сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12995

И.Н.Силин, Е.Д.Федюнькин

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТИ

1979

P5 - 12995

И.Н.Силин, Е.Д.Федюнькин

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТИ

Силин И.Н., Федюнькин Е.Д. P5 - 12995

Итерационные методы оптимизации сети

Работа посвящена в основном решению конкретной задачи - выбору оптимальной конфигурации электрической сети. Авторы надеются, что развитый здесь подход окажется полезным и для оптимизации сетей другого типа. Один из предложенных алгоритмов /релаксационный/ пригоден для оптимизации сетей с произвольной функцией качества. Второй алгоритм /использующий разложение производящей функции Лагранжа в ряд Тейлора/ имеет высокую эффективность, но накладывает достаточно жесткие ограничения на вид функции качества. Для использования в последнем алгоритме предложен способ быстрого решения системы уравнений Кирхгофа. Попутно найден новый алгоритм решения систем уравнений в конечных разностях.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Silin I.N., Fedyun'kin E.D. P5 - 12995

Iterative Methods for the Network Optimization Problem

The paper is concerned mainly with the optimal electrical network configuration searching. The developed approach is useful for other network optimization problems too. The first algorithm proposed (relexative) is valid for the optimization of the arbitrary quality function networks. The second algorithm (which uses the Lagrangian generative function to Taylor's series expansion) is highly effective, but needs special properties for the quality function. A fast method of solving Kirchhoff's equations system is given to use in the last algorithm. A new algorithm is proposed to solve finite difference system.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

Электрическая сеть обычно представляет собой граф с отличным от нуля цикломатическим числом. В одной из вершин графа расположен источник электроэнергии, в остальных вершинах - потребители с известными характеристиками. Наличие циклов в сети позволяет дублировать на случай аварии электрические цепи, подводящие энергию важным объектам. Однако из соображений надежности во время нормальной эксплуатации сети циклы разрывают, отключая часть линий и превращая граф в дерево. Это делается для того, чтобы, в случае резкого отклонения рабочего режима сети от стационарного, через кабели, рассчитанные на малые токи, не потекли большие токи выравнивания. Требуется разорвать циклы таким образом, чтобы потери в сети при стационарном режиме ее работы были минимальными и в то же время ни в одной из линий токи не превосходили предельно допустимых значений*.

Вычисление потерь в сети, являющейся деревом, не слишком трудоемко, и поэтому для оптимизации легко может быть применен алгоритм [1] перебора всех 0-графов /деревьев/ с выбором оптимального. Ряд реальных сетей удается оптимизировать таким образом. Однако для больших сетей с большим цикломатическим числом перебор всех деревьев невозможен за доступное время /количество различных покрывающих деревьев в графе может быть величиной порядка n^{n-2}, где n - число вершин в графе/.

*Сеть с несколькими источниками может быть представлена сетью с одним фиктивным источником, соединенным фиктивными линиями с вершинами, соответствующими реальным источникам. Ограничения по току на этих линиях определяются максимальными токами, которые могут обеспечить реальные источники.

2. РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД

Простейшим методом приближенной оптимизации сети является аналог метода покоординатного спуска для минимизации непрерывных функций. Алгоритм целесообразно строить следующим образом. Выбирается некоторый набор исключенных ребер, дающий дерево /например, реальная конфигурация работающей сети или первое дерево, получающееся по алгоритму [1] /, нумеруются исключенные ребра. Далее пытаемся переместить разрез 1 во все возможные положения на графе, при которых не нарушается связность. Если есть такие положения разреза, при которых потери строго меньше, чем в исходном положении /строго меньше - иначе сходимость релаксационного процесса нельзя гарантировать/, то фиксируем разрез 1 в лучшем из таких положений. Таким же образом пытаемся переместить разрезы 2,3.... Затем снова пытаемся перемещать разрез 1 и т.д. Процесс оканчивается, если в очередной большой итерации ни один из разрезов не переместился. Разложение графа на квазициклы [1] позволяет обращаться к тесту на связность только при перемещении разреза из одного квазицикла в другой*.

Обращаем внимание на то, что попытка перемещать каждый разрез только по фиксированному циклу резко ухудшает шансы найти хорошее решение, так как при этом блокируются нетривиальные переходы с одной комбинации квазициклов на другую. К такому же блокированию может приводить и учет ограничений на токи прямо в процессе релаксаций. Выгоднее сначала найти оптимальное решение без учета ограничений. В процессе безусловной оптимизации можно отмечать деревья, удовлетворяющие ограничениям или нарушающие минимальное число ограничений, и запоминать наилучшее из них. Характеристики решения без учета ограничений полезны для анализа сети, а также в период отладки, когда правильность всех параметров сети, введенных в машину, еще не гарантирована.

Если в решении, полученном без учета ограничений, ограничения оказываются нарушенными, можно запустить релаксационный процесс как бы в обратную сторону: будем поочередно смещать разрезы $1,2...,\nu$ в положение, при котором нарушается минимальное число ограничений, а при равном числе нарушений минимальны потери. Оканчивается процесс по тому же условию, что основной алгоритм. Процесс может завершиться и с неудовлетворенными ограничениями. Аналогичный процесс можно запустить с наилучшего по ограничениям приближения, найденного при безусловной оптимизации.

*При исключении любого ребра, принадлежащего данному квазициклу, связность графа сохраняется, а при исключении пары таких ребер - нарушается.

Релаксационный метод не гарантирует сходимость к абсолютному оптимуму, хотя и дает удовлетворительные результаты в случае реальных сетей. При оптимизации непрерывных гладких функций методом покоординатного спуска процесс может медленно сходиться, если переменные сильно коррелированы, например, в случае, когда профиль функции в окрестности минимума представляет собой овраг, направление которого не совпадает с направлением ни одной из осей координат. В дискретном случае при использовании релаксационного метода процесс может сойтись даже не доходя до локального минимума. В этом легко убедиться на примере непрерывной функции двух переменных с сильными корреляциями, ограничив допустимые значения координат дискретными множествами. Если для движения к точному минимуму требуются шаги меньшие, чем это допускают множества координат, процесс сходится около оси оврага, но вдали от минимума.

Достоинство релаксационного алгоритма - в простоте реализации, минимальных запросах на память ЭВМ и, как правило, быстрой сходимости /несколько больших итераций/. Заметим, еще, что релаксационный алгоритм является, по-видимому, единственным алгоритмом, применимым к графам с функцией качества произвольного вида /она может быть даже субъективной/.

3. УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Можно ли уточнить решение, найденное релаксационным методом? Один из способов - искать минимум исходя из многих сравнительно случайных начальных приближений. При определенных свойствах функции качества возможна и регулярная процедура уточнения.

Предположим, что ребра обладают индивидуальностью, которая проявляется во всех конфигурациях исключенных ребер, в частности, существуют ребра, исключение которых при прочих равных условиях почти всегда ухудшает качество результирующего дерева. Будем называть такие ребра активными. Мы увидим в дальнейшем, что в случае электрической сети понятие активности осмысленно. Действуем следующим образом. В процессе большой итерации накапливаем число участий каждого ребра в конфигурациях исключенных ребер и сумму качеств деревьев, не содержащих это ребро. Если итерация оказалась последней /не сместились разрезы/, то вычисляем для каждого ребра среднее по этой итерации качество делением суммы качеств на число деревьев, не содержащих данное ребро. К "оптимальному" множеству исключенных ребер добавляем ребро с наименьшей активностью среди оставшихся, и на этом множестве разрешенных для исключения ребер запускаем процедуру [1] перебора всех деревьев, зафиксировав добавленное ребро как постоянно исключенное. Если при этом найдется лучшее дерево, то снова запускается релаксационный процесс, если нет, то к множеству ребер добавляется еще одно - с наименьшей активностью среди оставшихся. Теперь это ребро фиксируется как постоянно исключенное и на расширенном множестве запускается процедура перебора деревьев и т.д., пока не истечет время, выделенное на ЭВМ.

4. УСКОРЕННЫЙ ПОИСК АБСОЛЮТНОГО ОПТИМУМА

Если требуется найти абсолютно оптимальное дерево и полный перебор невозможен, нужны другие принципы. В задачах дискретной оптимизации довольно широко применяется метод ветвей и границ [2], заключающийся в том, что отбрасываются целые семейства конфигураций, если без индивидуального анализа каждого из представителей семейства можно утверждать, что все они не оптимальны. Чтобы найти подходящий критерий, необходим тщательный анализ конкретной решаемой проблемы. Нам придется заняться изучением системы уравнений Кирхгофа.

Для простоты будем сначала рассматривать сеть, в которой все токи и сопротивления вещественны /пренебрегаем индуктивными сопротивлениями и емкостными утечками/. Согласно распространенной постановке задачи токи потребителей считаются фиксированными, и, следовательно, ток источника равен сумме токов потребителей.

Система уравнений Кирхгофа для сети с циклами может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} I_j = I_i^0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \qquad /1/$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} I_j R_j = 0 ; \quad i = n, \dots, m . \qquad /2/$$

Здесь n - число вершин, m - число ребер. Коэффициенты a_{ij} равны 0, +1 или -1 в соответствии с правилами Кирхгофа. Уравнения /1/ есть уравнения в вершинах /исключая вершину источника/, I_j - неизвестный ток на ребре j, R_j - сопротивление ребра j. I_i^0 - токи потребителей. Уравнения /2/ - уравнения для независимых циклов.

Обратим внимание на тот факт, что уравнения /2/ обеспечивают минимальные потери в сети при всех возможных токах I_j, удовлетворяющих системе /1/. Это справедливо хотя бы потому, что система уравнений Кирхгофа может быть получена из условия нулевой вариации функции потерь

$$f = \sum_{j=1}^{m} I_j^2 R_j . \qquad /3/$$

Действительно, запишем полную диссипацию энергии в сети /включая потребителей и источник/ в форме производящей функции Лагранжа:

$$L = \sum_{(i,\ell) \in G} [J_{i\ell} (U_i - U_\ell + \epsilon_{i\ell}) - \frac{1}{2} J_{i\ell}^2 R_{i\ell}], \qquad /4/$$

где $J_{i\ell}$ - ток на ребре, соединяющем вершины i и ℓ. $R_{i\ell}$ - сопротивление ребра, U - потенциал в вершине i, $\epsilon_{i\ell}$ - э.д.с. на ребре, G - множество ребер полной сети. Приравнивая производные $\frac{\partial L}{\partial U_i}$ и $\frac{\partial L}{\partial J_{i\ell}}$ нулю, получим

$$\sum_j a_{ij} J_{ij} = 0 ; \quad (i, j) \in G ; \qquad /5/$$

$$U_i - U_\ell - J_{i\ell} R_{i\ell} + \epsilon_{i\ell} = 0 ; \quad (i, \ell) \in G. \qquad /6/$$

Здесь a_{ij} равны 0, +1 или -1.

Уравнения /5/ эквивалентны уравнениям /1/, если учесть, что токи потребителей включены в сумму. Из уравнений /6/ /закон Ома/ следуют уравнения для независимых циклов /2/. Подстановка из /6/ в /4/ приводит к виду, совпадающему с /3/. Учитывая, что токи потребителей фиксированы, находим, что /4/ отличается от /3/ лишь константой.

Учитывая сказанное ранее, видим, что исключение любого ребра из графа может привести только к увеличению потерь /искусственно обнуляется ток на исключенном ребре, и нарушается оптимальное распределение токов/.

Будем удалять из графа ребра по одному и, решая систему уравнений Кирхгофа, вычислять потери на частичном графе. Тогда еще до удаления всех $\nu = m - n + 1$ ребер мы можем обнаружить, что потери стали слишком велики /не меньше, чем на наилучшем из уже найденных деревьев/, и забраковать все семейство деревьев, принадлежащих данному частичному графу. Мы можем сразу исключить из рассмотрения ребра, при удалении которых по отдельности потери возрастают до уровня наилучшей известной конфигурации.

Исключение ребра с нулевым током не меняет распределения токов в сети. Исключение ребра с малым током приводит к малому возмущению в распределении токов и, следовательно, к малому возрастанию потерь. Такие ребра обладают малой средней активностью /см. раздел 3/. Особенно мала средняя активность ребер с малым током и большим сопротивлением.

Для максимального сокращения перебора метод ветвей и границ требует хорошего начального приближения, т.е. хорошей границы, чтобы отсев бесперспективных ветвей производился как можно раньше. Хорошее начальное приближение получается, если исключить в исходном ν-графе самое пассивное ребро, затем исключить самое пассивное ребро в найденном $(\nu-1)$-графе и т.д., пока не придем к дереву. Активностью ребра относительно графа G мы называем приращение потерь, возникающее при исключении этого ребра из графа G. К сожалению, последовательное исключение пассивных ребер не обеспечивает нахождения абсолютно оптимального дерева.

Как и в случае релаксационного метода, полезно сначала найти минимум потерь без учета ограничений на токи. При сильных ограничениях метод ветвей и границ приводит к слабому сокращению числа перебираемых вариантов. В какой-то степени помогает возможность отбраковки семейства деревьев, если в частичной конфигурации нарушено ограничение на ребре, ставшем перешейком.

5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

В связи со сказанным выше возникает вопрос о возможности многократного решения на современных ЭВМ системы уравнений Кирхгофа для сети с циклами. В реальных сетях бывают сотни и даже тысячи ребер. Ясно, что стандартные алгоритмы для этого непригодны, так как требуют памяти порядка m^2 слов и времени порядка m^3 операций ЭВМ для каждой индивидуальной системы.

Но известно, что при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом прогонки удается решать системы большого числа линейных уравнений со слабо заполненной, но структурно простой матрицей /3/. Система уравнений /1/, /2/ также обладает слабо заполненной матрицей. В уравнениях /1/ не более $3m$ ненулевых коэффициентов /включая свободные члены/. В уравнениях /2/ cm ненулевых коэффициентов, где c - среднее число вхождений ребра в разные независимые циклы. При выборе системы наиболее коротких независимых циклов $c<3$. Для плоских графов, которыми обычно являются

электрические сети, $c<2$. Таким образом, при удачной записи системы уравнений Кирхгофа в ней не более $6m$ ненулевых коэффициентов.

Будем использовать классический метод исключения. Возьмем некоторое уравнение, выразим какой-либо из входящих в него токов через другие токи, запомним полученное выражение, поместив его на место исходного уравнения и исключив последнее из дальнейшего рассмотрения. Подставим выражение для тока в другие уравнения. Действуя так $m-1$ раз, получим для последнего тока численное значение. Возвращаясь обратно по цепи полученных в процессе подстановки формул, мы последовательно вычислим все остальные токи. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать такую последовательность исключений переменных, при которой потребуется малая дополнительная память для записи преобразованных уравнений.

Нельзя забывать и о потерях точности. Как известно, обычно исключают переменную с максимальным /по модулю/ коэффициентом. В уравнениях вершин /1/ модули коэффициентов одинаковы, в то время как в уравнениях циклов /2/ - нет. К тому же уравнения циклов обычно длиннее. Поэтому займемся сначала уравнениями вершин. Эти уравнения составляются лишь для $n-1$ вершины /в нашем случае отсутствует уравнение вершины - источника/. Тогда каждый ток входит в два уравнения - для вершин, между которыми он течет, за исключением токов, вытекающих из источника. Такие токи входят только в одно уравнение. Выразим один из указанных токов через остальные токи. Его не нужно подставлять ни в одно из уравнений вершин, так как этот ток в другие уравнения не входит. Более того, все токи, входившие в использованное уравнение, после "подстановки" входят также не более чем в одно уравнение вершин, подлежащих рассмотрению, и у нас появляются новые кандидаты на безболезненное исключение. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность выражений для $n-1$ тока, не проводя ни одной реальной подстановки.

Из сказанного следует неожиданный вывод. Нам вообще нет необходимости выписывать систему уравнений /1/, а необходимые выражения мы можем получать по мере надобности, перемещаясь по графу сети в направлении от вершины-источника к периферии.

Далее действуем следующим образом. Берем первое уравнение цикла и последовательно подставляем в него выражения, получаемые при движении по графу. При промежуточных преобразованиях длина уравнения цикла может возрасти, но не более чем до $m+1$ члена. Однако в конечном счете она сократится по крайней мере до $\nu+1$ элемента. Выразим ток, коэффициент при котором максимален, через остальные токи. Берем следующее уравнение цикла и, вновь сканируя граф, подставляем в него все выражения из уравнений вершин, а также выражение, полученное из первого уравнения цикла. И т.д., пока не получим из последнего уравнения значение одной из переменных, а далее - см.выше.

Уравнения циклов мы также можем получать последовательно, по мере надобности, пользуясь, например, алгоритмом поиска фундаментальных циклов [2]. То есть берем некоторое дерево, полученное из графа сети исключением ν ребер. Далее поочередно добавляем к полному дереву одно из исключенных ребер, устраняем перешейки и по оставшемуся циклу составляем уравнение. Таким образом, нам потребуется память для записи треугольной матрицы порядка ν /цикломатическое число сети/ и рабочая память для записи $m+1$ члена уравнения в процессе преобразований. Учитывая, что цикломатическое число обычно не превышает нескольких десятков, обеспечить такую память не обременительно.

Для оптимизации времени работы алгоритма полезно при первом сканировании графа /для получения выражений в вершинах/ запомнить порядок использования вершин и номера выражаемых токов, чтобы в дальнейшем пользоваться этой информацией. Заметим, что при окончательном вычислении токов выражения в вершинах потребуются в обратном порядке. Для ускоренного получения уравнений вершин и уравнений циклов полезно дополнить описание графа в [1] списками ребер, инцидентных вершинам $1,\ldots,n$. Такие списки позволяют также ускорить тест на связность.

Предельная оптимизация алгоритма решения уравнений /1/, /2/ позволяет довести число необходимых операций до величины, пропорциональной произведению числа ребер, цикломатического числа и средней степени вершин, т.е. $m\nu p$.

6. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

Несмотря на предпринятые усилия, многократное решение системы уравнений Кирхгофа для большой сети кажется обременительным. Было бы хорошо аппроксимировать функцию потерь произвольного ν-графа простым выражением. При этом нам достаточно хорошей аппроксимации для всех графов с малыми потерями. Возможность такой аппроксимации совершенно не очевидна, но очень привлекательна. Нельзя ли, например, представить функцию потерь следующим образом:

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} A_{ik}x_i x_k + C, \qquad /7/$$

где A_{ik} - подбираемые коэффициенты. $x_i=1$, если ребро i исключено из сети, в противном случае $x_i=0$.

Эксперименты показали, что аппроксимация /7/ работает поразительно хорошо. К тому же, как мы выяснили ранее, можно исключить из рассмотрения все ребра, при исключении каждого из которых возникают слишком большие потери. Поэтому нам нет необходимости строить матрицу A_{ik} для полного набора ребер.

Выражение /7/ идеально как для приближенного, так и для почти точного поиска абсолютного минимума потерь. Дело в том, что на достаточно представительном наборе конфигураций исключенных ребер можно оценить точность формулы /7/ и затем использовать /7/ в методе ветвей и границ с, например, трехкратным запасом точности. Реальные же потери на незабракованных заблаговременно деревьях можно считать точно. Вычисления по формуле /7/ требуют всего порядка $\frac{k(k+1)}{2}$ операций, где k - число исключенных ребер.

Внимательный анализ системы уравнений Кирхгофа позволил объяснить хорошее качество аппроксимации. Формула /7/ напоминает обрывок ряда Тейлора. В ней отсутствуют линейные члены $A_i x_i$, но в условиях, когда множество значений x_i исчерпывается нулем и единицей, член $A_i x_i$ не отличим от члена $A_{ii}x_i^2$ и вошел в диагональные элементы матрицы A_{ik}.

Подставляя в /3/ решение системы /1/-/2/ для полной сети, имеем: $f=f^0(R_1,R_2,\ldots,R_m)$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)\equiv f^0\left(\frac{R_1}{1-x_1},\frac{R_2}{1-x_2},\ldots,\frac{R_m}{1-x_m}\right).$$

Если все $x_i=0$, то f совпадает с функцией потерь полного графа. Если некоторые x_i равны 1, то f является функцией потерь соответствующего частичного графа /исключение ребра эквивалентно уменьшению его проводимости до нуля/. Рассматривая /7/ как обрывок разложения в ряд Тейлора функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ в окрестности точки $(x_i=0;\ i=1,2,\ldots,m)$, т.е. вокруг решения для полной сети, можно ожидать хорошей аппроксимации формулой /7/, если ряд сходится при $x_i=1$ для конфигураций с ненарушенной связностью. Следовательно, необходимо, чтобы аналитическое продолжение функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ по каждой переменной не имело особенностей в комплексном круге радиуса 1 с центром в точке $x_i=0$ при условии, что связность сети не нарушается.

Комплексные проводимости при неотрицательной вещественной части являются физическими и соответствуют последовательному включению в ребро, кроме омического сопротивления, емкости или индуктивности. Решения системы /1/-/2/, а следовательно, и функции f - дробно-рациональные функции своих аргументов, поэтому и особенности могут быть только полюсами. Так как токи потребителей фиксированы, то, по крайней мере при ненулевых сопротивлениях ребер, физические решения не могут иметь бесконечных токов. При стремлении к нулю проводимостей на конфигурации исключаемых ребер, не нарушающей связности, токи на этих ребрах пропорциональны проводимостям. Так как в функцию потерь токи входят квадратично, а сопротивления лишь линейно, то и при нулевых проводимостях полюс в f отсутствует. Таким образом, полюса могут быть расположены лишь в нефизической области, при отрицательных вещественных частях проводимостей, что и гарантирует сходимость ряда Тейлора. Пробные аналитические расчеты для простых графов подтверждают, что это действительно так.

Если мы умеем решать систему /1/, /2/ для сети с циклами, то вычисление коэффициентов в /7/ тривиально.

$$C = f_{00},$$
$$A_{ii} = f_i - C, \qquad /8/$$
$$A_{ik} = f_{ik} - A_{ii} - A_{kk}.$$

Здесь f_0 - потери в полной сети, f_i - потери в сети с одним исключенным ребром i, f_{ik} - потери в сети с двумя исключенными ребрами - i и k. Коэффициенты A_{ik} для пар i,k, нарушающих связность, не определяются.

Весьма просто вычислить коэффициенты и для разложения более высокой степени, но количество коэффициентов угрожающе растет, а качественно новой информации они не несут. Квадратичное же приближение /7/ несет качественно новую информацию по сравнению с линейным - учет корреляций.

8. СЕТЬ С РЕАКТИВНОСТЬЮ

Один из подходов к анализу потерь в этом случае - размещение в середине каждого ребра с ненулевой емкостной утечкой фиктивного потребителя с чисто мнимым током и учет комплексных сопротивлений ребер. Вывод уравнений Кирхгофа из

производящей функции /4/ сохраняет силу и для реактивной сети. Условие нуля производной аналитической функции /4/ соответствует условию минимума для ее вещественной и мнимой частей по отдельности и, следовательно, - условию минимума для модуля. Таким образом, все предыдущие алгоритмы сохраняют силу, если в качестве функции эффективных потерь в сети выбрать

$$f = \left| \sum_{i=1}^{m} I_i^2 R_i \right|. \qquad /9/$$

Физически величина /9/ представляет собой средний поток энергии между сетью и ее окружением /источник и потребители/. Можно предположить, что /9/ является верхней оценкой потерь мощности, более точной, чем обычно употребляемая

$$f = \sum_{i=1}^{m} |I_i|^2 |R_i|. \qquad /10/$$

Заметим, что при выборе в качестве функции потерь /10/ или любой другой разумной функции исключаться должны пассивные ребра.

Можно представить себе функцию потерь для сети с реактивностью, такую, что при исключении некоторых ребер потери уменьшаются. Чтобы использовать для такой функции аппроксимацию /7/ в методе ветвей и границ, нужно выбрать коэффициенты A_{ik} неотрицательными, иначе формула не будет давать возрастающую оценку потерь для полной конфигурации исключенных ребер по сравнению с частичной. Точность аппроксимации, естественно, несколько уменьшится.

Наиболее точной постановкой задачи о выборе оптимальной конфигурации, по нашему мнению, является задание ЭДС источника, комплексных сопротивлений потребителей и линий, сопротивлений емкостных утечек. Нужно выбрать такую конфигурацию, при которой расход активной энергии потребителями максимален и, следовательно, потери в сети минимальны. Сопротивление потребителя вычисляется на основе измерений активной и реактивной составляющих мощности этого потребителя. При улучшении конфигурации не слишком плохой сети вариации напряжений на потребителях малы и можно пренебречь /с точки зрения оценки потерь/ соответствующими изменениями сопротивлений потребителей.

Распределение токов на дереве в этом случае можно найти без построения системы уравнений Кирхгофа. Сканируя дерево от листьев к корню, используя правила вычисления сопротивлений для цепей, составленных из параллельно и последовательно включенных сопротивлений, получим комплексные сопротивления /импедансы/ ветвей дерева, а в конечном счете - и всего дерева. Двигаясь в обратном направлении /от источника к листьям/ и применяя правило распределения токов по параллельным проводникам в пропорции, обратной сопротивлениям, найдем все комплексные токи, в том числе токи потребителей и емкостные утечки.

В случае полной сети удобно перейти от уравнений для токов к уравнениям для потенциалов. Подставим выражения токов из /6/ в уравнения вершин /5/. ЭДС источника считаем заданным. Уравнения независимых циклов, как легко заметить, вырождаются в тождества. Система уравнений Кирхгофа приобретает вид

$$\sum_{j\in V} a_{ij}\frac{U_i-U_j}{Z_{ij}}+\frac{U_i+\delta_i\epsilon}{Z_i}=0,\quad i\in V. \qquad /11/$$

Здесь Z_i - импеданс потребителя i, Z_{ij} - импеданс ребра (i,j), ϵ - ЭДС источника, величина δ_i равна нулю везде, кроме вершины-источника, на которой она равна 1. Суммирование производится по множеству V вершин графа. Каждый потенциал входит не менее чем в три уравнения соседних вершин, за исключением потенциала висячей вершины, который входит в два уравнения. Для решения системы /11/ воспользуемся процедурой, аналогичной приведенной в разделе 5.

Сначала, с целью упрощения системы, отсечем от графа все древообразные отростки, кроме простой цепи, идущей к источнику /если такая есть/, и заменим их эквивалентными потребителями. Выделим теперь в особый класс уравнения, которые мешают применению процедуры раздела 5. С выделенными уравнениями будем обращаться так же, как мы поступали с уравнениями независимых циклов. Из дальнейшего станет ясно, что подграф, образованный множеством "неособых" вершин, является деревом. В конструктивном изложении алгоритм выглядит следующим образом.

Отнесем к особому классу уравнение некоторой вершины /например, источника/ и уравнения всех смежных с ней вершин, кроме одной. В оставшейся системе уравнений потенциал "исключенной" вершины /т.е. вершины, уравнение которой исключено из системы и перенесено в особый класс/ присутствует один раз - в уравнении "неисключенной" вершины, смежной с данной. Выражаем потенциал "исключенной" вершины из указанного уравнения. Теперь потенциал вершины, уравнение которой мы только что использовали, входит в систему один раз. Последовательно выражая потенциал вершины через уравнение смежной с ней "неисключенной" вершины, мы будем двигаться по простой цепи, пока не придем к развилке. Вершины, уравнения которых мы уже использовали, также считаем "исключенными". Если есть другие ветви, открытые для движения, последовательно обрабатываем эти ветви указанным способом. Если нет ветвей, открытых для движения, переносим в особый класс уравнения всех "неисключенных" вершин, смежных вершине-развилке, за исключением одной. У нас опять появляются потенциалы, входящие в систему по одному разу, и, следовательно, открывается возможность двигаться дальше. В конце концов мы отсканируем весь граф. Продолжение процедуры описано в разделе 5. Число уравнений, перенесенных в особую группу, не превышает $\nu+1$, где ν - цикломатическое число исходной сети.

Оба алгоритма /раздел 5 и раздел 7/ основаны на общей идее. Перестановкой строк и столбцов в матрице системы добиваемся, чтобы большая часть матрицы приняла ступенчатый вид: старший ненулевой элемент очередной строки расположен правее, чем в предыдущей. Подсистема уравнений со ступенчатой матрицей просто разрешается относительно переменных с максимальными номерами в каждом из уравнений /двигаемся по матрице снизу вверх/.

Для сети с большим цикломатическим числом может оказаться выгодной процедура, которую мы собрались было использовать в разделе 5 /классический метод исключения/. Порядок подстановки должен быть определен из соображений минимизации памяти, необходимой для преобразования системы /не следует забывать и о потере точности/. Например, для решения системы разностных уравнений Лапласа в пространстве при простом послойном исключении переменных необходима память для записи не более $n(s+3)$ коэффициентов уравнений, где n - число узлов, s - максимальное число узлов в одном слое. Поскольку не возникает необходимости в многократных проходах по всем уравнениям, память может быть виртуальной. Алгоритм легко распараллеливается на много процессов. Необходимая память и время могут быть резко сокращены, если пренебрегать возникающими при подстановках членами с малыми коэффициентами.

Авторы благодарны С.С.Лебедеву и А.П.Сапожникову, которые стимулировали интерес к проблеме, М.И.Гуревичу, Л.Г.Каминскому, Е.Ю.Мазепе, И.Р.Рыбакову за полезную дискуссию. Авторы особенно признательны И.Р.Рыбакову за оригинальные терминологические идеи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазепа Е.Ю., Силин И.Н., Федюнькин Е.Д. ОИЯИ, Р5-12874, Дубна, 1979.
2. Christofides N. Graph Theory. An Algorithmic Approach. Academic Press, 1975.
   Русский перевод: Н.Кристофидес. Теория графов, алгоритмический подход. "Мир", М., 1978.
3. Гельфанд И.М., Локуциевский О.В. Метод "прогонки" для решения разностных уравнений. Дополнение 2 к книге: Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962, с.283-309.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 декабря 1979 года.