сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12938

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

1979

P5 - 12938

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

(I);

(I), (II);

(I), (II), (III);

(I), (II), (III), (IV), (V);

(I), (II), (III), (IV), (V), (VI);

(IV), (V);

(IV), (V), (VI);

(VI).

В соответствии с этим абелевы группы можно разделить на восемь непересекающихся классов, если поставить в соответствие каждой такой комбинации типов образующих все абелевы группы, в которых реализуется только она:

D(100000) – (I);

D(110000) – (I), (II);

D(111000) – (I), (II), (III);

D(111110) – (I), (II), (III), (IV), (V);

D(111111) – (I), (II), (III), (IV), (V), (VI);

D(000110) – (IV), (V);

D(000111) – (IV), (V), (VI);

D(000001) – (VI).

В.Длабом установлено, что класс D(100000) состоит только из нулевой группы, класс D(110000) - из одной группы C(2), а класс D(000001) состоит из всех полных ненулевых /т.е. делимых/ абелевых групп. Он описал все примарные группы класса

D(111000). Известно, что все абелевы группы с конечным числом образующих, кроме нулевой группы и группы C(2), содержатся в классе D(111000), в частности, все свободные группы конечного ранга принадлежат этому классу. В работе /5/ мы показали, что если абелева группа без кручения принадлежит классу D(111000), то она является свободной группой конечного ранга. Отсюда и из сказанного выше вытекает, что это все группы без кручения конечного ранга класса D(111000). Таким образом, нам остается изучить распределение абелевых групп без кручения конечного ранга по классам D(111110), D(111111), D(000110), D(000111).

Символ "$\subset$" мы будем употреблять для обозначения строгого вложения подмножеств, в отличие от "$\subsetneq$". Множество, состоящее из элементов g_λ, $\lambda \in \Lambda$, будем обозначать через

$[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$,

а разность некоторого множества D и одноэлементного множества g - через $D \setminus g$.

Для обозначения прямой суммы групп мы употребляем знаки "+" и "Σ". В остальном придерживаемся обозначений, принятых в работах /1,2/.

1.3. Определения

Пусть D -система образующих некоторой абелевой группы $G(G=\{D\})$.

Определение 1. D - неприводима, если соотношение

$$g \in \{D \setminus g\} \qquad /*/$$

не выполняется ни для одного элемента $g \in D$. В противном случае D - приводима.

Определение 2. D - сильно приводима, если соотношение /*/ выполняется для любого элемента $g \in D$.

Определение 3. D - наследственно приводима, если приводима всякая подсистема $D' \subsetneq D$, порождающая $G=\{D\}$.

Определение 4. D - наследственно сильно приводима, если сильно приводима всякая подсистема $D' \subsetneq D$, порождающая $G=\{D\}$.

Далее под группами, если не оговорено противное, мы будем подразумевать абелевы группы без кручения конечного ранга. Пусть G - такая группа. Условимся через M обозначать некоторую ее максимальную линейно независимую подсистему. В соответствии с этим мы будем часто употреблять обозначение $G/\{M\}$.

Абелевы группы без кручения конечного ранга, не являющиеся ни свободными, ни полными, будем разделять на два типа - тип α) и тип β).

Определение 5. Будем считать, что группа G типа α), если редуцированная часть $G/\{M\}$ конечна.

Определение 6. Будем считать, что группа G типа β), если редуцированная часть $G/\{M\}$ бесконечна.

Замечание. Корректность определений 5 и 6 очевидна. Если G - группа типа α), то система M может быть выбрана так, чтобы фактор-группа $G/\{M\}$ была полной периодической. Теперь мы можем перейти к основной части работы.

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ СИСТЕМ ОБРАЗУЮЩИХ ТИПА (VI) У ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

2.1. Приведем утверждения, которые вытекают из результатов, полученных нами ранее.

Теорема 1. Любая группа типа β) имеет систему образующих типа (VI).

Действительно, любая такая группа /в силу определения 6/ обладает фактор-группой типа

$$\sum_{i=1}^{\infty} C(p_i^{k_i}), \quad \text{где} \quad 0<k_i<\infty, \quad \text{а}$$

p_i - различные простые числа. Поэтому она удовлетворяет условию теоремы 2 работы /8/ и, следовательно, обладает системой образующих типа (VI).

Теорема 2. Если для группы G типа α) ранг полной части $G/\{M\}$ больше или равен $r(G)$, то группа G обладает системой образующих типа (VI). Это утверждение вытекает из теоремы 1 работы /8/.

2.2. Мы попадаем в новую ситуацию при рассмотрении групп типа α), у которых ранг полной части $G/\{M\}$ меньше $r(G)$. Здесь справедлива следующая

Теорема 3. Если для группы G типа α) ранг полной части $G/\{M\}$ меньше $r(G)$, то группа G не обладает системами образующих типа (VI). Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, рассмотрим еще два утверждения.

Теорема 4. Если периодическая абелева группа A имеет вид

$$A=A_1+A_2,$$

где $0\neq A_1$ - конечная, а A_2 - полная группа и

$$r(A_2)<m(A_1)$$

/здесь для всякой конечной абелевой группы B под $m(B)$ мы подразумеваем $\max\{r_p(B_p)\}$, где B_p - примарные компоненты B /, то группа ^pA не обладает системой образующих типа /см. теорему 15 работы /6/ /.

Теорема 5. Если/произвольная/абелева группа G обладает системой образующих типа (VI) и $\emptyset\neq K$ - некоторое конечное подмножество G, то фактор-группа $G/\{K\}$ обладает системой образующих типа (VI).

Доказательство. Пусть группа $G=\{D\}$ и $D=[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ - система образующих типа (VI), $K\subset G$, $1\leq|K|<\infty$. Предположим, что группа $\bar{G}=G/\{K\}$ не обладает системой образующих типа (VI) $(G/\{K\}\neq 0)$. Тогда множество $\bar{D}=[\bar{g}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ $(\bar{g}_\lambda=g_\lambda+\{K\},\ \lambda\in\Lambda)$ - не наследственно сильно приводимая система образующих группы G. Следовательно, в $\bar{D}$ есть не сильно приводимая подсистема $\bar{D}_1=[\bar{g}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1}$, $\{\bar{D}_1\}=\bar{G}$. Поэтому в D подсистема $D_1=[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1}$ тоже не сильно приводима, а так как D - система образующих типа (VI), то

$$\{D_1\}\subsetneq\{D\}=G.$$

Группа G равна $\{D_1,K\}$. Следовательно, $G/\{D_1\}$ - группа с конечным числом образующих $(G/\{D_1\}\neq 0$, так как $\{D_1\}\subset G)$ и не может обладать системой образующих типа (VI) /все такие группы содержатся в $D(110000)$, $D(111000)$/. Однако, с другой стороны, группа $G/\{D_1\}$ должна обладать системой образующих типа (VI), как фактор-группа $\{D\}/\{D_1\}$ с $D_1\subset D$, $\{D_1\}\subset\{D\}$, где D - система образующих типа (VI) /см. лемму 2 работы /6/ /. Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно. Таким образом, утверждение теоремы справедливо.

Доказательство теоремы 3

Можно считать, что $G/\{M\}$ - полная периодическая группа ранга меньшего, чем $r(G)$. Пусть

$$G/\{M\}\cong\sum_{i=1}^{k}C(p_i^{\infty}), \quad (0<k<r(G))$$

и p - простое число, отличное от всех $p_i\ (i=1,\dots,k)$. Тогда фактор-группа

$$G/\{pM\}\cong\sum_{i=1}^{n}C_i(p)+\sum_{i=1}^{k}C(p_i^{\infty}),$$

где $n = r(G) > k$. В силу теоремы 4 группа $G/\{M\}$ не обладает системой образующих типа (VI). Но так как $0 < |pM| < \infty$, то, допустив, что группа G обладает системой образующих типа (VI), мы пришли бы к противоречию в силу теоремы 5. Следовательно, у группы G нет систем образующих типа (VI). Итак, утверждение теоремы 3 доказано.

Теперь мы выяснили вопрос о существовании систем образующих типа (VI) для рассматриваемых в настоящей работе групп.

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПРИВОДИМЫХ СИСТЕМ ОБРАЗУЮЩИХ /ТИП /1//

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Если/произвольная/абелева группа G является расширением группы с конечным числом образующих с помощью полной группы, то она не обладает неприводимой системой образующих /см. [9,10]/.

Лемма 2. Если/произвольная/счетная абелева группа имеет фактор-группу, изоморфную

$$\sum_{i=1}^{\infty} C(p_i^{k_i}),$$

где $0 < k_i < \infty$, p_i - различные простые числа, то группа обладает неприводимой системой образующих /см. теорему 1 работы [9]/.

Теперь мы можем перейти к вопросу о распределении групп рассматриваемого типа по классам Длаба.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУПП ТИПА α)

4.1. Класс D(111110) не содержит групп типа α), так как такие группы не обладают системами образующих типа (I) в силу леммы 1 /см. п.3/.

4.2. Класс D(111111) не содержит групп типа α) по тем же причинам, что и класс D(111110).

4.3. Класс D(000110) содержит группу G типа α) тогда и только тогда, когда ранг полной части $G/\{M\}$ /см. п.1.3/ меньше $r(G)$. Действительно, группы типа α) не обладают системами образующих типа (I) в силу леммы 1 /см. п.3/.

При указанном выше условии группа G не обладает системой образующих типа (VI) в силу теоремы 3 /см. п.2.2/. Поэтому она принадлежит классу D(000110) /см. п.1.2/.

С другой стороны, если группа G типа α) принадлежит к D(000110), то ранг полной части $G/\{M\}$ меньше $r(G)$. Иначе группа G обладала бы системой образующих типа (VI) в силу теоремы 2 /см. п.2.1/.

Пример. Неразложимая группа G без кручения ранга 2 и типа 0, приведенная в работе [11], принадлежит классу D(000110), так как она является расширением свободной группы ранга 2 с помощью группы типа $C(2^{\infty})$ /очевидно, что G - группа типа α) /.

4.4. Класс D(000111) содержит группу G типа α) тогда и только тогда, когда ранг полной части $G/\{M\}$ больше или равен $r(G)$.

Действительно, группы типа α) не обладают системами образующих типа (I) в силу леммы 1 /см. п.3/. Если группа G удовлетворяет нашему условию, то она обладает системой образующих типа (VI) по теореме 2 /см. п.2.1/ и, следовательно, принадлежит классу D(000111), так как не является полной группой.

С другой стороны, если группа G типа α) содержится в классе D(000111), то ранг полной части $G/\{M\}$ больше или равен $r(G)$. Иначе группа G не обладала бы системой образующих типа (VI) в силу теоремы 3 /см. п.2.2/.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУПП ТИПА β)

Все группы типа β) содержатся в классе D(111111).

Действительно, всякая группа G типа β) в силу определения 6 /см. п.1.3/ имеет фактор-группу, изоморфную

$$\sum_{i=1}^{\infty} C(p_i^{k_i}), \quad \text{где } 0 < k_i < \infty, \quad \text{а}$$

p_i - различные простые числа. Поэтому она обладает системой образующих типа (I) в силу леммы 2 /см. п.3/. Далее, группа G обладает системой образующих типа (VI) по теореме 1 /см. п.2.1/. Следовательно, группа G содержится в классе D(111111).

Замечание. Теперь видно, что каждый из классов D(111000), D(111111), D(000111), D(000001), D(000110) содержит абелеву группу без кручения конечного ранга. Класс D(111110) не содержит ни одной такой группы.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А.П.Мишиной и В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, А.В.Матвеенко - за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Теория групп. "Наука", М., 1967.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т.1. "Мир", М., 1974; том 2, "Мир", М., 1977.
3. Длаб В. "Чехословацкий математический журнал, 1958, 8 /83/, с.54-61.
4. Длаб В. Чехословацкий математический журнал, 1959, 9/84/, с.161-169.
5. Лебеденко В.М. Сибирский математический журнал, 1970, XI, №6, с.1417-1418. ВИНИТИ, 1971, №1499-70 ДЕП.
6. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-7344, Дубна, 1973.
7. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-7817, Дубна, 1974.
8. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-10682, Дубна, 1977.
9. Сойфер А.Ю. Сибирский математический журнал, 1971, том XII , №3, с.648-659.
10. Сойфер А.Ю. Сибирский математический журнал, 1974, том XV, №1, с.120-152.
11. Pontryagin L. Ann. of Math., 1934, 35, p.361-388.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 1979 года.