сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



Р5 - 12979

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

# УТОЧНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1979

Жидков Е.П., Нгуен М.,
Хоромский Б.Н.

Р5 - 12979

Уточнение приближенных решений нелинейных операторных уравнений

Экстраполяционный метод Ричардсона повышения точности приближенных решений обобщается для нелинейных операторных уравнений в нормированном пространстве. Получены разложения решения по степеням малого параметра. Рассмотрен случай сильно монотонных операторов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zhidkov E.P., Nguyen M.,
Khoromsky B.N.

P5 - 12979

Increasing of Accuracy of Approximate Solutions of Nonlinear Operator Equations

Richardson's extrapolation method for increasing the accuracy of approximate solutions is generalized for the nonlinear operator equations in normed space. The expansion of solution by powers of small parameter is obtained and the case of strongly monotonic operators is also considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979



Одним из методов повышения точности приближенного решения является экстраполяционный метод Ричардсона, использующий решения на последовательности сеток. Возможности применения этого метода для линейных дифференциальных уравнений рассмотрены в /1,2/, где можно найти подробные ссылки. В /1/ метод Ричардсона применяется к широкому кругу задач математической физики. Там, в частности, рассмотрено одномерное квазилинейное уравнение второго порядка. В работе /3/ проводится уточнение решения одного квазилинейного эллиптического уравнения в трехмерной области.

В настоящей заметке алгоритм типа Ричардсона обобщается для нелинейных операторных уравнений общего вида. Формулируются условия существования разложения по малому параметру. Отдельно рассмотрен случай сильно монотонных операторов. Построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации для нелинейного операторного уравнения.

## §1

Рассмотрим вопрос о приближенном решении уравнения

$$Au = y, \quad u \in X, \quad y \in Y, \qquad /1.1/$$

где нелинейный оператор $A$ действует из $B$ - пространства $X$ в $B$-пространство $Y$. Пусть задана последовательность операторов $P_n$ и $Q_n$, проектирующих $X$ и $Y$ на $n$-мерные подпространства $X_n$ и $Y_n$, а уравнению /1.1/ соответствует следующее уравнение для приближенного решения

$$A_n u_n = Q_n y, \quad A_n : X_n \to Y_n. \qquad /1.2/$$

Оператор $A_n$ аппроксимирует $A$. При этом последовательность задач типа /1.2/ соответствует какому-либо разностному или проекционному методу решения уравнения /1.1/. Обозначим через $u^*$ и $u_n^*$ решения уравнений /1.1/, /1.2/ соответственно.

Пусть в пространствах $X$ и $Y$ заданы линейные множества $B_k \subset X$ и $B'_k \subset Y$, $k=0,1,\dots,N$, так что $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_N = X$,

$B'_0 \subset B'_1 \subset \dots \subset B'_N = Y$. Эти множества определяются классами разрешимости задачи /1.1/: если для $y \in B'_k$ существует решение $u^*$ уравнения /1.1/, то $u^* \subset B_k$, и, кроме того, $A(B_k) \subset B'_k$. Аналогичные соотношения справедливы для производных Фреше порядка $\ell\,(\ell=1,\dots,N)$ оператора $A$: если $v_{k_i} \in B_{k_i}$ $(i=1,\dots,\ell)$, то

$$A^{(\ell)}(u^*)(v_{k_1},\dots,v_{k_\ell}) \in B'_{k_m}, \quad k_m = \max_{1 \le i \le \ell} k_i .$$

Наша цель - получить разложение величины

$$\Delta_n = P_n u^* - u^*_n \qquad /1.3/$$

по степеням $n^{-1}$:

$$\Delta_n = P_n\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k n^{-k}\Big) + \Omega_n, \quad \|\Omega_n\| = o(n^{-N}), \qquad /1.4/$$

где элементы $c_k \in X$ зависят только от $u^*$ и не зависят от $n$. При этом разложение /1.4/ связано с последовательностью множеств $B_k \subset X$:

$$c_k \in B_k \subset B_{k+1} \subset \dots \subset B_N = X, \quad (k=1,\dots,N); \; u^* \in B_0 .$$

Относительно операторов $A$ и $A_n$ предположим следующие свойства:

/A/ Уравнения /1.1/ и /1.2/ имеют решения $u^* \in B_0 \subset X$, $u^*_n \in X_n$, и выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n u^* - u^*_n\| = 0 . \qquad /1.5/$$

/B/ Операторы $A$ и $A_n$ имеют равномерно непрерывные производные Фреше до порядка $N$ в окрестностях $S_R = \{x : \|x - u^*\| \le R\}$ и $S^n_R = \{x_n : \|x_n - P_n u^*\| \le R\}$ соответственно, так что $\|A^{(k)}(u^*)\| \le M$, $\|A^{(k)}_n(P_n u^*)\| < M$, $k < N$, и для операторов $A'(u^*)$, $A'_n(P_n u^*)$ существуют ограниченные обратные

$$\|A'(u^*)^{-1}\| \le M_1, \; \|A'_n(P_n u^*)^{-1}\| \le M_1 ,$$

и из равенства

$$A'(u^*)v = g, \; g \in B'_k$$

следует, что $v \in B_k$.



/C/ Справедливо разложение

$$Q_n A u^* = A_n P_n u^* + Q_n\Big(\sum_{k=1}^{N} a_k(u^*) n^{-k}\Big) + \Omega_{n,0}, \qquad /1.6/$$

где элементы $a_k \in B'_k$, $(k=1,\dots,N)$ определяются через $u^*$ и не зависят от $n$. Величина $\Omega_{n,0}$ удовлетворяет соотношению

$$\|\Omega_{n,0}\| = o(n^{-N}), \quad n \to \infty .$$

/D/ Для производных $A^{(\ell)}_n(P_n u^*)$ и $A^{(\ell)}(u^*)$, $(\ell=1,\dots,N)$ при заданных $v_{k_1},\dots,v_{k_\ell}$, $v_{k_i} \in B_{k_i}$, $(i=1,\dots,N)$ справедливо представление

$$Q_n A^{(\ell)}(u^*)(v_{k_1},\dots,v_{k_\ell}) - A^{(\ell)}_n(P_n u^*)(P_n v_{k_1},\dots,P_n v_{k_\ell}) =$$
$$= Q_n\Big(\sum_{|\alpha|=1}^{\beta_\ell} A_{\alpha,\ell}(v_{k_1},\dots,v_{k_\ell}) n^{-|\alpha|}\Big) + \Omega_{n,\alpha_\ell}(v_{k_1},\dots,v_{k_\ell}), \qquad /1.7/$$

$$\|\Omega_{n,\alpha_\ell}\| = o(n^{\|\alpha_\ell\| - N}), \; + n \to \infty .$$

Здесь $\alpha$ - мультииндекс, т.е. $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_\ell)$; $\alpha_\ell = (k_1,\dots,k_\ell)$, $\beta_\ell = (N-k_1,\dots,N-k_\ell)$, а равенство двух индексов рассматривается покомпонентно. При этом $|\alpha| = i_1 + \dots + i_\ell$, а $\|\alpha\| = \max_{1 \le p \le \ell} |i_p|$.

Ограниченные полулинейные формы определены следующим образом:

$$A_{\alpha,\ell} : (B_{k_1} \times \dots \times B_{k_\ell}) \to B'_{\|\alpha+\alpha_\ell\|}$$

и не зависят от $n$. В частности, при $\ell = 1$ и $v \in B_k$, $(k=1,\dots,N)$ разложение /1.7/ имеет вид:

$$Q_n A'(u^*)v - A'_n(P_n u^*) P_n v = Q_n\Big(\sum_{i=1}^{N-k} A_{i,1}(u^*) v n^{-i}\Big) + \Omega_{n,1},$$

$$\|\Omega_{n,1}\| = o(n^{-N+k}), \quad n \to \infty, \qquad /1.8/$$

где непрерывные линейные операторы $A_{i,1}$ действуют из $B_k$ в $B'_{k+i}$ и не зависят от $n$ и $v$.

Разложение вида /1.4/ устанавливает

Теорема 1. Пусть для уравнений /1.1/, /1.2/ выполнены условия /A/-/D/. Тогда для решения $u^*_n$ уравнения /1.2/ справедливо разложение

$$u^*_n - P_n u^* = P_n\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k(u^*) n^{-k}\Big) + \Omega_n, \qquad /1.9/$$

$$\|\Omega_n\| = o(n^{-N}), \quad n \to \infty,$$

где элементы $c_k(u^*) \in B_k \subset \dots \subset B_N = X$, $(k = 1, \dots, N)$ и не зависят от $n$.

Доказательство. Вычитая из равенства

$$Q_n A u^* = Q_n y$$

уравнение /2/, получим соотношение

$$Q_n A u^* = A_n u^*_n, \qquad /1.10/$$

которое, учитывая условие /C/, перепишем в виде

$$A_n P_n u^* - A_n u^*_n = Q_n\Big(\sum_{k=1}^{N} a_k(u^*) n^{-k}\Big) + \Omega_{n,0}. \qquad /1.11/$$

Используя условие /B/ и аналог формулы Тейлора для операторов в B-пространстве /4/, получим уравнение для $\Delta_n$ из /1.3/:

$$A'(P_n u^*)\Delta_n + \sum_{\ell=2}^{N} \frac{1}{\ell!} A_n^{(\ell)}(P_n u^*)(\underbrace{\Delta_n, \dots, \Delta_n}_{\ell}) + \omega(P_n u^*, \Delta_n) = \qquad /1.12/$$

$$= Q_n\Big(\sum_{k=1}^{N} a_k n^{-k}\Big) + \Omega_{n,0},$$

$$\|\omega(P_n u^*, \Delta_n)\| = o(\|\Delta_n\|^N).$$

Нетрудно убедиться, что отображения $\omega(P_n u^*, \Delta_n)$ и $A_n^{(\ell)}(P_n u^*)(\Delta_n, \dots, \Delta_n)$, $(\ell = 1, \dots, N)$ являются сжимающими при достаточно малых $\Delta_n$, а потому уравнение /1.12/ имеет единственное решение в малой окрестности нуля. Докажем, что для этого решения справедливо разложение /1.9/. Заменим слагаемые в левой части /1.12/ разложением из условия /1.9/ и используем условие /D/:

$$Q_n\Big(A'(u^*) \sum_{k=1}^{N} c_k n^{-k} - \sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N-k} A_{i,1}(u^*) c_k n^{-i}\Big) n^{-k} +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{N} \frac{1}{\ell!}\Big\{A^{(\ell)}(u^*)\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k n^{-k}\Big)^{\ell} - \sum_{a_\ell} \sum_{|a|=1}^{\beta_\ell} A_{a,\ell}(c_{k_1}, \dots, c_{k_\ell}) \times$$



$$\times n^{-(|a| + |a_\ell|)}\Big\}\Big) + \sum_{a_\ell} \Omega_{n,a_\ell}(c_{k_1} n^{-k_1}, \dots, c_{k_\ell} n^{-k_\ell}) +$$

$$+ \omega(P_n u^*)\Delta_n) + A'_n(P_n u^*)\Omega_n + n^{-1} G(c_1, \dots, c_N)\,\Omega_n + F(\Omega_n) = \qquad /1.13/$$

$$= Q\Big(\sum_{k=1}^{N} a_k n^{-k}\Big) + \Omega_{n,0}.$$

Здесь $G(c_1, \dots, c_N)$ - ограниченный линейный оператор, а отображение $F(\Omega_n)$ является сжимающим в малой окрестности нуля. Отображение

$$H(\Omega_n) = \omega(P_n u^*, \Delta_n) = \omega\Big(P_n u^*, \sum_{k=1}^{N} c_k n^{-k} + \Omega_n\Big)$$

также является сжимающим. Элементы $\Omega_{n,a_\ell}$ определяются из /1.7/ и линейны по каждому аргументу относительно умножения на число, а потому, согласно /1.7/, $\|\Omega_{n,a_\ell}\| = o(n^{-N-1})$.

Коэффициенты $c_k$, $(k=1, \dots, N)$ теперь определим из системы уравнений

$$A'(u^*) c_1 = a_1,$$

$$A'(u^*) c_2 + A_{1,1}(u^*) c_1 + \frac{1}{2} A''(u^*)(c_1, c_1) = a_2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A'(u^*) c_m + \sum_{i+k=m} A_{i,1}(u^*) c_k + \qquad /1.14/$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!}\Big\{\sum_{|a_\ell|=m} A^{(\ell)}(u^*)(c_{k_1}, \dots, c_{k_\ell}) - \sum_{|a+a_\ell|=m} A_{a,\ell}(c_{k_1}, \dots, c_{k_\ell})\Big\} = a_m$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$(m = 1, \dots, N)$.

Эта система однозначно разрешима в силу условия /B/. Вложение $c_k \in B_k$ следует из условий /C/, /D/ и определения множеств $B_k$ и $B'_k$: поскольку в уравнении для $c_m$ все элементы принадлежат $B'_m$ /здесь нужно учесть неравенство $\|a\| < |a|$ /, то $c_m \in B_m$.

Подставляя решения /1.14/ в равенство /1.13/, получим уравнение для величины $\Omega_n$

$$A'_n(P_n u^*)\Omega_n + n^{-1} G(c_1, \dots, c_m)\,\Omega_n + F(\Omega_n) = o(n^{-N}). \qquad /1.15/$$

Поскольку оператор $A'_n(P_n u^*)$ имеет ограниченный обратный $A'^{-1}_n$, а два других оператора в левой части являются сжимающими при больших n, то уравнение /1.15/ однозначно разрешимо в малой окрестности нуля, а для его решения, учитывая соотношение $F(0)=0$, легко получить оценку

$$\|\Omega_n\| \le c(u^*)\, o(n^{-N}),$$

которая и доказывает теорему.

## §2

В работах /1,3,5/ обосновано применение метода Ричардсона для квазилинейных эллиптических уравнений, удовлетворяющих условию сильной монотонности. В этом случае можно использовать теорему 1. Напомним, что отображение $A: X \to X^*$ называется сильно монотонным /6/, если

$$\langle A(x+h) - A(x), h\rangle \ge \|h\|\,\gamma(\|h\|), \qquad /2.1/$$

для любых $x, h \in D(A)$, где $\gamma(t)$ - вещественная неотрицательная функция при $t \ge 0$; $\gamma(t) \to \infty$, $t \to \infty$ и из $\gamma(0)=0$ следует $t=0$. Здесь $\langle y, h\rangle$ - значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на векторе $h \in X$.

Теорема 2. Пусть отображения $A: X \to X^*$ и $A_n: X_n \to X_n^* = X_n$ удовлетворяют условию сильной монотонности /2.1/ с функцией $\gamma(t) = ct$, $c > 0$, и N раз равномерно непрерывно дифференцируемы по Фреше в окрестностях точек $u^*$ и $P_n u^*$. Если при этом выполнены условия /C/ и /D/, то справедливо разложение /1.9/.

Доказательство. Так как $A: X \to X^*$, то можно положить $P_n = Q_n$, а $Y_n = X_n$. Проверим выполнение условий /A/ и /B/ теоремы 1. Условие /A/ следует из общих теорем о монотонных операторах /6/, а соотношение /1.5/ легко получить из /1.11/. Из неравенства /2.1/ следует, что производные $A'(u^*)$ и $A_n'(P_n u^*)$ являются сильно положительными /6/, т.е.

$$\langle A'(u^*)h, h\rangle \ge c\|h\|^2, \quad \forall h \in X. \qquad /2.2/$$

Действительно, в силу разложения

$$A(x+h) - A(x) = A'(x)h + \omega(x,h), \quad \|\omega\| = o(\|h\|)$$

и условия /2.1/ получаем

$$\langle A'(x)h, h\rangle \ge (c + o(1))\|h\|^2, \qquad /\text{при } \|h\| \to 0\,/$$

откуда следует условие /2.2/, означающее ограниченность



$A'(u^*)^{-1}$. Существование $A'(u^*)^{-1}$ следует из разрешимости уравнения

$$A'(u^*)h \equiv A(u^*+h) - A(u^*) + \omega(u^*,h) = y, \; y \in X^* \qquad /2.3/$$

для любой правой части. Действительно, оператор

$$P(h) = A(u^*+h) - A(u^*)$$

имеет ограниченный обратный $P^{-1}$, $\|P^{-1}\| \le c^{-1}$ в силу /2.1/. Поэтому /2.3/ можно переписать в виде

$$h + P^{-1} w(u^*,h) = P^{-1}y. \qquad /2.4/$$

Из /2.3/ следует, что $\|y\| \ge c\|h\|$, поэтому для элемента y, достаточно малого по норме, уравнение /2.4/ однозначно разрешимо, так как оператор $P^{-1}\omega(u^*,h)$ является сжимающим при малых h. Действительно,

$$\|\omega(u^*,h+\Delta) - \omega(u^*,\Delta)\| = \|A'(u^*+h)\Delta - A'(u^*)\Delta + o(\Delta)\| \le q\|\Delta\|,$$

где $c^{-1}q < 1$, а из /16/ следует, что

$$\|P^{-1}(\xi+\Delta) - P^{-1}(\xi)\| \le \frac{1}{c}\|\Delta\|.$$

В силу линейности уравнение /2.3/ разрешимо для любого $y \in X^*$. Аналогично устанавливается свойство /B/ и для $A_n'(P_n u^*)$, после чего применяется теорема 1. Теорема 2 доказана.

Уточнение решений $u_n^*$ на множестве $\cap X_{n_i} = U_N$, $i \le N$ с помощью разложения /1.9/ проводится аналогично /1/. Если

$$\bar{u}_n = \sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i u_{n_i}^*, \quad \sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i n_i^m = 0, \quad (m = 1,\dots,N), \qquad /2.5/$$

то справедлива оценка

$$\|P_n u^* - \bar{u}_n\| = o(n^{-N}).$$

Если $X_m$ и $X_n$ при некоторых m и n не пересекаются, то следует провести интерполяцию с одного пространства на другое с сохранением требуемой точности. При этом построение сеточной области можно рассматривать как выбор некоторых $X_n$

и $P_n$. Следует отметить, что если в разложениях из условий /С/ и /D/ присутствуют лишь четные степени $n^{-1}$, то разложение /1.9/ будет также по четным степеням.

Покажем далее, как с помощью разложения /1.6/ можно получить уравнение для приближенного решения $u_n^*$, имеющее повышенный порядок аппроксимации. При этом возникает новый вопрос о разрешимости такого уравнения и о методе его решения.

Метод построения уравнений повышенного порядка аппроксимации, основанный на использовании разностных формул для старших производных, рассматривался в [7] для уравнения Лапласа.

Для простоты рассмотрим схему повышенного порядка аппроксимации, составленную при помощи уравнений типа /1.2/, рассматриваемых на подпространствах лишь двух различных размерностей. Пусть определены подпространства $X_n$, $V_n$, $X_{2n}$, так что $X_n + V_n = X_{2n}$, а для соответствующих проекторов $P_n + G_n = P_{2n}$. Пусть $A: X \to X^*$, тогда можно положить

$$P_n = Q_n, P_{2n} = Q_{2n}, \; G_n = U_n : X^* \to V_n^* = V_n .$$

Предложение 1. Пусть справедливо разложение /1.6/ для $P_n$, $G_n$, $P_{2n}$ при $N=1$, а числа $\alpha_1, \alpha_2$ определены из системы

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \; \alpha_1 n^{-1} + \alpha_2 (2n)^{-1} = 0.$$

Тогда уравнение

$$\alpha_1(A_n P_n \bar{u}_{2n} + A_n G_n \bar{u}_{2n}) + \alpha_2 A_{2n} \bar{u}_{2n} = P_{2n} y \qquad /2.6/$$

аппроксимирует /1.1/ с точностью $\Omega_{n,0}$, т.е.

$$\|P_{2n} A u^* - \alpha_1 (A_n P_n u^* + A_n G_n \bar{u}_{2n}) - \alpha_2 A_{2n} P_{2n} u^*\| \le c\Omega_{n,0} . \qquad /2.7/$$

Оценка /2.7/ легко получается из /1.6/. Если при этом оператор в левой части /2.6/ является сильно монотонным, то из /1.7/ следует также оценка

$$\|P_{2n} u^* - \bar{u}_{2n}\| \le c(u^*)\Omega_{n,0} .$$

Уравнение /2.6/, аналогично [7], можно решать, например, итерационным методом

$$\alpha_1 (A_n P_n \bar{u}_{2n}^{k-1} + A_n G_n \bar{u}_{2n}^{k-1} - A_{2n} \bar{u}_{2n}^{k-1}) + A_{2n} \bar{u}_{2n}^{k} = P_{2n} y ,$$

где $\bar{u}_{2n}^{\circ} = 0$. Легко видеть, что в этом случае схема Ричардсона будет более экономичной при численной реализации.



В заключение отметим, что утверждения §§1,2 можно использовать для уточнения приближенных решений широкого круга нелинейных задач. Так, например, необходимое для уточнения разложение по степеням шага сетки $h$, полученное в [8] для системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений Лоу [9], можно получить из теоремы 1. Разложения, полученные для квазилинейных эллиптических уравнений в работах [1,5] при тех же условиях, которые там предполагаются, можно вывести из теоремы 2.

Если предположить линейность отображений $A$ и $A_n$, то утверждение теоремы 1 близко к соответствующему результату из [1] для линейных дифференциальных операторов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
3. Жидков Е.П., Айрян Э. ОИЯИ, Р5-12709, Дубна, 1979.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. "Наука", М., 1976.
5. Урванцев А.Л., Шайдуров В.В. Уточнение приближенного решения квазилинейного уравнения Пуассона. - В сб.: "Вариационно-разностные методы в математической физике". Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976.
6. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. "Наука", М., 1972.
7. Волков Е.А. "Дифференциальные уравнения", 1965, 1, №7, с.946-960; №8, с.1070-1084.
8. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12247, Дубна, 1979.
9. Жидков Е.П. и др. ЖВМ и МФ, 1979, 19, №4, с.998-1014.


Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1979 года.