объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12993

М.Нгуен, Б.Н.Хоромский, Р.М.Ямалеев

УТОЧНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1979

Р5 - 12993

М.Нгуен, Б.Н.Хоромский, Р.М.Ямалеев

УТОЧНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

Нгуен М., Хоромский Б.Н.,
Ямалеев Р.М.

Р5 - 12993

Уточнение разностных решений задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения

Получены условия разложимости по степеням шага сетки приближенного решения задачи на собственные значения для линейного самосопряженного оператора. Результат применяется для линейного интегро-дифференциального оператора. Повышение точности решения иллюстрируется численным примером.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Nguyen M., Khoromsky B.N.,
Jamaleev R.M.

P5 - 12993

Accuracy Increasing of Difference Solutions of Eigenvalue Problem for Integro-Differential Equation

We obtained the conditions for the expansion of approximate solution of eigenvalue problem for linear operator by powers of grid's step. The result is used for linear integro-differential operator. The numerical example illustrates the increase of the solutions accuracy by means of Richardson method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Метод повышения точности приближенных решений, использующий экстраполяцию Ричардсона, показал свою эффективность во многих задачах математической физики. Много интересных приложений этого метода рассмотрено в книге /1/, где основное внимание уделяется линейным задачам. В работах /2-5/ получены разложения приближенного решения по степеням шага сетки для нелинейных уравнений. В частности, в /2/ получены условия существования такого разложения для произвольного нелинейного операторного уравнения в нормированном пространстве.

В настоящей работе изучается экстраполяция на последовательности сеток в задаче на собственные значения для линейного самосопряженного оператора. Результаты применяются к одной задаче на собственные значения для линейного интегро-дифференциального уравнения. Эффективность рассматриваемого метода иллюстрируется численными расчетами. Отметим, что метод Ричардсона в задаче Штурма-Лиувилля обосновывается в /1/.

§1

Рассмотрим задачу на собственные значения для линейного самосопряженного оператора $A=A^*$, определенного в вещественном гильбертовом пространстве H, $A \in (H \to H)$. Скалярное произведение в H обозначим через (x,y). Согласно /6/, эта задача представляет собой нелинейное уравнение

$$\phi(z) \equiv \begin{Bmatrix} Ax - \lambda x \\ (x,x)-1 \end{Bmatrix} = 0, \qquad /1/$$

где $z=(x,\lambda)$ - элемент прямой суммы $H_1 = H + R$, а ϕ отображает гильбертово пространство H_1 в H_1. Скалярное произведение в H_1 определяется формулой

$$(z_1, z_2) = (x_1, x_2) + \lambda_1 \lambda_2 .$$

Первая производная Фреше оператора /1/ определяется выражением

$$\phi'(z_0)z = \left\{ \begin{array}{c} A'x - \lambda_0 x - \lambda x_0 \\ (x_0, x) \end{array} \right\}, \quad z_0 = (x_0, \lambda_0), \qquad /2/$$

а вторая производная имеет вид

$$\phi''(z_0)(z_1, z_2) = \left\{ \begin{array}{c} -(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) \\ (x_1, x_2) \end{array} \right\}. \qquad /3/$$

Производные более высокого порядка равны нулю.

Пусть существует однократное изолированное собственное значение λ^* с собственной функцией x^*. Тогда, используя результаты[7], можно получить[8], что оператор $\phi'(z^*)$ имеет ограниченный обратный $\phi'(z^*)^{-1}$ и

$$\|\phi'(z^*)^{-1}\| \le M, \; M = \max(1, m^{-1}) \qquad /4/$$

где $m = \inf\limits_{\lambda \in \sigma(A)\, \lambda^*} |\lambda^* - \lambda|$, $\sigma(A)$ – спектр оператора A.

Пусть, аналогично[2], задана последовательность операторов P_n, проектирующих $(P_n x = x_n \in H_n, P_n(z) = (x_n, \lambda))\ H_1$ на n-мерные подпространства $X_n = H_n + R$, а уравнение /1/ заменяется конечномерной системой уравнений

$$\phi_n(z_n) \equiv \left\{ \begin{array}{c} A_n x_n - \lambda_n x_n \\ 2^{-1}(x_n, x_n)_n - 2^{-1} \end{array} \right\} = 0, \; A_n \in (H_n \to H_n), \qquad /5/$$

$$A_n = A_n^*.$$

Оператор A_n аппроксимирует A, а скалярное произведение $(.,.)$ в H_n аппроксимирует соответствующее из $H_n(.,.)$. Равенство /5/ определяет задачу на собственные значения для самосопряженной матрицы A_n.

Пусть в пространстве H, аналогично[2], заданы линейные множества $B_k \subset H$ и $B_k' \subset H$, $(k = 0,1,\ldots,N)$, так что

$$B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_N \subset H, \quad B_0' \subset B_1' \subset \ldots \subset B_N' = H, \quad x^* \in B_0.$$

Эти множества определяются классами разрешимости задачи

$$\phi'(z^*)z = f, \; f = (g, \mu), \; z = (x, \lambda),$$

если $g \in B_k'$, то $x \in B_k$, и при этом $A(B_k) \subset B_k'$.

Наша цель – получить разложение величины

$$\Delta_n = P_n z^* - z_n^* \qquad /6/$$

по степеням n^{-1}:

$$\Delta_n = P_n \left(\sum_{k=1}^{N} c_k n^{-k} \right) + \Omega_n, \; \|\Omega_n\| = o(n^{-N}), \; n \to \infty, \qquad /7/$$

где элементы $c_k \in B_k + R$ и не зависят от n. Здесь z_n^* – одно из точных решений задачи /5/.

<u>Теорема 1</u>. Пусть существует однократное изолированное собственное значение λ^* задачи /1/ с собственной функцией $x^* \in B_0$, $z^* = (x^*, \lambda^*)$ и выполнено $A_n = A_n^*$. Если для некоторого решения $z_n^* = (x_n^*, \lambda_n^*)$ задачи /5/ выполнено условие

$$\lim \|P_n z^* - z_n^*\| = 0, \; n \to \infty \qquad /8/$$

и, кроме того, для достаточно больших n

$$\|\phi_n'(P_n z^*)^{-1}\|_{X_n} \le c, \qquad /9/$$

где c не зависит от n и существуют разложения 1/, 2/:

1/ $P_n A(x) - A_n P_n x = P_n \left(\sum\limits_{k=1}^{N-P} a_k(x) n^{-k} \right) + \Omega_{n,0}$,

для $x \in B_p$, $a_k \in B_{k+p}'$, a_k не зависит от n;

2/ $(y, x) - (P_n y, P_n x)_n = \sum\limits_{k=1}^{N-p} \mu_k n^{-k} + \omega_n$

для $x \in B_p$, $y \in B_q$, $q \le p$, μ_k не зависят от n и выполнено соотношение

$$\|\Omega_{n,0}\| = o(n^{-N+p}); \; |\omega_n| = o(n^{-N+p}),$$

то имеет место представление /7/ для элемента z_n^* из /8/.

<u>Доказательство</u> является непосредственным следствием общей теоремы 1 из[2]. Условия /A/-/C/ этой теоремы очевидно выполняются. Условие /D/ легко выводится из представлений /2/ и /3/ для производных Фреше и разложений 1/, 2/ сформулированной теоремы 1.

§2

Результат теоремы 1 применим в задаче на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения

$$-y'' + q(x)y + \int_0^1 K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = \lambda y,\quad 0<x<1 \qquad /10/$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0 \qquad /11/$$

и условием нормировки

$$\int_0^1 y^2(x)\,dx = 1,\quad y'(0) > 0. \qquad /12/$$

Коэффициенты уравнения /10/ удовлетворяют условиям

$$q(x) \ge 0,\ q \in C^N[0,1],\ K(x,\xi) \in C^N(\Omega),$$
$$\Omega = [0,1]\times[0,1],\ K(x,\xi) = K(\xi,x),\ K(x,\xi) \ge 0. \qquad /13/$$

Обозначим

$$Sy = \int_0^1 K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi. \qquad /13'/$$

При сформулированных условиях оператор S ограничен в каждом из пространств $L_2[0,1]$ и $W_2^1[0,1]$ и является симметрическим $S=S^*$ и положительно определенным в $L_2[0,1]$: $(Sy,y) \ge 0$. Краевую задачу /10/-/12/ рассмотрим в пространстве $W_2^1[0,1]$, которое далее будем обозначать W_2^1. Напомним, что W_2^1 состоит из элементов L_2, имеющих квадратично суммируемую обобщенную производную первого порядка. Скалярное произведение определяется по формуле

$$(u,v)_{W_2^1} = \int_0^1 (u_x v_x + uv)\,dx.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ обозначаем, как обычно, подпространство пространства W_2^1, плотным множеством в котором являются финитные функции, равняющиеся тождественно нулю в окрестности концов отрезка $[0,1]$. Задачу /10/-/12/ сформулируем в виде нелинейного операторного уравнения /1/, определенного в пространстве $H_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^1 + R$. Для этого перейдем к обобщенному решению задачи /10/-/12/. Согласно, например [9], назовем обобщенным решением из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ задачи /10/-/12/ функцию $y(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, удовлетворяющую тождеству

$$\mathfrak{L}(y,\eta) \equiv \int_0^1 (y_x \eta_x + qy\eta + Sy\cdot\eta)\,dx = \lambda \int_0^1 y\eta\,dx \qquad /14/$$

при любой $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ и удовлетворяющих условию /12/. Очевидно, что всякое решение /10/-/12/ удовлетворяет /14/. При условиях на гладкость функций q и $K(x,\xi)$, сформулированных выше, справедливо и обратное утверждение. Это можно доказать по схеме, рассмотренной в [9] или в [6].

Далее, аналогично [9], введем в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ новое скалярное произведение

$$[y,v] = \int_0^1 (y\ v + qyv + Sy\cdot v)\,dx,\quad \|y\|_1^2 = [y,y], \qquad /15/$$

которое определяет эквивалентную прежней норму $\|\cdot\|_1$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. Запишем /14/ в виде

$$[y,\eta] = \lambda(y,\eta). \qquad /16/$$

Учитывая оценку $|(y,\eta)| \le c\|y\|_1\|\eta\|_1$ и теорему Ф.Рисса, равенство /16/ представим в виде

$$[y,\eta] = \lambda[Ay,\eta],\quad \forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1, \qquad /17/$$

причем A есть ограниченный линейный, самосопряженный оператор $A \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1 \to \overset{\circ}{W}{}_2^1)$. Аналогично [9], можно показать, что A есть вполне непрерывный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. Так как /17/ справедливо для $\forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, то оно эквивалентно операторному уравнению

$$Ay - \lambda^{-1}y = 0 \qquad /18/$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, которое вместе с условием /12/ приводит к уравнению типа /1/, где $H_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^1 + R$. Существование изолированных собственных чисел задачи /18/ теперь следует из общей теоремы для вполне непрерывного оператора. Здесь, очевидно, несущественно, что норма /12/ не совпадает с величиной $\|y\|_1^2$, так как /12/ эквивалентно $\|y\|_1^2 = (\lambda^*)^{-1}$.

Сформулируем теперь конечномерную задачу типа /5/, аппроксимирующую уравнение /18/, /12/. На отрезке $[0,1]$ построим равномерную сетку $\bar\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,n,\ x_0 = 0,\ x_n = 1\}$, $h = n^{-1}$. Используем стандартные обозначения [10] для разностных производных и различных скалярных произведений и норм сеточных функций

$$y_x = (y_{i+1} - y_i)\,h^{-1}\,; \quad y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})\,h^{-1}\,;$$

$$(y,v) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i h, \quad (y,v] = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i h, \quad [y,v) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i v_i h,$$

$$[y,v] = \sum_{i=0}^{n} y_i v_i h\,; \quad \|y\|^2 = [y,y], \quad \|y\|_+^2 = [y_x, y_x],$$

$$\|y\|_{+1}^2 = \|y\|_+^2 + \|y\|_+^2 .$$

Гильбертово пространство сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}_h$ со скалярным произведением $[y,v]$, обозначим через B, а в случае $\|\cdot\|_{+1}$ – через B_{+1}. Полагаем $y_0 = y_n = 0$ в B и B_{+1}.

Аппроксимируем интегральный оператор Sy с помощью квадратурной формулы трапеций

$$S_n y = \sum_{i=1}^{n-1} K(x,\xi_i)\,y_i h + \frac{1}{2}(K(x,0)\,y_0 + K(x,1)\,y_n)\,h, \qquad /19/$$

$$x \in \bar{\omega}_h,$$

а скалярное произведение из /12/ заменим на величину $[y,\eta]$. Очевидно, что S_n задается самосопряженной, положительно определенной в B матрицей. Сеточную функцию y и число λ_n назовем, аналогично [10], решением разностной схемы для задачи /14/, если для всякой сеточной функции $\eta \in B$ справедливо тождество

$$\mathcal{L}_n(y,\eta) \equiv \frac{1}{2}((y_{\bar{x}}, \eta_{\bar{x}}] + [y_{\bar{x}}, \eta_{\bar{x}})) + [qy,\eta] + $$
$$+ [S_n y, \eta] = \lambda_n [y, \eta], \qquad /20/$$

с условием нормировки

$$(y,y)_n = [y,y] = 1, \quad y(x) > 0. \qquad /21/$$

Аналогично формуле /15/, введем в B_{+1} эквивалентную перенормировку с помощью скалярного произведения

$$[y,v]_1 = \frac{1}{2}[y_x, v_x) + [qy,v] + [S_n y, v] + \frac{1}{2}(y_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}].$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и разностный аналог теоремы вложения [10] $\|y\|^2 \le \frac{1}{8}\|y_{\bar{x}}\|^2$, $\|y^2\| \le \frac{1}{8}\|y_x\|^2$,

легко получить оценку

$$|[y,\eta]| \le c\,\|y\|_1 \cdot \|\eta\|_1 .$$

Используя теорему Ф.Рисса, равенства /20/, /21/ можно теперь переписать в виде

$$[y,\eta]_1 = \lambda_n [A_n y, \eta]_1\,; \quad [y,y] - 1 = 0, \quad \eta \in B_{+1}, \qquad /22/$$

где $A_n = A_n^*$ и $A_n \ge \alpha E,\ \alpha > 0$. Таким образом /20/, /21/ можно представить в виде /5/:

$$A_n y = \lambda_n^{-1} y, \quad [y,y] - 1 = 0. \qquad /23/$$

Чтобы получить явный вид уравнения /23/, в точке x_i достаточно подставить в /20/ вместо η сеточный аналог δ-функции, сосредоточенной в точке x_i:

$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = x, \\ 0, & x \ne x, \end{cases}$$

$$A_n y \equiv -[y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}]\,h^{-2} + q_i y_i + [S_n y]_i = \lambda_n y_i, \qquad /24/$$

$$(i = 1, \dots, n-1), \quad y_0 = y_n = 0.$$

Проверим, далее, условие теоремы 1 для задач /18/, /23/.

Пусть λ^*, x^* – решение задачи /18/, /12/, где λ^* – однократное собственное значение. Условие нормировки /21/ получается из /12/ с помощью квадратурной формулы трапеций, а согласно [11], при условии $f(x) \in C^{2p}[0,1]$ имеет место разложение

$$\frac{h}{2}[f(0) + f(1)] + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,h =$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^{2k}(-1)^{k}\bar{B}_k}{(2k)!} \int_0^1 f^{2k}(x)\,dx + o(h^{2p}), \qquad /25/$$

где $\bar{B}_k$ – числа Бернулли.

Учитывая /25/ и гладкость ядра $K(x,\xi)$, легко получить, что для $f(x) \in C^{2p}[0,1]$ справедливо разложение

$$S_n f - P_n S f = P_n\Big(\sum_{k=1}^{p} h^{2k} \frac{(-1)}{(2k)!} \bar{B}_k \int_0^1 [K(x,\xi) f(\xi)]_{\xi}^{(2k)} d\xi\Big) + o(h^{2p}) . \quad /26/$$

Определим пространства B_k и B'_k следующим образом: $B_k = C^{N-k}[0,1]$, $B'_k = C^{N-k-2}[0,1]$. Тогда, учитывая выражение /24/ для оператора A_n и разложения /25/, /26/, легко получаем разложения 1/, 2/ теоремы 1, причем только по четным степеням h.

Проверим условие /9/. С помощью тождества /20/ легко получить явный вид производной Фреше $\phi'_n(P_n z^*)$ оператора $\phi_n(z_n)$; если $z_n = (y, \lambda_n), y \in B_{+1}$, а $z^* = (x^*, \lambda^*)$, то

$$\phi'_n(P_n z^*) z = \begin{cases} -[y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}]h^{-2} + q_i y_i + [S_n y]_i - \lambda^* y_i - \lambda_n x_i^* \\ \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \\ y_0 = y_n = 0, \\ (P_n x^*, y). \end{cases} \quad /27/$$

Докажем сначала, что $\phi'_n(P_n z^*)^{-1}$ существует при достаточно больших n, т.е. уравнение $\phi'_n(p_n z^*) z = 0$ имеет только нулевое решение. Пусть это не так, и для всех n существует сеточная функция y и число λ_n, являющееся решением системы

$$\begin{cases} -[y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}]h^{-2} + q_i y_i + [S_n y]_i - \lambda^* y_i - \lambda_n x_n^* = 0, \\ \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \\ y_0 = y_n = 0, \\ (P_n x^*, y) = 0, \quad (y, y) = 1. \end{cases} \quad /28/$$

Умножая первое равенство /28/ скалярно на y, получим

$$\frac{1}{2} \| y_{\bar{x}} \|^2 + ((P_n q + \delta S_n) y, y) - \frac{1}{2} \| y_{\bar{x}} \|^2 = \lambda^*,$$

т.е. $\| y_{\bar{x}} \|^2 \le \lambda^*$. Рассмотрим кусочно-линейное восполнение функции y, которое обозначим через $\bar{y}(x)$. Так как $\|\bar{y}(x)\|_{W_2^1} \le \lambda^*$,

то $\bar{y}(x) \to \bar{y}_0(x)$ при $n \to \infty$ в метрике C, откуда следует, что $(\bar{y}_0(x), x^*) = 0$, а $(\bar{y}_0(x), \bar{y}_0(x)) = 1$. Кроме того, равенство $(y, y) = 1$ означает

$$[A\bar{y}, \bar{y}] = [A_n y, y] = 1, \quad [y, y] = \lambda^*,$$

а значит, учитывая, что оператор A вполне непрерывен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, получаем, что $\bar{y}(x) \to \bar{y}_0(x)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. Таким образом, существует обобщенное решение $\bar{y}_0(x)$ /в нашем случае оно удовлетворяет и /10/-/12// следующей задачи

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = \lambda^* A \bar{y}_0 \\ (x^*, \bar{y}_0) = 0, \quad (\bar{y}_0, \bar{y}_0) = 1, \end{cases}$$

что противоречит однократности собственного числа λ^*.

Установим, далее, оценку /9/. Рассмотрим равенство

$$\phi'_n(P\ z^*) z = c; \quad z = (\lambda_n, y), \quad c = (\mu, \omega), \qquad /29/$$
$$\|\omega\|_{B+1} + \mu^2 = 1.$$

В силу предыдущих рассуждений существует единственное решение z этого уравнения. Представим его в виде $z = v + \beta P_n x^*$, где $(v, P_n x^*) = 0$. Пусть $\omega = \omega_1 + \alpha P x^*$, где $(\omega_1, P_n x^*) = 0$. Тогда, учитывая условия аппроксимации 1/, 2/ из теоремы 1, равенство /29/ перепишем в виде

$$\begin{cases} -[v_{i+1} + 2v_i - v_{i-1}]h^{-2} + q_i v_i + [S_n v]_i - \lambda^* v_i - \lambda_n x_i^* + \\ \qquad + \beta(\epsilon_i + \delta x_i^*) = \omega_1 + \alpha x_i^*, \\ (i = 1, \ldots, n-1); \quad v_0 = v_n = 0, \\ \beta(P_n x^*, P_n x^*) = \mu, \end{cases} \quad /30/$$

где $(\epsilon, P_n x^*) = 0$, $\|\epsilon\|_{+1} = o(h^2)$, $|\delta| = o(h^2)$, $n \to \infty$. При этом $\beta = \mu + o(h^2)$, $n \to \infty$. Умножим первое уравнение системы /30/ на $P_n x^*$. Получим равенство

$$(A_n v, P_n x^*) - \lambda^*(v, P_n x^*) - \lambda_n (P_n x^*, P_n x^*) + \beta\delta(P_n x^*) P_n x^*) =$$
$$= \alpha (P_n x^*, P_n x^*),$$

которое можно переписать в виде

$$(v, \epsilon + \delta P_n n^*) - \lambda_n(1 + o(h^2)) + \mu o(h^2) = \alpha + o(h^2).$$

Для λ_n находим выражение

$$-\lambda_n = \alpha - (v, \epsilon) + o(h^2), \quad n \to \infty,$$

с учетом которого уравнение для функции v приобретает вид

$$A_n v - \lambda^* v - (v, \epsilon) P_n x^* = \omega_1 - \beta(\epsilon + \delta P_n x^*). \qquad /31/$$

Предположим, что для некоторых $c = (\mu, \omega)$ для решения этого уравнения выполнено $\|v\|_{+1} \to \infty, n \to \infty$. Поделив обе части равенства /31/ на $\|v\|_{+1}$ и умножив затем это уравнение на $\frac{v}{\|v\|_{+1}} = u$, получим равенство

$$(A_n u, u) = \lambda^*(u, u) + ((\omega_1 - \beta\epsilon)\|v\|_{+1}^{-1}, u),$$

из которого, рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что кусочно-линейное восполнение функции u сходится к функции $\bar{u}_0$ в метрике $C[0,1]$, и для предельной функции выполнены соотношения $(\bar{u}_0, x^*) = 0$, $\|\bar{u}_0\|_1 = 1$. Указанная сходимость имеет место и в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, что означает разрешимость системы $\bar{u}_0 = \lambda^* A \bar{u}_0$, $(\bar{u}_0, x^*) = 0$, $\|\bar{u}_0\|_1 = 1$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. А это противоречит однократности собственного числа λ^*. Условие /9/ теоремы 1 проверено.

Докажем, что выполнено условие /8/, т.е. при достаточно больших n существует решение $(\lambda_n^*, y_n^*) = z_n^*$ задачи на собственные значения /23/, такое, что

$$\|P_n z^* - z_n^*\|_1 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Существование искомого решения уравнения /24/, имеющего вид /5/, $\phi_n(z_n) = 0$, установим с помощью метода Ньютона. В качестве начального приближения возьмем элемент $z_n^\circ = (\lambda^*, P_n x^*)$. Согласно условию аппроксимации 1/ и условию /9/, выполнены оценки

$$\|\phi_n(z_n^\circ)\|_1 \le ch^2, \quad \|\phi_n'(z_n^\circ)^{-1}\|_1 \le c_1.$$

Вспоминая, что вторая производная Фреше оператора ϕ_n имеет вид /3/ и потому равномерно ограничена $\|\phi_n''\|_1 \le 1$, можно заключить, что при условии $\epsilon = ch^2 \cdot c_1 < 2^{-1}$ метод Ньютона-Канторовича сходится к точному решению $z_n^* = (\lambda_n^*, y_n^*)$ уравнения /24/ от начального приближения z_n° /12/. При этом имеет место оценка

$$\|z_n^* - z_n^\circ\|_1 \le (1 - \sqrt{1 - 2\epsilon})\epsilon^{-1} c_1 c h^2 \le M h^2,$$

означающая справедливость /8/. В результате доказана следующая

Теорема 2. Пусть λ^* есть однократное собственное значение задачи /10/-/12/ при условии /13/, а x^* - соответствующая ему собственная функция. Тогда существует такое n_0, что при всяком $n \ge n_0$ найдется решение (λ_n^*, y_n^*) разностной задачи /24/ с нормировкой /21/, для которого справедливы разложения

$$\lambda_n^* = \lambda^* + \sum_{k=1}^{\ell} h^{2k} \mu_k + \rho_n, \quad |\rho_n| = o(h^{2\ell}), \qquad /32/$$

$$y_n^* = P_n x^* + P_n\left(\sum_{k=1}^{\ell} h^{2k} v_k(x)\right) + \omega_n, \quad \|\omega_n\|_{+1} = o(h^N), \qquad /33/$$

где

$$v_k(x) \in C^{N-2k+2}[0,1], \quad \ell = [N/2],$$

а функции $v_k(x)$ и коэффициенты μ_k не зависят от n.

Разложения /32/, /33/ можно непосредственно использовать для уточнения приближенных решений λ_n^*, y_n^* на последовательности сеток. Кроме этого, из /32/, /33/ сразу получается, что решение разностной задачи /24/ отличается от соответствующего точного решения /10/-/12/ $(\lambda^*, P_n x^*)$ на величину $o(h^2)$ в метрике $\|\cdot\|_{+1}$, а также и в равномерной метрике, так как $\|y\|_c \le c\|y_{\bar{x}}\|$ /10/. Аналогичный результат для задачи Штурма-Лиувилля получен в /13/.

Замечание 1. Если λ^* является n-м по счету собственным числом задачи /10/-/12/, то при $n \ge n_0$ соответствующее ему решение λ_n^* также будет n-м собственным числом задачи /24/.

Это утверждение легко следует из вариационного принципа с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы 2.

Замечание 2. Вместо пространства сеточных функций можно использовать другую конструкцию оператора проектирования P_n, например, с помощью метода конечных элементов. Тогда можно получить разложения типа /32/, /33/ для других разностных схем, аппроксимирующих задачу /10/-/12/.

§3

Проиллюстрируем возможности использования разложений /32/, /33/ числовым примером. Рассмотрим задачу нахождения собственных чисел и собственных векторов

$$y'' - \lambda y + \int_0^R K(x,t)\, y(t)\, dt = 0, \quad 0 < x < R,$$

$$K(x,t) = [e^{-ax-bt}][1 - e^{-ax}]^{-1}, \qquad /34/$$

$$y(0) = 0, \quad y' + F(x) y|_{x=R} = 0,$$

$$F(x) = \lambda - e^{-ax}[1 - e^{-ax}]^{-1}.$$

Решением этой задачи при $a = 0{,}5$; $b = -0{,}57$ является $\lambda = 1$, $y = e^{-x}(1 - e^{-ax})$.

Задача /34/ решалась при $R = 40$. На отрезке $[0,R]$ строились сетки $\bar{\omega}_n$ для значений $n = k$, $n = 2k$, $n = 4k$, где $k = 20$, а $h = Rn^{-1}$.

В табл. 1 приведены собственные значения и собственные функции при разных сетках. В табл. 2 приведены результаты уточнения решений λ и y по двум и трем сеткам. Уточненные собственные значения вычислялись согласно /32/, /33/ по формулам

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}\lambda_k + \frac{4}{3}\lambda_{2k},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{45}\lambda_k - \frac{4}{9}\lambda_{2k} + \frac{64}{45}\lambda_{4k}.$$

Аналогичные комбинации составлялись и для собственных функций на пересечении всех используемых сеток.

Таблица 1

Собственные значения и собственные функции при разных сетках

n	20	40	80
λ	0,911	0,9339	0,9747
y(2)	0,1251	0,9379	0,8736

n - количество точек сетки, λ - собственное значение, y(2) - значения функции при $x = 2{,}0$.

Отметим, что алгоритм уточнения для задачи Штурма-Лиувилля реализован в [14].

Таблица 2

Уточненные собственные значения и собственные функции

ℓ	1	2	n = 140	Точное значение
λ	0,9458	0,9945	0,9914	1,00
y(2)	0,8337	0,8541	0,8612	0,8554

ℓ - количество сеток, по которым проведено уточнение.

Авторы выражают благодарность проф. Е.П.Жидкову за поддержку и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
2. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12979, Дубна, 1979.
3. Урванцев А.Л., Шайдуров В.В. В сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976.
4. Жидков Е.П., Айрян Э. ОИЯИ, Р5-12709, Дубна, 1979.
5. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12916, Дубна, 1979.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. "Наука", М., 1965.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. "Мир", М., 1972.
8. Гареев Ф.А. и др. ЖВМ и МФ, 1977, 17, №2, с.407-419; ОИЯИ, Р4-8751, Дубна, 1975.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. "Наука", М., 1973.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
11. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. "Наука", М., 1977.
13. Самарский А.А. ЖВМ и МФ, 1963, 3, №3, с.431-466; Тихонов А.Н., Самарский А.А. ЖВМ и МФ, 1961, 1, №5, с.784-805.
14. Краснов С.А. ОИЯИ, Б1-11-12508, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1979 года.