x)}, \quad \mathcal{G} = \frac{\delta I(\zeta)}{\delta u(x)}, \tag{3.5}$$

где величина $I = I(\zeta)$ определена с помощью (2.32). Поскольку между правой частью J уравнения (1.5) и интегралом I вида (2.32) в силу (2.31) существует связь $J = \sigma_0 I$, то такая же точно связь существует и между величинами F, G вида (3.1), с одной стороны, и величинами $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ вида (3.5), с другой стороны, т.е. имеем равенства $F = \sigma_0 \mathcal{F}$, $\quad G = \sigma_0 \mathcal{G}$. Отсюда следует, что существует величина $\mathcal{H}$, такая, что справедливы аналогичные (3.4) соотношения

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + 2u\mathcal{H} = 2i\zeta \mathcal{F}, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + 2v\mathcal{H} + 2i\zeta \mathcal{G} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + v\mathcal{F} + u\mathcal{G} = 0. \tag{3.6}$$

Найдем ее. С этой целью положим

$$\mathcal{F} = \Gamma + K, \quad \mathcal{G} = \Delta + M, \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta \Phi(z,\zeta)}{\delta v(x)} \hat{g}(z) - \frac{\delta \Psi(z,\zeta)}{\delta v(x)} \hat{f}(z) \right] dz, \\ \Delta &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta \Psi(z,\zeta)}{\delta u(x)} \hat{f}(z) - \frac{\delta \Phi(z,\zeta)}{\delta u(x)} \hat{g}(z) \right] dz, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} K &= \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k D^k \left[\Phi(x,\zeta) \frac{\partial g}{\partial v_k} - \Psi(x,\zeta) \frac{\partial f}{\partial v_k} \right], \\ M &= \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k D^k \left[\Psi(x,\zeta) \frac{\partial f}{\partial u_k} - \Phi(x,\zeta) \frac{\partial g}{\partial u_k} \right]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Начиная с этого момента, мы будем считать f и g функциями x, t и $2k_0 + 2$ независимых переменных u_k, v_k, $k = 0, 1, \ldots, k_0$, а выражения типа $\hat{f}(z)$ и $\hat{g}(z)$ мы будем понимать как значения этих функций при $x = z$, $u_k = \dfrac{\partial^k u(z)}{\partial z^k}$ и $v_k = \dfrac{\partial^k v(z)}{\partial z^k}$, $k =$

$0, 1, \ldots, k_0$. В этой ситуации частные производные типа $\dfrac{\partial \hat{f}(z)}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial \hat{g}(z)}{\partial z}$ нужно понимать как значения величин Df и Dg при $x = z$, $u_k = \dfrac{\partial^k u(z)}{\partial z^k}$ и $v_k = \dfrac{\partial^k v(z)}{\partial z^k}$, $k \geq 0$. При этом оператор D полной производной по x задается равенством

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k} + v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k} \right). \tag{3.10}$$

Поскольку все величины, к которым в данной работе будет применяться оператор D, зависят от конечного числа переменных u_k, v_k, то никаких проблем со сходимостью при применении этого оператора возникать не будет. Кроме того, матрицы Φ, Ψ и Θ считаются не зависящими от переменных u_k и v_k с любым номером $k \geq 0$ и поэтому действие оператора D на эти матрицы определяется формулами

$$D\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad D\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad D\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial x}. \tag{3.11}$$

Воспользуемся теперь равенствами (2.26). На их основе правые части равенств (3.8) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma &= I_-(x,\zeta) S^{-1}(\zeta) \sigma_0 \Phi(x,\zeta) + \Phi(x,\zeta) S^{-1}(\zeta) \sigma_0 I_+(x,\zeta), \\ \Delta &= I_-(x,\zeta) S^{-1}(\zeta) \sigma_0 \Psi(x,\zeta) + \Psi(x,\zeta) S^{-1}(\zeta) \sigma_0 I_+(x,\zeta), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где величины $I_-(x,\zeta)$ и $I_+(x,\zeta)$ определены посредством (2.29). Далее, положим

$$\mathcal{E} = I_-(x,\zeta) S^{-1}(\zeta) \sigma_0 \Theta(x,\zeta) + \Theta(x,\zeta) S^{-1}(\zeta) \sigma_0 I_+(x,\zeta). \tag{3.13}$$

Сравнение равенств (3.12) и (3.13) с равенствами (2.30) показывает, что имеют место соотношения

$$\Gamma = \frac{\partial \Phi(x,\zeta)}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial \Psi(x,\zeta)}{\partial t}, \quad \mathcal{E} = \frac{\partial \Theta(x,\zeta)}{\partial t}. \tag{3.14}$$

Поскольку производные от Φ, Ψ и Θ по t удовлетворяют уравнениям, получающимся из уравнений (2.11) при формальном дифференцировании этих уравнений по t, то в силу (3.14) и уравнений (1.1) справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + 2u\mathcal{E} - 2i\zeta\Gamma = -2f\Theta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2v\mathcal{E} + 2i\zeta\Delta = -2g\Theta, \\ &\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + v\Gamma + u\Delta = -g\Phi - f\Psi. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Заметим, что эти равенства легко могут быть получены непосредственно из равенств (3.12) и (3.13) с помощью соотношений (2.18). Положим теперь $R = 0$, если $k_0 = 0$, а при $k_0 > 0$ пусть

$$R = \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (-1)^{\varkappa} \left(u_{k-\varkappa-1} D^{\varkappa} U_k - v_{k-\varkappa-1} D^{\varkappa} V_k \right), \tag{3.16}$$

где

$$U_k = \Psi(x,\zeta) \frac{\partial f}{\partial u_k} - \Phi(x,\zeta) \frac{\partial g}{\partial u_k}, \quad V_k = \Psi(x,\zeta) \frac{\partial f}{\partial v_k} - \Phi(x,\zeta) \frac{\partial g}{\partial v_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, k_0. \tag{3.17}$$

Далее, положим

$$R_0 = \sum_{k=0}^{k_0} \left(u_k U_k - v_k V_k \right). \tag{3.18}$$

Согласно (3.9) и (3.16)-(3.18) при любом $k_0 \geq 0$ справедливо равенство

$$DR + vK + uM = R_0. \tag{3.19}$$

Наконец, положим

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} + R - \chi. \tag{3.20}$$

С учетом (3.15) и (3.19) легко находим, что определенные в соответствии с равенствами (3.7) и (3.20) величины $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ удовлетворяют уравнениям (3.6), если определенные посредством равенств

$$X = DK + 2uR - 2i\zeta K - 2f\Theta, \quad Y = DM + 2vR + 2i\zeta M - 2g\Theta \tag{3.21}$$

величины X и Y удовлетворяют условиям

$$X = 2u\chi, \quad Y = 2v\chi, \tag{3.22}$$

где величина χ подчинена требованию

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = R_0 - g\Phi - f\Psi. \tag{3.23}$$

На основе (2.11), (3.9)-(3.11) и (3.21) выражения для X и Y могут быть представлены в окончательном виде

$$\begin{aligned} X &= 2uR - 2f\Theta + \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k D^k \Bigg[4i\zeta\Psi \frac{\partial f}{\partial v_k} - \\ &\quad - \Psi D \frac{\partial f}{\partial v_k} + \Phi D \frac{\partial g}{\partial v_k} + 2\Theta \left(v \frac{\partial f}{\partial v_k} - u \frac{\partial g}{\partial v_k} \right) \Bigg], \\ Y &= 2vR - 2g\Theta + \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k D^k \Bigg[-4i\zeta\Phi \frac{\partial g}{\partial u_k} - \\ &\quad - \Phi D \frac{\partial g}{\partial u_k} + \Psi D \frac{\partial f}{\partial u_k} + 2\Theta \left(u \frac{\partial g}{\partial u_k} - v \frac{\partial f}{\partial u_k} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.24}$$

а в силу (3.17) и (3.18) уравнение (3.23) принимает вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = n\Phi + m\Psi, \tag{3.25}$$

где

$$m = \sum_{k=0}^{k_0}\left(u_k\frac{\partial f}{\partial u_k} - v_k\frac{\partial f}{\partial v_k}\right) - f, \quad n = \sum_{k=0}^{k_0}\left(v_k\frac{\partial g}{\partial v_k} - u_k\frac{\partial g}{\partial u_k}\right) - g. \tag{3.26}$$

Таким образом, нами установлено следующее. Для того чтобы порождаемая решениями системы (1.1) эволюция S–матрицы оператора Дирака L вида (1.2) и (1.3) подчинялась эволюционному уравнению (1.5), необходимо выполнение условий (3.22), где X и Y определены равенствами (3.24), а входящая в правые части этих условий величина χ удовлетворяет соотношению (3.25). Нетрудно видеть, что правые части равенств (3.24) явно содержат матрицы Φ, Ψ и Θ, скалярные функции f, g и их производные по всем аргументам, кроме времени, потенциалы u, v оператора Дирака и их производные по x до некоторого конечного порядка, не превосходящего $2k_0 + 1$, а также спектральный параметр ζ. Элементы матрицы J, определяющей уравнение (1.5), в них никак не содержатся, и их роль свелась только к тому, что с их помощью были получены условия (3.22).

4. Анализ решений уравнения (3.25)

Для того чтобы приступить к анализу условий (3.22), нам необходимо прежде всего выяснить структуру решений уравнения (3.25). В этом разделе будет доказано, что в рассматриваемой нами ситуации уравнение (3.25) может иметь только тривиальное решение, что, в свою очередь, влечет обращение в нуль определенных посредством (3.26) величин m и n. Действительно, в соответствии с тем, что матрицы σ_+, σ_-, $\sigma_+' = \sigma_-\sigma_+$ и $\sigma_-' = \sigma_+\sigma_-$ вида (2.17) образуют базис в пространстве квадратных матриц второго порядка, матрицы σ_+, σ_- и $\sigma = [\sigma_+, \sigma_-]$ вместе с единичной матрицей второго порядка также образуют базис в этом пространстве. Отсюда в силу (2.16) следует, что матрицы Φ, Ψ, Θ и Θ_0 соответственно вида (2.10), (2.12) и (2.14) являются базисом в пространстве квадратных матриц второго порядка. Это значит, что интересующее нас решение χ уравнения (3.25) может быть представлено в виде

$$\chi = p\Psi + q\Phi - 2r\Theta + \lambda_0\Theta_0, \tag{4.1}$$

где скалярные коэффициенты p, q, r и λ_0 согласно (2.11), (2.15) и (3.25) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} + 2ur - 2i\zeta p = m, \quad \frac{\partial q}{\partial x} + 2vr + 2i\zeta q = n, \quad \frac{\partial r}{\partial x} + vp + uq = 0, \quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial x} = 0. \tag{4.2}$$

В соответствии с равенствами (3.11), (3.16), (3.17) и уравнениями (2.11) нетрудно убедиться, что определенные посредством (3.24) величины X и Y допускают представление

$$X = X_1\Theta + X_2\Phi + X_3\Psi, \quad Y = Y_1\Theta + Y_2\Psi + Y_3\Phi, \tag{4.3}$$

где скалярные величины X_l и Y_l при $l = 1, 2, 3$ зависят полиномиально от спектрального параметра ζ. При этом степени этих полиномов, очевидно, не превосходят k_0+1. С учетом условий (3.22) отсюда следует, что входящие в равенство (4.1) коэффициенты p, q и r также являются полиномами от параметра ζ, а $\lambda_0 = 0$. Исходя из этого обстоятельства, положим

$$p = \sum_{k=0}^{k_1}(i\zeta)^{k_1-k}p_k, \quad q = \sum_{k=0}^{k_1}(i\zeta)^{k_1-k}q_k, \quad r = \sum_{k=0}^{k_1}(i\zeta)^{k_1-k}r_k, \tag{4.4}$$

где $k_1 \geq 0$ и удовлетворяет неравенству $k_1 \leq k_0 + 1$. Величины m и n вида (3.26) не зависят от параметра ζ. В силу этого обстоятельства из уравнений (4.2) следует, что $p_0 = q_0 = 0$, а $\dfrac{\partial r_0}{\partial x} = 0$, т.е. величина r_0 является отличной от нуля константой. Далее, на основе уравнений (4.2) при $0 \leq k < k_1$ выполняются рекуррентные соотношения

$$\frac{\partial p_k}{\partial x} + 2ur_k = 2p_{k+1}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial x} + 2vr_k + 2q_{k+1} = 0, \quad \frac{\partial r_k}{\partial x} + vp_k + uq_k = 0, \tag{4.5}$$

а при $k = k_1$ имеют место равенства

$$\frac{\partial p_{k_1}}{\partial x} + 2ur_{k_1} = m, \quad \frac{\partial q_{k_1}}{\partial x} + 2vr_{k_1} = n. \tag{4.6}$$

Рекуррентные соотношения (4.5) пригодны для нахождения p_k, q_k и r_k при любом $k > 0$. Действительно, с помощью уже полученных величин p_k, q_k и r_k первые два из соотношений (4.5) позволяют однозначно определить величины p_{k+1} и q_{k+1}, а затем в соответствии с последним из соотношений (4.5) величина r_{k+1} определяется с точностью до произвольной константы. Полученные таким образом величины p_k, q_k и r_{k+1} при $k > 0$ являются полиномами от u, v и их производных по x не выше $(k-1)$–го порядка. Действительно, возьмем вытекающие из (4.5) соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}p_{k-\varkappa+1} + 2ur_{k-\varkappa+1} - 2p_{k-\varkappa+2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}q_{k-\varkappa+1} + 2vr_{k-\varkappa+1} + 2q_{k-\varkappa+2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}r_\varkappa + vp_\varkappa + uq_\varkappa = 0.$$

Умножим теперь первое из этих соотношений на $q_\varkappa$, второе из этих соотношений умножим на $p_\varkappa$, третье из этих соотношений умножим на $-2r_{k-\varkappa+1}$, затем сложим все это вместе и просуммируем по $\varkappa$ от нуля до $k+1$. С учетом равенств $p_0 = q_0 = 0$, $\dfrac{\partial r_0}{\partial x} = 0$ получаем соотношение

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(q_\varkappa\frac{\partial}{\partial x}p_{k-\varkappa+1} + p_\varkappa\frac{\partial}{\partial x}q_{k-\varkappa+1} - 2r_{k-\varkappa+1}\frac{\partial r_\varkappa}{\partial x}\right) =$$

$$= 2\sum_{\varkappa=1}^{k+1}(q_\varkappa p_{k-\varkappa+2} - p_\varkappa q_{k-\varkappa+2}) + 2r_0\frac{\partial}{\partial x}r_{k+1},$$

в соответствии с которым величина r_{k+1} при $k>0$ обладает представлением

$$r_{k+1}=\frac{1}{2c_0}\sum_{\varkappa=1}^{k}(p_\varkappa q_{k-\varkappa+1}-r_\varkappa r_{k-\varkappa+1})+c_{k+1}, \tag{4.7}$$

где $c_0=r_0\neq 0$ и c_{k+1} – константы. Согласно (4.5) имеют место равенства $p_1=c_0u$, $\quad q_1=-c_0v$, $\quad \dfrac{\partial r_1}{\partial x}=0$, т.е. $c_1=r_1$ является константой. Таким образом, первые два соотношения (4.5) вместе с равенством (4.7) гарантируют, что определяемые ими величины p_k,q_k и r_{k+1} при $k>0$ являются полиномами от u,v и их производных по x не выше $(k-1)$–го порядка. Более того, нетрудно убедиться, что в силу (4.5) при $k\geq 0$ справедливы равенства

$$p_{k+1}=\sum_{\varkappa=0}^{k}\frac{1}{2^\varkappa}\frac{\partial^\varkappa}{\partial x^\varkappa}(ur_{k-\varkappa}),\qquad q_{k+1}=-\sum_{\varkappa=0}^{k}\frac{(-1)^\varkappa}{2^\varkappa}\frac{\partial^\varkappa}{\partial x^\varkappa}(vr_{k-\varkappa}).$$

Отсюда следует, что при подстановке величины $\lambda^{\varkappa+1}$ в выражения для p_k,q_k и r_k вместо производных $\dfrac{\partial^\varkappa u}{\partial x^\varkappa}$ и $\dfrac{\partial^\varkappa v}{\partial x^\varkappa}$, $\varkappa\geq 0$, каждое нетривиальное слагаемое в этих выражениях принимает вид $c\lambda^{k'}$, где $c\neq 0$, а $0\leq k'\leq k$. Кроме того, каждый одночлен, входящий в выражения для p_k и q_k, является произведением нечетного (с учетом их кратности) числа сомножителей вида $\dfrac{\partial^\mu u}{\partial x^\mu}$ и $\dfrac{\partial^\nu v}{\partial x^\nu}$ с различными $\mu\geq 0$ и $\nu\geq 0$, а каждый одночлен, входящий в выражение для r_k, является произведением четного (с учетом их кратности) числа таких сомножителей. В соответствии со сказанным выше получаем, что при $k>0$ справедливы равенства

$$p_{k+1}=\frac{c_0}{2^k}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}+\frac{c_1}{2^{k-1}}\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}+\cdots,\quad q_{k+1}=(-1)^k\left[-\frac{c_0}{2^k}\frac{\partial^k v}{\partial x^k}+\frac{c_1}{2^{k-1}}\frac{\partial^{k-1}v}{\partial x^{k-1}}\right]+\cdots, \tag{4.8}$$

где $c_0=r_0$ и $c_1=r_1$ являются константами, а точками обозначены слагаемые, содержащие u,v и их производные по x не выше $(k-2)$–го порядка, если $k>1$, а при $k=1$ эти слагаемые равны нулю. Полученные выше результаты о свойствах решений системы (4.5) позволяют нам доказать, что интересующее нас решение χ уравнения (3.25) является тривиальным. Предположим противное: пусть $\chi\neq 0$. Согласно доказанному ранее равенству $\lambda_0=0$ из (4.1) следует, что неравенство $\chi\neq 0$ возможно только тогда, когда хотя бы один из полиномов p,q и r вида (4.4) отличен от нуля. Пусть $k_1\geq 0$ равно степени этих полиномов, т.е. $|p_0|+|q_0|+|r_0|\neq 0$. Как мы установили ранее, в этой ситуации имеем $p_0=q_0=0$. Следовательно, $c_0=r_0\neq 0$. На основе соотношений (4.5) равенства (4.6) принимают вид

$$m=2p_{k_1+1},\qquad n=-2q_{k_1+1},$$

где $k_1\geq 0$. Продифференцируем теперь эти равенства соответственно по u_{k_1} и v_{k_1}. На основе (4.8) получаем, что

$$\frac{\partial m}{\partial u_{k_1}}=\frac{c_0}{2^{k_1-1}},\qquad \frac{\partial n}{\partial v_{k_1}}=(-1)^{k_1}\frac{c_0}{2^{k_1-1}}. \tag{4.9}$$

При $k_1>k_0$ левые части этих равенств равны нулю согласно (3.26), а при $k_1\leq k_0$ справедливы равенства

$$\frac{\partial m}{\partial u_{k_1}}=\sum_{k=0}^{k_0}\left(u_k\frac{\partial^2 f}{\partial u_k\partial u_{k_1}}-v_k\frac{\partial^2 f}{\partial v_k\partial u_{k_1}}\right),\quad \frac{\partial n}{\partial v_{k_1}}=\sum_{k=0}^{k_0}\left(v_k\frac{\partial^2 g}{\partial v_k\partial v_{k_1}}-u_k\frac{\partial^2 g}{\partial u_k\partial v_{k_1}}\right),$$

на основе которых получаем, что в точке $u_k=v_k=0$, $k=0,1,\ldots,k_0$, величины $\dfrac{\partial m}{\partial u_{k_1}}$ и $\dfrac{\partial n}{\partial v_{k_1}}$ обращаются в нуль. Поскольку правые части равенств (4.9) являются константами, то отсюда следует равенство $c_0=0$ вопреки сделанному нами предположению, что $c_0\neq 0$. Полученное противоречие означает, что $\chi=0$. В силу (3.25) и (3.26) это значит, что справедливы равенства

$$f=\sum_{k=0}^{k_0}\left(u_k\frac{\partial f}{\partial u_k}-v_k\frac{\partial f}{\partial v_k}\right),\quad g=\sum_{k=0}^{k_0}\left(v_k\frac{\partial g}{\partial v_k}-u_k\frac{\partial g}{\partial u_k}\right). \tag{4.10}$$

5. Анализ условий (3.22)

В предыдущем разделе мы установили, что входящая в равенства (3.22) матрица χ равна нулю. В соответствии с этим обстоятельством условия (3.22) принимают вид

$$X=Y=0, \tag{5.1}$$

где величины X и Y заданы формулами (3.24). Как уже отмечалось ранее, интересующие нас величины X и Y могут быть представлены в виде (4.3), где скалярные величины X_l и Y_l, $l=1,2,3$, на основе линейной независимости матриц Φ,Ψ и Θ обязаны удовлетворять эквивалентным (5.1) условиям

$$X_l=Y_l=0,\quad l=1,2,3. \tag{5.2}$$

Далее, с помощью уравнений (2.11) нетрудно убедиться, что при любом $k>1$ производные $\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^k\Psi}{\partial x^k}$ и $\dfrac{\partial^k\Theta}{\partial x^k}$ допускают представление

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k\Phi}{\partial x^k}&=\varphi_{k,0}\Phi+\varphi_{k,1}\Theta+\varphi_{k,2}\Psi,\\
\frac{\partial^k\Theta}{\partial x^k}&=\theta_{k,0}\Phi+\theta_{k,1}\Theta+\theta_{k,2}\Psi,\\
\frac{\partial^k\Psi}{\partial x^k}&=\psi_{k,2}\Phi+\psi_{k,1}\Theta+\psi_{k,0}\Psi,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где скалярные величины $\varphi_{k,l},\theta_{k,l}$ и $\psi_{k,l}$ при всех $k>1$ и $l=1,2,3$ являются полиномами от параметра ζ не выше k–й степени с коэффициентами, зависящими от потенциалов $u=u(x)$, $v=v(x)$ и их производных по x не выше $(k-1)$–го порядка.

При любом $k > 1$ справедливы равенства

$$\varphi_{k,0} = (2i\zeta)^k + 2(k-1)uv(2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\varphi_{k,1} = -2u(2i\zeta)^{k-1} - 2\frac{\partial u}{\partial x}(2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\varphi_{k,2} = \left[1 + (-1)^k\right] u^2(2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\theta_{k,0} = -v(2i\zeta)^{k-1} - (k-1)\frac{\partial v}{\partial x}(2i\zeta)^{k-2} + \cdots, \tag{5.4}$$

$$\theta_{k,1} = 2\left[1 + (-1)^k\right] uv(2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\theta_{k,2} = -u(-2i\zeta)^{k-1} - (k-1)\frac{\partial u}{\partial x}(-2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\psi_{k,0} = (-2i\zeta)^k + 2(k-1)uv(-2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\psi_{k,1} = -2v(-2i\zeta)^{k-1} - 2\frac{\partial v}{\partial x}(-2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

$$\psi_{k,2} = \left[1 + (-1)^k\right] v^2(-2i\zeta)^{k-2} + \cdots,$$

где точками обозначены члены ниже $(k-2)$-й степени, если $k > 2$, а при $k = 2$ обозначенные точками члены являются нулевыми. С учетом равенств (5.3) и (5.4) определенные посредством (4.3) величины X_l и Y_l при $l = 2$ и $l = 3$ в силу (3.11) и (3.24) могут быть записаны в следующем виде:

$$X_2 = (-2i\zeta)^{k_0} D\frac{\partial g}{\partial v_{k_0}} + \cdots, \quad Y_2 = (2i\zeta)^{k_0} D\frac{\partial f}{\partial u_{k_0}} + \cdots,$$

$$X_3 = 2(2i\zeta)^{k_0+1}\frac{\partial f}{\partial v_{k_0}} + (2i\zeta)^{k_0}\left(2\frac{\partial f}{\partial v_{k_0-1}} - D\frac{\partial f}{\partial v_{k_0}}\right) + \cdots, \tag{5.5}$$

$$Y_3 = 2(-2i\zeta)^{k_0+1}\frac{\partial g}{\partial u_{k_0}} + (-2i\zeta)^{k_0}\left(2\frac{\partial g}{\partial u_{k_0-1}} - D\frac{\partial g}{\partial u_{k_0}}\right) + \cdots,$$

где точками обозначены члены не выше (k_0-1)-й степени, если $k_0 > 0$.

При $k_0 = 0$ согласно (3.24) справедливы равенства

$$X_1 = -2\left(f + u\frac{\partial g}{\partial v} - v\frac{\partial f}{\partial v}\right), \quad Y_1 = -2\left(g + v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$X_2 = D\frac{\partial g}{\partial v}, \quad Y_2 = D\frac{\partial f}{\partial u}, \quad X_3 = (4i\zeta - D)\frac{\partial f}{\partial v}, \quad Y_3 = -(4i\zeta + D)\frac{\partial g}{\partial u}.$$

В этом случае из равенств (5.2) с $l = 2, 3$ в соответствии с определением оператора D вида (3.10) следует, что функции f и g имеют вид $f = c_0 u$, $g = c_0' v$, где c_0 и c_0' – константы, на основе равенств (5.2) с $l = 1$ удовлетворяющие соотношению $c_0 + c_0' = 0$. Таким образом, окончательно получаем, что при $k_0 = 0$ система (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c_0 v, \tag{5.6}$$

где c_0 – произвольная константа. В случае $k_0 > 0$ из равенств (5.2) с $l = 3$ в соответствии с (5.5) следует, что функции f и g удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f}{\partial v_{k_0}} = \frac{\partial f}{\partial v_{k_0-1}} = \frac{\partial g}{\partial u_{k_0}} = \frac{\partial g}{\partial u_{k_0-1}} = 0, \tag{5.7}$$

т.е. функция f не зависит от v_{k_0} и v_{k_0-1}, а функция g не зависит от u_{k_0} и u_{k_0-1}. Далее, с помощью равенств (5.2) с $l = 2$ в силу (5.5) получаем, что производные $\dfrac{\partial f}{\partial u_{k_0}}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial v_{k_0}}$ функций f и g удовлетворяют условию

$$D\frac{\partial f}{\partial u_{k_0}} = D\frac{\partial g}{\partial v_{k_0}} = 0. \tag{5.8}$$

Согласно определению оператора D вида (3.10) это значит, что эти производные не зависят от x и переменных u_k, v_k с $k \geq 0$, т.е. являются константами. С учетом равенств (5.7) и (5.8) определенные посредством (3.24) и (4.3) величины X_l и Y_l с $l = 2$ и $l = 3$ принимают вид

$$X_2 = (-2i\zeta)^{k_0-1} D\frac{\partial g}{\partial v_{k_0-1}} + \cdots, \quad Y_2 = (2i\zeta)^{k_0-1} D\frac{\partial f}{\partial u_{k_0-1}} + \cdots,$$

$$X_3 = 2(2i\zeta)^{k_0-1}\left[\frac{\partial f}{\partial v_{k_0-2}} - (c_0' - c_0)u^2\right] + \cdots, \tag{5.9}$$

$$Y_3 = 2(-2i\zeta)^{k_0-1}\left[\frac{\partial g}{\partial u_{k_0-2}} - (c_0 - c_0')v^2\right] + \cdots,$$

где точками обозначены члены не выше (k_0-2)-й степени, если $k_0 > 1$, а

$$c_0 = \frac{\partial f}{\partial u_{k_0}}, \quad c_0' = \frac{\partial g}{\partial v_{k_0}}. \tag{5.10}$$

При $k_0 = 1$ на основе (3.24), (5.7) и (5.8) выполняются равенства

$$X_1 = -2\left(f + u\frac{\partial g}{\partial v} - c_0'\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad Y_1 = -2\left(g + v\frac{\partial f}{\partial u} - c_0\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$X_2 = D\frac{\partial g}{\partial v}, \quad Y_2 = D\frac{\partial f}{\partial u}, \quad X_3 = 2\left(c_0 - c_0'\right)u^2, \quad Y_3 = 2\left(c_0' - c_0\right)v^2.$$

В соответствии с равенствами $X_3 = Y_3 = 0$ получаем, что $c_0 = c_0'$, а из равенств $X_2 = Y_2 = 0$ следует, что величины $c_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $c_1' = \dfrac{\partial g}{\partial v}$ являются константами, согласно равенствам $X_1 = Y_1 = 0$ удовлетворяющими условию $c_1 + c_1' = 0$. Таким образом, получаем, что при $k_0 = 1$ система (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + c_1 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c_0 \frac{\partial v}{\partial x} - c_1 v, \tag{5.11}$$

где c_0 и c_1 – произвольные константы. В случае, когда $k_0 > 1$, из равенств $X_2 = Y_2 = 0$ в силу (5.9) вытекают аналогичные (5.8) условия

$$D \frac{\partial f}{\partial u_{k_0-1}} = D \frac{\partial g}{\partial v_{k_0-1}} = 0, \tag{5.12}$$

с учетом определения оператора D вида (3.10) означающие, что величины

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial u_{k_0-1}}, \quad c_1' = \frac{\partial g}{\partial v_{k_0-1}} \tag{5.13}$$

не зависят от x и переменных u_k, v_k с $k \geq 0$, т.е. являются константами. Отсюда следует, что при $k_0 > 1$ функции f и g допускают представление

$$f = c_0 \frac{\partial^{k_0} u}{\partial x^{k_0}} + c_1 \frac{\partial^{k_0-1} u}{\partial x^{k_0-1}} + \cdots, \quad g = c_0' \frac{\partial^{k_0} v}{\partial x^{k_0}} + c_1' \frac{\partial^{k_0-1} v}{\partial x^{k_0-1}} + \cdots, \tag{5.14}$$

где точками обозначены слагаемые, содержащие производные $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ и $\dfrac{\partial^k v}{\partial x^k}$ не выше $(k_0 - 2)$–го порядка. Входящие в эти равенства величины c_0, c_1 и c_0', c_1', очевидно, могут зависеть от времени t и удовлетворяют соотношениям

$$c_0 + (-1)^{k_0} c_0' = 0, \quad c_1 = (-1)^{k_0} c_1'. \tag{5.15}$$

Выше мы уже убедились, что эти соотношения выполняются при $k_0 = 0$ и $k_0 = 1$. Ниже справедливость соотношений (5.15) будет установлена при любом $k_0 > 1$. Достигается это следующим образом. Произведем в системе (2.1) замену

$$u = \varepsilon p, \quad v = \varepsilon q, \tag{5.16}$$

где ε – малый параметр. В результате этой замены определенные посредством (2.3) и (2.4) решения φ_α^-, ψ_α^- и φ_β^+, ψ_β^+, $\alpha, \beta = 1, 2$, системы (2.1) примут вид

$$\varphi_1^-(x,\zeta) = \exp(i\zeta x) + \cdots, \quad \psi_1^-(x,\zeta) = \varepsilon q_-(x,\zeta)\exp(i\zeta x) + \cdots,$$

$$\varphi_1^+(x,\zeta) = \exp(i\zeta x) + \cdots, \quad \psi_1^+(x,\zeta) = \varepsilon q_+(x,\zeta)\exp(i\zeta x) + \cdots,$$

$$\varphi_2^-(x,\zeta) = \varepsilon p_-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x) + \cdots, \quad \psi_2^-(x,\zeta) = \exp(-i\zeta x) + \cdots,$$

$$\varphi_2^+(x,\zeta) = \varepsilon p_+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x) + \cdots, \quad \psi_2^+(x,\zeta) = \exp(-i\zeta x) + \cdots,$$

где точками обозначены члены не ниже второго порядка малости по ε, а величины p_+, p_- и q_+, q_- имеют вид

$$p_+(x,\zeta) = \int_x^\infty p(z)\exp\left[2i\zeta(x-z)\right]dz, \quad p_-(x,\zeta) = -\int_{-\infty}^x p(z)\exp\left[2i\zeta(x-z)\right]dz,$$

$$q_+(x,\zeta) = \int_x^\infty q(z)\exp\left[-2i\zeta(x-z)\right]dz, \quad q_-(x,\zeta) = -\int_{-\infty}^x q(z)\exp\left[-2i\zeta(x-z)\right]dz.$$

Отсюда следует, что матрицы Φ, Ψ и Θ соответственно вида (2.10) и (2.12) обладают разложением

$$\begin{aligned} \Phi &= \sigma_-' \exp(2i\zeta x) + \varepsilon\left[\sigma_+ p_+(x,\zeta) + \sigma_- p_-(x,\zeta)\right] + \cdots, \\ \Psi &= \sigma_+' \exp(-2i\zeta x) + \varepsilon\left[\sigma_+ q_-(x,\zeta) + \sigma_- q_+(x,\zeta)\right] + \cdots, \\ \Theta &= \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) + \frac{\varepsilon}{2}\left[\sigma_+' P(x,\zeta) + \sigma_-' Q(x,\zeta)\right] + \cdots, \end{aligned} \tag{5.17}$$

где точками обозначены члены не ниже второго порядка малости по ε, матрицы σ_+, σ_- и σ_+', σ_-' определены с помощью (2.17), а величины P и Q имеют вид

$$P(x,\zeta) = \int_x^\infty p(z)\exp(-2i\zeta z)dz - \int_{-\infty}^x p(z)\exp(-2i\zeta z)dz,$$

$$Q(x,\zeta) = \int_x^\infty q(z)\exp(2i\zeta z)dz - \int_{-\infty}^x q(z)\exp(2i\zeta z)dz.$$

Определенный посредством (3.10) оператор D при замене (5.16) преобразуется в оператор $\mathfrak{D}$ вида

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^\infty \left(p_{k+1}\frac{\partial}{\partial p_k} + q_{k+1}\frac{\partial}{\partial q_k}\right), \tag{5.18}$$

где

$$p_k = \frac{\partial^k p}{\partial x^k}, \quad q_k = \frac{\partial^k q}{\partial x^k}, \quad k \geq 0. \tag{5.19}$$

Далее, с помощью вытекающих из (4.10) равенств

$$\frac{\partial f}{\partial v_\varkappa} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_0}\left(u_k \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial v_\varkappa} - v_k \frac{\partial^2 f}{\partial v_k \partial v_\varkappa}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial u_\varkappa} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_0}\left(v_k \frac{\partial^2 g}{\partial v_k \partial u_\varkappa} - u_k \frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_\varkappa}\right)$$

нетрудно убедиться, что в точке $u_k = v_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, k_0$, производные $\dfrac{\partial f}{\partial v_\varkappa}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial u_\varkappa}$ при $\varkappa = 0, 1, \ldots, k_0$ обращаются в нуль. Отсюда следует, что выражения для производных функций f и g по переменным u_k и v_k с $k = 0, 1, \ldots, k_0$ после подстановки (5.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_k} &= f_k + \varepsilon a_k + \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial v_k} = \varepsilon b_k + \cdots, \\ \frac{\partial g}{\partial u_k} &= \varepsilon c_k + \cdots, \quad \frac{\partial g}{\partial v_k} = g_k + \varepsilon e_k + \cdots, \end{aligned} \tag{5.20}$$

где точками обозначены члены не ниже второго порядка малости по ε, а f_k и g_k равны соответственно значениям производных $\dfrac{\partial f}{\partial u_k}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial v_k}$ в точке $u_\varkappa = v_\varkappa = 0$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, k_0$. Наконец, с учетом соотношений (4.10) и равенств (5.20) получаем, что функции f и g обладают разложением

$$f = \varepsilon \sum_{k=0}^{k_0} f_k p_k + \cdots, \quad g = \varepsilon \sum_{k=0}^{k_0} g_k q_k + \cdots, \tag{5.21}$$

где точками обозначены члены не ниже второго порядка малости по ε. Заменим теперь с помощью равенств (5.16)–(5.21) все величины, входящие в задаваемые посредством (3.24) выражения для X и Y. С учетом того, что величина R вида (3.16), (3.17) в результате этой замены станет величиной первого порядка малости по ε, интересующие нас величины X и Y могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} X &= \sigma'_- X_- + \varepsilon \sigma'_+ X_+ + \varepsilon \left[X'_0 - (\sigma_+ + \sigma_-)X_0\right] + \cdots, \\ Y &= \sigma'_+ Y_+ - \varepsilon \sigma'_- Y_- + \varepsilon \left[Y'_0 - (\sigma_+ + \sigma_-)Y_0\right] + \cdots, \end{aligned} \tag{5.22}$$

где точками обозначены члены не ниже второго порядка малости по ε, а

$$\begin{aligned} X_- &= \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathcal{D}^k \left[\exp(2i\zeta x)\mathcal{D}(g_k + \varepsilon e_k)\right], \\ X_+ &= \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathcal{D}^k \left[\exp(-2i\zeta x)(4i\zeta - \mathcal{D})b_k\right], \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$X'_0 = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathcal{D}^k \left[(\sigma_+ p_+ + \sigma_- p_-)\mathcal{D} g_k\right], \tag{5.24}$$

$$X_0 = \sum_{k=0}^{k_0} \left[f_k p_k + (-1)^k \mathcal{D}^k (g_k p)\right], \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} Y_+ &= \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathcal{D}^k \left[\exp(-2i\zeta x)\mathcal{D}(f_k + \varepsilon a_k)\right], \\ Y_- &= \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathcal{D}^k \left[\exp(2i\zeta x)(4i\zeta + \mathcal{D})c_k\right], \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$Y'_0 = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathcal{D}^k \left[(\sigma_+ q_- + \sigma_- q_+)\mathcal{D} f_k\right], \tag{5.27}$$

$$Y_0 = \sum_{k=0}^{k_0} \left[g_k q_k + (-1)^k \mathcal{D}^k (f_k q)\right]. \tag{5.28}$$

В силу того, что матрицы $\sigma_+, \sigma_-, \sigma'_+$ и σ'_- – линейно независимы, из равенств (5.1) и (5.22) следуют равенства

$$X_- = X_+ = X'_0 - (\sigma_+ + \sigma_-)X_0 = 0, \quad Y_+ = Y_- = Y'_0 - (\sigma_+ + \sigma_-)Y_0 = 0. \tag{5.29}$$

Далее, из условий $X_- = X_+ = 0$ согласно (5.23) следуют равенства

$$\mathcal{D} g_k = \mathcal{D} e_k = b_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, k_0,$$

а из условий $Y_+ = Y_- = 0$ на основе (5.26) вытекают равенства

$$\mathcal{D} f_k = \mathcal{D} a_k = c_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, k_0.$$

Эти равенства, в частности, означают, что величины f_k и g_k при $k = 0, 1, \ldots, k_0$ являются константами, а определенные посредством (5.24) и (5.27) величины X'_0 и Y'_0 равны нулю, т.е. $X'_0 = Y'_0 = 0$. С учетом этого обстоятельства в соответствии с (5.29) получаем равенства $X_0 = Y_0 = 0$, в силу (5.25) и (5.28) означающие, что при любом $k = 0, 1, \ldots, k_0$ справедливо соотношение

$$f_k + (-1)^k g_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, k_0. \tag{5.30}$$

Как мы установили ранее, производные $\dfrac{\partial f}{\partial u_{k_0}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u_{k_0-1}}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial v_{k_0}}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v_{k_0-1}}$ согласно (5.8) и (5.12) являются константами. Отсюда на основе (5.10) и (5.13) следуют равенства

$$c_0 = f_{k_0}, \quad c'_0 = g_{k_0}, \quad c_1 = f_{k_0-1}, \quad c'_1 = g_{k_0-1},$$

означающие, что соотношения (5.15) следуют из (5.30), что и требовалось доказать.

Суммируя все сказанное выше, мы видим, что порождаемая решениями системы (1.1) эволюция S-матрицы оператора Дирака L подчиняется уравнению вида (1.5) только в том случае, если эта система имеет вид (5.6) или (5.11) соответственно при $k_0 = 0$ и $k_0 = 1$, а при $k_0 > 1$ функции f и g допускают представление (5.14) с постоянными c_0, c_1 и c'_0, c'_1, удовлетворяющими соотношениям (5.15). Этой информации достаточно для того, чтобы установить существование у системы (1.1) операторного представления вида (1.4), что и будет осуществлено в следующем разделе.

6. Нахождение оператора A для операторного соотношения (1.4)

Исходя из представления (1.6), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$[A,\ L] = \sigma \sum_{k=0}^{k_0} [\sigma,\ A_k]\, L^{k_0-k+1} - \sigma \sum_{k=0}^{k_0} \left\{ \frac{\partial A_k}{\partial x} + [U,\ A_k] \right\} L^{k_0-k}.$$

На основе этого равенства получаем, что для оператора A вида (1.6) операторное соотношение (1.4) эквивалентно условиям (1.7) и уравнению (1.8). Из их структуры следует, что, не нарушая общности, матрицы A_k могут быть взяты в виде

$$A_k = \begin{vmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \gamma_k & -\alpha_k \end{vmatrix}.$$

В этой ситуации уравнение (1.8) превращается в систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta_{k_0+1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + 2\gamma_{k_0+1} = 0. \tag{6.1}$$

Кроме того, из условий (1.7) следует, что $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, а при $k \geq 0$ выполняются рекуррентные соотношения

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + v\beta_k + u\gamma_k = 0, \quad \beta_{k+1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \beta_k}{\partial x} + u\alpha_k, \quad \gamma_{k+1} + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_k}{\partial x} + v\alpha_k = 0, \tag{6.2}$$

с точностью до обозначений совпадающие с рекуррентными соотношениями (4.5). С учетом сказанного ранее о свойствах решений системы (4.5) мы получаем, что величины α_0 и α_1 являются константами, $\beta_1 = \alpha_0 u$, $\gamma_1 = -\alpha_0 v$, а при $k > 0$ имеют место равенства

$$\beta_{k+1} = \frac{\alpha_0}{2^k}\frac{\partial^k u}{\partial x^k} + \frac{\alpha_1}{2^{k-1}}\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} + \cdots, \ \gamma_{k+1} = (-1)^k\left[-\frac{\alpha_0}{2^k}\frac{\partial^k v}{\partial x^k} + \frac{\alpha_1}{2^{k-1}}\frac{\partial^{k-1} v}{\partial x^{k-1}}\right] + \cdots, \tag{6.3}$$

где α_0 и α_1 – произвольные константы, а точками обозначены члены, содержащие производные $\frac{\partial^\varkappa u}{\partial x^\varkappa}$ и $\frac{\partial^\varkappa v}{\partial x^\varkappa}$ не выше $(k-2)$–го порядка, если $k > 1$, а при $k = 1$ обозначенные точками члены являются нулевыми. Отсюда следует, что при $k_0 = 0$ система (1.1), имеющая вид (5.6), совпадает с (6.1), если положить $c_0 = -2\alpha_0$, а при $k_0 = 1$ система (1.1), имеющая вид (5.11), совпадает с (6.1), если положить $c_0 = -\alpha_0$, $c_1 = -2\alpha_1$. Далее, при $k_0 > 1$ согласно (5.14), (5.15) и (6.3) получаем, что уравнения (1.1) и (6.1) совпадут с точностью до членов, содержащих производные $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ и $\frac{\partial^k v}{\partial x^k}$ не выше (k_0-2)–го порядка, если положить

$$\alpha_0 = -2^{k_0-1}c_0, \quad \alpha_1 = -2^{k_0-2}c_1. \tag{6.4}$$

Таким образом, полагая при $k_0 > 1$

$$f' = f + 2\beta_{k_0+1}, \quad g' = g + 2\gamma_{k_0+1},$$

мы получаем систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g',$$

правые части которых в силу (6.4) не зависят от производных $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ и $\frac{\partial^k v}{\partial x^k}$ выше (k_0-2)–го порядка. Порожденная решениями этой системы эволюция S–матрицы оператора L описывается аналогичным (1.5) уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t} = J',$$

где матрица J' на основе аддитивности интеграла $I(\zeta)$ вида (2.32) и равенства (1.9) допускает представление

$$J' = J\,(S(\zeta), \zeta) - \rho(\zeta)\,[\sigma,\ S(\zeta)]$$

и, следовательно, обладает теми же самыми свойствами, что и исходная матрица J. Отсюда следует, что указанная здесь процедура позволяет за конечное число шагов найти оператор A вида (1.6), с помощью операторного соотношения (1.4) порождающий систему (1.1).

Ключевую роль в получении этого результата сыграло то обстоятельство, что определенные посредством (3.7)–(3.9), (3.14), (3.16), (3.17) и (3.20) величины $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ удовлетворяют системе (3.6). В силу (3.9), (3.14) и (3.16) этот факт означает, что существуют операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вида

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{13} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{23} \\ \mathcal{B}_{31} & \mathcal{B}_{32} & \mathcal{B}_{33} \end{vmatrix}, \tag{6.5}$$

такие, что операторное соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A},\ \mathcal{L}] = \mathcal{B}\cdot\mathcal{L} \tag{6.6}$$

эквивалентно системе (1.1), если в качестве $\mathcal{L}$ взять порождающий оператор, т.е. используемый на протяжении всей работы оператор вида

$$\mathcal{L} = \partial + P - 2i\zeta\Lambda, \tag{6.7}$$

где

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 2u & 0 \\ v & 0 & u \\ 0 & 2v & 0 \end{vmatrix}, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}\,(1, 0, -1). \tag{6.8}$$

При этом величины $\mathcal{A}_{\mu,\nu}$ и $\mathcal{B}_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu = 1,2,3$, являются дифференциальными (по x) операторами со скалярными коэффициентами. Действительно, положим

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{11} = \sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k D^k\cdot\frac{\partial g}{\partial v_k}, \quad \mathcal{A}_{13} = -\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k D^k\cdot\frac{\partial f}{\partial v_k}, \\ \mathcal{A}_{31} = -\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k D^k\cdot\frac{\partial g}{\partial u_k}, \quad \mathcal{A}_{33} = \sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k D^k\cdot\frac{\partial f}{\partial u_k}, \\ \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{22} = \mathcal{A}_{32} = 0, \quad \mathcal{A}_{21} = A_{21},\ \mathcal{A}_{23} = A_{23}, \end{gathered} \tag{6.9}$$

где $A_{21} = A_{23} = 0$, если $k_0 = 0$, а при $k_0 > 0$ эти операторы определены посредством равенств

$$\begin{gathered} A_{21} = \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}(-1)^\varkappa\left(v_{k-\varkappa-1}D^\varkappa\cdot\frac{\partial g}{\partial v_k} - u_{k-\varkappa-1}D^\varkappa\cdot\frac{\partial g}{\partial u_k}\right), \\ A_{23} = \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{\varkappa=0}^{k-1}(-1)^\varkappa\left(u_{k-\varkappa-1}D^\varkappa\cdot\frac{\partial f}{\partial u_k} - v_{k-\varkappa-1}D^\varkappa\cdot\frac{\partial f}{\partial v_k}\right). \end{gathered} \tag{6.10}$$

В соответствии с равенствами (4.10) нетрудно убедиться, что при любом $k_0 \geq 0$ справедливы соотношения

$$D \cdot A_{21} + v\mathcal{A}_{11} + u\mathcal{A}_{31} = g, \quad D \cdot A_{23} + v\mathcal{A}_{13} + u\mathcal{A}_{33} = f. \tag{6.11}$$

Далее, пусть $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$ и $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ – соответственно элементы матриц $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ вида (3.7) и (3.20), стоящие на пересечении α-й строки и β-го столбца этих матриц, $\alpha, \beta = 1, 2$. На основе равенства $\chi = 0$ согласно (3.7), (3.9), (3.14), (3.16), (3.17), (3.20), (6.9) и (6.10) имеют место равенства

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\alpha,\beta} + \mathcal{A}_{11}\Phi_{\alpha,\beta} + \mathcal{A}_{13}\Psi_{\alpha,\beta}, \quad \mathcal{G}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha,\beta} + \mathcal{A}_{31}\Phi_{\alpha,\beta} + \mathcal{A}_{33}\Psi_{\alpha,\beta},$$
$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\Theta_{\alpha,\beta} + \mathcal{A}_{21}\Phi_{\alpha,\beta} + \mathcal{A}_{23}\Psi_{\alpha,\beta}, \tag{6.12}$$

где $\Phi_{\alpha,\beta}$, $\Psi_{\alpha,\beta}$ и $\Theta_{\alpha,\beta}$ – соответственно элементы матриц Φ, Ψ и Θ вида (2.10) и (2.12), стоящие на пересечении α-й строки и β-го столбца этих матриц, $\alpha, \beta = 1, 2$. Пусть, наконец, $E_{\alpha,\beta}$ – вектор-столбец с компанентами $\Phi_{\alpha,\beta}$, $\Theta_{\alpha,\beta}$ и $\Psi_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, т.е.

$$\tilde{E}_{\alpha,\beta} = (\Phi_{\alpha,\beta},\ \Theta_{\alpha,\beta},\ \Psi_{\alpha,\beta}), \ \alpha, \beta = 1, 2.$$

В силу (3.6) и (6.12) отсюда следует, что определенный с помощью (6.5), (6.9) и (6.10) оператор $\mathcal{T}$ вида

$$\mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}$$

переводит любой вектор-столбец $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, в решение системы (2.11). Это значит, что оператор $\mathcal{K}$ вида

$$\mathcal{K} = [\mathcal{T},\ \mathcal{L}]$$

переводит любой вектор-столбец $E_{\alpha,\beta}$ в нуль. С учетом этого обстоятельства положим

$$\mathcal{K} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{L} + \mathcal{K}_0,$$

где $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор вида (6.5), а $\mathcal{K}_0$ – оператор нулевого порядка, т.е. матрица с элементами $K_{\mu,\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$. Из определения этого оператора вытекает равенство

$$\mathcal{K}_0 E_{\alpha,\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

т.е. равенство

$$K_{\mu,1}\Phi + K_{\mu,2}\Theta + K_{\mu,3}\Psi = 0$$

имеет место при любом $\mu = 1, 2, 3$, что возможно только при выполнении условия $K_{\mu,\nu} = 0$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$. Таким образом, справедливость операторного соотношения (6.6) доказана.

7. Анализ операторного соотношения (6.6)

Операторное соотношение (6.6) является естественным обобщением хорошо известного в квантовой механике уравнения Гейзенберга, сохранившим многие замечательные свойства последнего. После известной работы [1] П. Лакса это уравнение

(под названием представления Лакса) долгие годы служило единственным средством для поиска интегрируемых систем. Однако операторное соотношение (6.6) во многих случаях [2–4] является более удобным инструментом для поиска и исследования интегрируемых систем, а в некоторых случаях и единственно возможным [5–7]. Рассматриваемая здесь ситуация может служить подтверждением этого утверждения. Действительно, для операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{L}$ соответственно вида (6.5) и (6.7) операторное соотношение (6.6) эквивалентно двум условиям

$$\Lambda\mathcal{A} = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cdot \Lambda, \quad \mathcal{P} + (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cdot P - P\mathcal{A} + (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cdot D - D \cdot \mathcal{A} = 0, \tag{7.1}$$

где оператор D определен посредством (3.10), а матрица $\mathcal{P} = \dfrac{\partial P}{\partial t}$ в силу (1.1) и (6.8) имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{vmatrix} 0 & 2f & 0 \\ g & 0 & f \\ 0 & 2g & 0 \end{vmatrix}. \tag{7.2}$$

Из первого из этих условий вытекают равенства

$$\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{32} = \mathcal{B}_{11} = \mathcal{B}_{33} = 0, \quad \mathcal{B}_{13} = 2\mathcal{A}_{13}, \ \mathcal{B}_{21} = \mathcal{A}_{21}, \ \mathcal{B}_{23} = \mathcal{A}_{23}, \ \mathcal{B}_{31} = 2\mathcal{A}_{31}.$$

Таким образом, операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют следующую структуру:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0 & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & 0 & \mathcal{A}_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{B}_{12} & 2\mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ 2\mathcal{A}_{31} & \mathcal{B}_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

С учетом этого обстоятельства второе из условий (7.1) в силу (7.2) оказывается эквивалентно операторным соотношениям

$$[D,\ \mathcal{A}_{11}] + 2u\mathcal{A}_{21} + \mathcal{B}_{12} \cdot v = 0, \quad \{D,\ \mathcal{A}_{13}\} + 2u\mathcal{A}_{23} + \mathcal{B}_{12} \cdot u = 0,$$
$$\{D,\ \mathcal{A}_{31}\} + 2v\mathcal{A}_{21} + \mathcal{B}_{32} \cdot v = 0, \quad [D,\ \mathcal{A}_{33}] + 2v\mathcal{A}_{23} + \mathcal{B}_{32} \cdot u = 0, \tag{7.3}$$

$$-\mathcal{A}_{11} \cdot u + \mathcal{A}_{13} \cdot v + u\mathcal{A}_{22} + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{12} \cdot D = f,$$
$$\mathcal{A}_{31} \cdot u - \mathcal{A}_{33} \cdot v + v\mathcal{A}_{22} + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{32} \cdot D = g, \tag{7.4}$$

$$D \cdot \mathcal{A}_{21} + v\mathcal{A}_{11} + u\mathcal{A}_{31} - (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{B}_{22}) \cdot v = g,$$
$$D \cdot \mathcal{A}_{23} + v\mathcal{A}_{13} + u\mathcal{A}_{33} - (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{B}_{22}) \cdot u = f, \tag{7.5}$$

$$D \cdot \mathcal{A}_{22} = (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{B}_{22}) \cdot D, \tag{7.6}$$

где фигурными скобками обозначены антикоммутаторы. Из соотоншения (7.6) следует, что существует оператор ω, такой, что выполняются равенства

$$\mathcal{A}_{22} = \omega \cdot D + c, \quad \mathcal{B}_{22} = [\omega,\ D], \tag{7.7}$$

где c – константа. Действительно, положим

$$\mathcal{A}_{22} = \sum_{k=0}^{k_1} D^{k_1-k} \cdot a_k, \quad \mathcal{B}_{22} = \sum_{k=0}^{k_1} D^{k_1-k} \cdot b_k.$$

Тогда на основании (7.6) получаем, что

$$b_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(a_{k_1} - b_{k_1}) = 0, \tag{7.8}$$

а при $k = 0, 1, \ldots, k_1 - 1$, если $k_1 > 0$, справедливо рекуррентное соотношение

$$b_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x}(b_k - a_k), \quad k = 0, 1, \ldots, k_1 - 1.$$

Из этого соотношения вытекает, что величины b_k при $k = 1, \ldots, k_1$ допускают представление

$$b_k = -\frac{\partial \omega_k}{\partial x}, \quad \omega_k = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \frac{\partial^\varkappa}{\partial x^\varkappa} a_{k-\varkappa-1}, \; k = 1, \ldots, k_1. \tag{7.9}$$

Кроме того, согласно (7.8) и (7.9) имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{k_1} \frac{\partial^k a_{k_1-k}}{\partial x^k} = 0. \tag{7.10}$$

Положим теперь

$$\omega = \sum_{k=1}^{k_1} D^{k_1-k} \cdot \omega_k. \tag{7.11}$$

Отсюда следует равенство

$$\omega \cdot D = D^{k_1} \cdot \omega_1 - \frac{\partial \omega_{k_1}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k_1-1} D^{k_1-k} \cdot \left(\omega_{k+1} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x} \right).$$

Далее, в соответствии с (7.9) имеем

$$\omega_1 = a_0, \quad \omega_{k+1} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x} = a_k, \; k = 1, \ldots, k_1 - 1, \; \frac{\partial \omega_{k_1}}{\partial x} = -a_{k_1} + c,$$

где

$$c = \sum_{k=0}^{k_1} \frac{\partial^k a_{k_1-k}}{\partial x^k},$$

и в силу (7.10) c является константой. Таким образом, получаем равенство $\omega \cdot D = \mathcal{A}_{22} - c$, эквивалентное первому из равенств (7.7). Наконец, согласно (7.9) и (7.11) имеем цепочку равенств

$$[\omega, \; D] = -\sum_{k=1}^{k_1} D^{k_1-k} \cdot \frac{\partial \omega_k}{\partial x} = \sum_{k=1}^{k_1} D^{k_1-k} \cdot b_k,$$

что с учетом равенства $b_0 = 0$ эквивалентно второму из равенств (7.7). В соответствии с равенствами (6.11) и (7.7) соотношения (7.5) принимают вид

$$D \cdot (\mathcal{A}_{21} - \mathcal{A}_{21} - \omega \cdot v) = cv, \quad D \cdot (\mathcal{A}_{23} - \mathcal{A}_{23} - \omega \cdot u) = cu.$$

Отсюда следует, что $c = 0$, а операторы $\mathcal{A}_{21}$ и $\mathcal{A}_{23}$ допускают представление

$$\mathcal{A}_{21} = \mathcal{A}_{21} + \omega \cdot v, \quad \mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{23} + \omega \cdot u. \tag{7.12}$$

На основании равенств (7.12) соотношения (7.3) и (7.4) принимают свой окончательный вид

$$\begin{aligned} &[D, \; \mathcal{A}_{11}] + 2u\mathcal{A}_{21} + \Omega_1 \cdot v = 0, \quad \{D, \; \mathcal{A}_{13}\} + 2u\mathcal{A}_{23} + \Omega_1 \cdot u = 0, \\ &\{D, \; \mathcal{A}_{31}\} + 2v\mathcal{A}_{21} + \Omega_3 \cdot v = 0, \quad [D, \; \mathcal{A}_{33}] + 2v\mathcal{A}_{23} + \Omega_3 \cdot u = 0, \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$-\mathcal{A}_{11} \cdot u + \mathcal{A}_{13} \cdot v + \frac{1}{2}\Omega_1 \cdot D = f, \quad \mathcal{A}_{31} \cdot u - \mathcal{A}_{33} \cdot v + \frac{1}{2}\Omega_3 \cdot D = g, \tag{7.14}$$

где

$$\Omega_1 = 2u\omega + \mathcal{B}_{12}, \quad \Omega_3 = 2v\omega + \mathcal{B}_{32}.$$

Таким образом, наиболее общий вид операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, удовлетворяющих соотношению (6.6), описывается формулами

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0 & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} + \omega \cdot v & \omega \cdot D & \mathcal{A}_{23} + \omega \cdot u \\ \mathcal{A}_{31} & 0 & \mathcal{A}_{33} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{vmatrix} 0 & \Omega_1 - 2u\omega & 2\mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} + \omega \cdot v & [\omega, \; D] & \mathcal{A}_{23} + \omega \cdot u \\ 2\mathcal{A}_{31} & \Omega_3 - 2v\omega & 0 \end{vmatrix}.$$

Входящий в эти равенства оператор ω может быть взят произвольным. Это никак не сказывается на соотношениях (7.13) и (7.14). Этот факт соответствует тому, что операторное соотношение (6.6) инвариантно относительно замены

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} + \Omega \cdot \mathcal{L}, \quad \mathcal{B} \to \mathcal{B} + [\Omega, \; \mathcal{L}],$$

где

$$\Omega = \mathrm{diag}\;(0, \omega, 0),$$

которая не меняет элементов первой и последней строк матрицы $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что ни при каком выборе оператора ω нельзя сделать оператор $\mathcal{B}$ нулевым, а соотношение (6.6) превратить в чистое уравнение Гейзенберга без правой части.

Вытекающие из (6.6) соотношения (7.13) и (7.14) эквивалентны условиям (5.1). Тот факт, что они вытекают из этих условий нами был установлен выше. Докажем обратное. С этой целью покажем, что условия (5.7), (5.8), (5.12) и (5.15) могут быть получены с помощью соотношений (7.13) и (7.14). Действительно, согласно (6.9) и (7.14) порядки операторов Ω_1 и Ω_3 не превосходят $k_0 - 1$, если $k_0 > 0$, а при $k_0 = 0$

имеем $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Далее в силу (6.10) порядки операторов A_{21} и A_{23} не превосходят $k_0 - 1$, если $k_0 > 0$, а при $k_0 = 0$ имеем $A_{21} = A_{23} = 0$. Отсюда на основе (7.13) вытекает, что порядки операторов $\Delta_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 3$, вида

$$\Delta_{11} = [D,\ \mathcal{A}_{11}], \quad \Delta_{13} = \{D,\ \mathcal{A}_{13}\}, \quad \Delta_{31} = \{D,\ \mathcal{A}_{31}\}, \quad \Delta_{33} = [D,\ \mathcal{A}_{33}]$$

не превосходят $k_0 - 1$, если $k_0 > 0$, а при $k_0 = 0$ все эти операторы являются нулевыми. С учетом (6.9) это значит, что при любом $k_0 > 0$ имеют место соотношения (5.7) и (5.8), а при $k_0 = 0$ из соотношения (5.7) нужно выбросить не имеющие смысла при $k_0 = 0$ производные $\dfrac{\partial f}{\partial v_{k_0 - 1}}$ и $\dfrac{\partial g}{\partial u_{k_0 - 1}}$. Таким образом, получаем, что в соответствии с условием (5.7) и равенствами (6.9) порядки операторов $\mathcal{A}_{13}$ и $\mathcal{A}_{31}$ не превосходят $k_0 - 2$, если $k_0 > 1$, а при $k_0 = 1$ и $k_0 = 0$ имеем $\mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{31} = 0$. Далее, операторы $\mathcal{A}_{11}$ и $\mathcal{A}_{33}$ в силу (5.8), (5.10) и (6.9) имеют вид

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{k_0} c_0' D^{k_0} + \cdots, \quad \mathcal{A}_{33} = (-1)^{k_0} c_0 D^{k_0} + \cdots, \tag{7.15}$$

где точками обозначены члены, имеющие порядки не выше $(k_0 - 1)$-го, если $k_0 > 0$, а при $k_0 = 0$ обозначенные точками члены равны нулю. Наконец, операторы A_{21} и A_{23} на основе (5.7), (5.8), (5.10) и (6.10), а операторы Ω_1 и Ω_3 согласно (7.14) и (7.15) допускают представление

$$A_{21} = (-1)^{k_0 - 1} c_0' v D^{k_0 - 1} + \cdots, \quad A_{23} = (-1)^{k_0 - 1} c_0 u D^{k_0 - 1} + \cdots,$$

$$\Omega_1 = 2(-1)^{k_0} c_0' D^{k_0 - 1} \cdot u + \cdots, \quad \Omega_3 = 2(-1)^{k_0} c_0 D^{k_0 - 1} \cdot v + \cdots,$$

где точками обозначены члены, имеющие порядки не выше $(k_0 - 2)$-го, если $k_0 > 1$, а при $k_0 = 1$ обозначенные точками члены равны нулю. Отсюда следуют равенства

$$2uA_{21} + \Omega_1 \cdot v = 2(-1)^{k_0} c_0' \Delta_0 + \cdots, \quad 2vA_{23} + \Omega_3 \cdot u = 2(-1)^{k_0} c_0 \Delta_0 + \cdots,$$

где

$$\Delta_0 = D^{k_0 - 1} \cdot uv - uv D^{k_0 - 1},$$

а обозначенные точками члены имеют порядки не выше $(k_0 - 2)$-го при $k_0 > 1$ и равны нулю, если $k_0 = 1$. Таким образом, с учетом (7.13) получаем, что порядки операторов $[D,\ \mathcal{A}_{11}]$ и $[D,\ \mathcal{A}_{33}]$ не превосходят $k_0 - 2$ при $k_0 > 1$, а при $k_0 = 1$ эти операторы равны нулю. Отсюда немедленно следует справедливость соотношения (5.12) при любом $k_0 > 0$. В результате справедливость соотношений (5.7), (5.8) и (5.12) доказана при любом $k_0 > 0$. Покажем теперь, что определенные посредством (5.10) и (5.13) величины c_0, c_0' и c_1, c_1' удовлетворяют соотношениям (5.15). С этой целью произведем в равенствах (6.9) и (7.13) замену (5.16). Согласно (5.20) определенные с помощью (6.9) операторы $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 3$ допускают разложение

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{11} = A_{11} + \varepsilon a + \ldots, \quad \mathcal{A}_{13} = \varepsilon b + \ldots, \\ \mathcal{A}_{31} = \varepsilon c + \ldots, \quad \mathcal{A}_{33} = A_{33} + \varepsilon e + \ldots, \end{gathered} \tag{7.16}$$

где операторы a, b, c и e не зависят от ε, точками обозначены члены не ниже второго порядка малости по ε, а

$$A_{11} = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathfrak{D}^k \cdot g_k, \quad A_{33} = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \mathfrak{D}^k \cdot f_k. \tag{7.17}$$

При этом оператор $\mathfrak{D}$ определен посредством (5.18), а операторы A_{11} и A_{33} вида (7.17) на основе (7.13) удовлетворяют условиям $[\mathfrak{D},\ \mathcal{A}_{11}] = [\mathfrak{D},\ \mathcal{A}_{33}] = 0$, означающим, что величины f_k и g_k являются константами, $k = 0, 1, \ldots, k_0$. Теперь подействуем на единицу левыми и правыми частями соотношений (7.14). В результате получим равенства

$$-\mathcal{A}_{11} u + \mathcal{A}_{13} v = f, \quad \mathcal{A}_{31} u - \mathcal{A}_{33} v = g,$$

из которых при замене (5.16) в силу (5.19), (5.21), (7.16) и (7.17) вытекают соотношения

$$\sum_{k=0}^{k_0} \left[f_k + (-1)^k g_k \right] p_k = \sum_{k=0}^{k_0} \left[g_k + (-1)^k f_k \right] q_k = 0.$$

Таким образом, нами доказана справедливость равенства (5.30), из которого соотношения (5.15) следуют на указанном выше основании. Это значит, что мы получили доказательство равенств (5.7), (5.8), (5.10), (5.12), (5.13) и (5.15), целиком основанное на соотношениях (4.10) и (6.6) и не использующее условий (5.1). Это обстоятельство дает нам возможность продолжить доказательство нашего утверждения по схеме, аналогичной той, которая нами уже была использована ранее при построении оператора A с помощью условий (5.1). Детали этого доказательства очевидны и поэтому опущены. В результате мы можем считать эквивалентность условий (5.1) и соотношения (6.6) полностью доказанной.

8. Заключение

В заключение будет нелишне сказать несколько слов о причинах, по которым операторное представление вида (1.4) играет столь важную роль в теории уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния. С этой целью, опираясь на уравнения (2.11), произведем в интеграле (2.32) замену

$$\Phi \to \frac{1}{2i\zeta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2u\Theta\right), \quad \Psi \to -\frac{1}{2i\zeta}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2v\Theta\right).$$

В результате интегрирования по частям в полученном равенстве выражение для $I = I(\zeta)$ принимает вид

$$I(\zeta) = \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \{\Psi(z,\zeta) \frac{\partial \hat{f}(z)}{\partial z} + \Phi(z,\zeta) \frac{\partial \hat{g}(z)}{\partial z} - 2[v(z)\hat{f}(z) + u(z)\hat{g}(z)]\Theta(z,\zeta)\} dz. \tag{8.1}$$

Предположим теперь, что функция $h = h(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} + v(x)\hat{f}(x) + u(x)\hat{g}(x) = 0. \tag{8.2}$$

С учетом этого соотношения равенство (8.1) после интегрирования по частям на основе последнего уравнения системы (2.11) принимает вид

$$I'(\zeta) = i\zeta I(\zeta) - h(z)\Theta(z,\zeta)\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty},$$

где

$$I'(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\Psi(z,\zeta)\hat{f}'(z) - \Phi(z,\zeta)\hat{g}'(z)\right] dz, \tag{8.3}$$

$$f' = \frac{1}{2}Df + uh, \quad g' = -\frac{1}{2}Dg - vh. \tag{8.4}$$

В соответствии с (2.3) и (2.4) определенная посредством (2.10) и (2.12) матрица Θ обладает асимптотиками

$$\Theta(x,\zeta) \sim -\frac{1}{2}\sigma_0\sigma S(\zeta), \text{ если } x \to -\infty, \quad \Theta(x,\zeta) \sim -\frac{1}{2}\sigma_0 S(\zeta)\sigma, \text{ если } x \to \infty. \tag{8.5}$$

Таким образом, получаем, что для описания эволюции S–матрицы оператора L, порождаемой быстро убывающими при $x \to \pm\infty$ решениями системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g', \tag{8.6}$$

где f' и g' определены согласно (8.4), необходимо использовать интеграл (8.3), который связан с интегралом $I(\zeta)$ исходной системы (1.1) простым соотношением

$$I'(\zeta) = i\zeta I(\zeta) - \frac{h_-}{2}\sigma_0\sigma S(\zeta) + \frac{h_+}{2}\sigma_0 S(\zeta)\sigma,$$

где

$$h_+ = \lim_{x\to\infty} h(x), \quad h_- = \lim_{x\to-\infty} h(x).$$

При $h_+ = h_- = c$ это соотношение принимает особенно простой вид

$$I'(\zeta) = i\zeta I(\zeta) - \frac{c}{2}\sigma_0 [\sigma, \ S(\zeta)]. \tag{8.7}$$

Для системы (5.6), т.е. при $k_0 = 0$, интеграл $I(\zeta)$ в силу последнего уравнения системы (2.11) и асимптотик (8.5) имеет вид

$$I(\zeta) = -\frac{c_0}{2}\sigma_0 [\sigma, \ S(\zeta)].$$

Отправляясь от этого равенства, мы можем с помощью соотношения (8.7) получить выражение для интеграла $I'(\zeta)$ в случае системы (8.6), если она получена из системы (5.6) согласно равенствам (8.2) и (8.4). Основанная на равенствах (8.2), (8.4) и (8.7) процедура получения уравнений вида (8.6) и соответствующих им интегралов $I'(\zeta)$ вида (8.3) может быть использована неограниченное число раз. Действительно, сравнение соотношений (8.2) и (8.4) с соотношениями (6.2) показывает, что с точностью до обозначений они совпадают. Это значит, что процесс нахождения оператора A вида (1.6) и задаваемой им с помощью (1.4) нелинейной эволюционной системы (1.8), с одной стороны, и процедура вычисления интеграла $I(\zeta)$ вида (2.32), используемого для описания порождаемой решениями системы (1.1) эволюции S–матрицы, с другой стороны, базируются на решениях одних и тех же уравнений. При этом

определяемая с помощью (8.2) функция $h(x)$ каждый раз оказывается полиномом от u, v и их производных по x, что приводит к автоматическому выполнению соотношения $h_+ = h_-$, столь необходимого для получения равенства (8.7). Таким образом, в самом методе получения оператора A содержится способ определения эволюции S–матрицы. Заметим, что указанный сейчас способ нахождения уравнения, описывающего эволюцию S–матрицы, не является единственно возможным и даже может быть не самым простым, а приведен здесь только для демонстрации связи между операторным представлением (1.4) и наличием эволюционного уравнения вида (1.5) для S–матрицы. Кроме того, необходимо отметить, что играющие важную роль в этой работе рекуррентные соотношения (4.5) и производящий оператор $\mathfrak{L}$ вида (6.7), (6.8) впервые были получены в работе [8] для решения рассмотренной там задачи. Этот факт является свидетельством фундаментальной роли этих объектов при исследовании уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Дирака.

Литература

1. P.D. Lax – Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Commun. Pure and Appl. Math., 1968, v. XXI, N5, p. 467–490.

2. В.К. Мельников – Метод обратной задачи в теории нелинейных эволюционных уравнений, ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 5, с. 1224–1272.

3. В.К. Мельников – Законы сохранения для одного класса систем нелинейных эволюционных уравнений, Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 1, с. 43–60.

4. V.K. Mel'nikov – Symmetries and conservation laws of dynamical systems, In: Twistor Geometry and Non-Linear Systems, Lecture Notes in Mathematics, 970, Springer-Verlag, 1982, p. 146–172.

5. В.К. Мельников – Об уравнениях, порождаемых операторным соотношением, Матем. сб., 1979, т. 108, №3, с. 378–392.

6. В.К. Мельников – Некоторые новые нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи, Матем. сб., 1983, т. 121, №4, с. 469–498.

7. V.K. Mel'nikov – On equations for wave interactions, Lett. Math. Phys., 1983, v. 7, N2, p. 129–136.

8. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur – The unverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems, Studies in Appl. Math., 1974, v. LIII, N4, p. 249–315.

**Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 2000 года.**