сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1076/2-80

18/3-80

P5 - 12925

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков

СВОЙСТВА ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1979

Р5 - 12925

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков

СВОЙСТВА ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

P5 - 12925

Амирханов И.В., Жидков Е.П.

Свойства частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля

Проведено исследование нелинейного уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+1\right)\phi(x) = -\frac{\phi^{k+1}(x)}{x^{k-1}} \qquad /1/$$

при граничных условиях

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0. \qquad /2/$$

В настоящей работе рассматриваются любые натуральные значения параметров ℓ. С помощью вариационного подхода доказана следующая основная теорема: для любого

$$k = \frac{2p+1}{2q+1} \qquad /p \text{ и } q\text{–натуральные числа}/$$

при выполнении условия $1<k<5$ существуют решения $\phi(x)=\phi_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ задачи (1)–(2), имеющие точно n нулей в интервале $0<x<\infty$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P5 - 12925

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P.

Properties of Particle-Like Solutions of Nonlinear Equation of Scalar Field

The nonlinear equation

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+1\right)\phi(x) = -\frac{\phi^{k+1}(x)}{x^{k-1}} \qquad /1/$$

is investigated under boundary conditions

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0. \qquad /2/$$

Arbitrary integer conditions of ℓ parameters are considered. By means of variational approach the following basic theorem is proved. For any

$$k = \frac{2p+1}{2q+1} \qquad (p \text{ and } q \text{ arbitrary integer values})$$

at the condition $1<k<5$ solutions of (1)–(2) problems exist which have n zeros on the interval $0<x<\infty$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В последнее время большое внимание уделяется вопросам существования и исследованию свойств частицеподобных решений нелинейных задач, возникающих в теории элементарных частиц [I,2]. Например, в простейшей модели скалярного поля задача сводится к исследованию существования частицеподобных решений следующего нелинейного уравнения:

$$\ddot{\varphi}(x) - Q_\ell(x)\,\varphi(x) = -\frac{\varphi^k(x)}{x^{k-1}} \tag{I}$$

при граничных условиях:

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0\ , \tag{2}$$

где $$\ddot{\varphi}(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\,,\quad Q_\ell(x) = 1 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,,\quad \ell = 0,1,2,\ldots$$

$$\varphi(\infty) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

Уравнение (I) при $\ell = 0$ ранее исследовалось в работах [2-4].

В работе [5] проведено исследование этого уравнения при любых натуральных значениях параметра ℓ. В ней с помощью вариационного подхода, который является дальнейшим развитием метода Нехари [3], доказана следующая

Теорема I. При выполнении условия

$$1 < k < 5$$

существует положительное частицеподобное решение $\varphi(x)$ задачи (I)-(2).

Дальнейшие исследования уравнения (I) проведены в работах [6,7], где доказаны теоремы об отсутствии положительного частицеподобного решения краевой задачи (I)-(2) при $0 < k \le 1$ и при $k \ge 5$.

В данной работе для любых натуральных значений параметра ℓ доказана следующая

<u>Теорема 2</u>. Для любого

$$k = \frac{2p+1}{2q+1} \qquad (p \text{ и } q \text{ - натуральные числа}) \qquad (3)$$

при выполнении условия

$$1 < k < 5$$

существуют решения $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ задачи (I)-(2), имеющие точно n нулей в интервале $0 < x < \infty$.

Доказательство теоремы 2 проведено с помощью вариационного подхода, развитого в работах Нехари /3,8/.

Доказательство разбито на несколько этапов. В первом разделе сформулирована соответствующая вариационная задача (см. (I.I)-(I.2)) в интервале $0 \le x < \infty$. Затем решение этой вариационной задачи $y(x)$ связывается с решением $y_j(x)$ вспомогательной вариационной задачи (см.(I.5)-(I.6)) в промежутках $x_j \le x \le x_{j+1}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, где $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$. Во втором разделе установлено три свойства функционала, определенного в $[x_j, x_{j+1}]$. С помощью этих свойств доказано, что исходный функционал достигает минимума при некотором разбиении $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ интервала $(0, \infty)$. В третьем разделе установлена непрерывность первых производных $y_j(x)$ в точках $\bar{x}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ и завершается доказательство теоремы 2.

I. Сформулируем соответствующую вариационную задачу /5/. Ищется минимум функционала

$$J(y) = \int_0^\infty [\dot{y}^2(t) + Q_\ell(t) y^2(t)]\, dt \qquad (I.I)$$

при нормировочном условии

$$K(y) = \int_0^\infty \frac{y^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\, dt = B, \qquad (I.2)$$

B - фиксированное число из промежутка $0 < B < \infty$.

Вариационную задачу (I.I)-(I.2) будем рассматривать в классе функций $Y(0,\infty)$, определяемых следующими условиями:

а) $y(x)$ непрерывны в $[0,\infty]$ и имеет в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot{y}(x)$;

б) $J(y) < \infty$;

в) $K(y) = \mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ - произвольное число из промежутка $0 < \mathcal{D} < \infty$;

г) $Y(0) = Y(\infty) = 0$;

д) $Y(x)$ имеет n $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ нулей в интервале $(0, \infty)$.

Под решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) будем понимать функцию $y(x) \in Y(0, \infty)$, доставляющую минимум функционалу (I.I).

В дальнейшем будет показано, что решение вариационной задачи (I.I)-(I.2) является и решением задачи (I)-(2).

Доказательство существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) проведем в несколько этапов.

Рассмотрим некоторое разбиение интервала $(0, \infty)$ точками $x_1, x_2, \dots, x_n$, где $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$. Учитывая это разбиение, вариационную задачу (I.I)-(I.2) перепишем так:

$$\mathcal{J}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y) = \sum_{j=0}^{n} \mathcal{J}_j \quad , \tag{I.3}$$

$$K(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \quad , \tag{I.4}$$

где

$$\mathcal{J}_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\dot{y}_j(t) + Q_\ell(t) y_j^2(t) \right] dt \quad , \tag{I.5}$$

$$\beta_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{y_j^{k+1}(t)}{t^{k-1}} \, dt \quad . \tag{I.6}$$

Далее для любого промежутка $x_j \le x \le x_{j+1}$ рассмотрим существование знакоопределенных решений вариационной задачи (I.5)-(I.6) в классе функций $Y_j(x_j, x_{j+1})$, определяемых следующими условиями:

а) $y_j(x)$ непрерывна в $[x_j, x_{j+1}]$ и имеет в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot{y}_j(x)$;

б) $y(x_j) = y(x_{j+1}) = 0$;

в) $\mathcal{J}_j < \infty$;

г) $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{y_j^{k+1}(t)}{t^{k-1}} dt = \beta_j$, где β_j - произвольное, отличное от нуля вещественное число.

Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в работе[5], можно убедиться, что для любого промежутка $x_j \le x \le x_{j+1}$ существует в классе функций $Y_j(x_j, x_{j+1})$ знакоопределенное решение y_j вариационной задачи (I.5)-(I.6), причем функция y_j является решением следующей краевой задачи:

$$\ddot{y}_j(x) - Q_\ell(x)\, y_j(x) = -\frac{\lambda_j}{\beta_j}\, \frac{y_j^k(x)}{x^{k-1}} \tag{I.7}$$

при $\quad x_j \le x \le x_{j+1}$,

$$y_j(x_j) = y_j(x_{j+1}) = 0 \quad , \tag{I.8}$$

где λ_j - точная нижняя грань функционала $\mathcal{J}_j$ в классе функций $Y_j^d(x_j, x_{j+1})$ при условии нормировки (I.6).

Если для любого $x_j \le x \le x_{j+1}$ нормировочные постоянные β_j взять из условия $\beta_j = \lambda_j$, то уравнения (I.7) и (I) совпадут. Это означает, что для любого $x_j \le x \le x_{j+1}$ функция y_j является нетривиальным безузловым решением уравнения (I) при граничных условиях (I.8), причем условие нормировки можно записать в виде

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [\dot{y}_j^2(t) + Q_\ell(t)\, y_j^2(t)]\,dt = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{y_j^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\,dt. \tag{I.9}$$

Итак, в каждом промежутке $x_j \le x \le x_{j+1}$ существует нетривиальное безузловое решение уравнения (I) при граничных условиях (I.8), удовлетворяющее условию нормировки (I.9).

Каждому значению $\mathcal{J}(y) = \mathcal{J}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y)$ при фиксированном разбиении интервала $(0, \infty)$ соответствует кривая $y(x)$, составленная из $y_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \dots, n)$. Поскольку уравнение (I) при рассматриваемых k (см.(3)) от смены знака $y(x)$ не зависит, можно построить кривую так, что $y_j(x)$ и $y_{j+1}(x)$ имеют разные знаки. Покажем, что функция $\mathcal{J}(x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}, y)$ достигает минимума при некотором разбиении $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ интервала $(0, \infty)$ при соблюдении нормировки (I.9) в каждом промежутке $[x_j, x_{j+1}]$. Существование такого разбиения является следствием следующих трех свойств[8,9] $\mathcal{J}_j = \mathcal{J}_j(x_j, x_{j+1}, y_j)$.

2. Лемма I.

а) Если $x_j \le \hat{x}_j < \hat{x}_{j+1} \le x_{j+1}$, то
$\mathcal{J}_j(x_j, x_{j+1}, y_j) \le \mathcal{J}_j(\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}, \hat{y}_j)$;

б) $\mathcal{J}_j(x_j, x_{j+1}, y_j) \to \infty$, если $(x_{j+1} - x_j) \to 0$;

в) $\mathcal{J}_j(x_j, x_{j+1}, y_j)$ – непрерывная функция от x_j, x_{j+1}.

Докажем первое утверждение леммы I. Пусть функция $\hat{y}_j$ является нетривиальным решением вариационной задачи для интервала $[\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}]$ при нормировочном условии (I.9). Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} U(x) = \hat{y}_j(x), & \text{при} \quad [\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}], \\ U(x) \equiv 0, & \text{при} \quad x_j \le x < \hat{x}_j \quad \text{и} \quad \hat{x}_{j+1} < x \le x_{j+1}. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\mathcal{J}_j(x_j, x_{j+1}, y_j) \le \mathcal{J}_j(x_j, x_{j+1}, U) = \mathcal{J}_j(\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}, \hat{y}_j). \tag{2.I}$$

Доказательство второго утверждения леммы I проведем лишь для двух интервалов: $[0, x_1]$ и $[x_n, \infty]$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Если $0 \le x < x_1$, то, используя оценку /3/

$$y_0^2(x) \le x\,\mathcal{J}_0 \tag{2.2}$$

и условие (I.9), имеем

$$1 \le \mathcal{J}_0^{\frac{k-1}{2}}\, x_1^{\frac{5-k}{2}} \qquad \text{при} \qquad k < 5. \tag{2.3}$$

Отсюда, если $x_1 \to 0$, то при $1 < k < 5$ получаем $\mathcal{J}_0 \to \infty$.

Аналогично при $x_n \le x < \infty$, используя оценку /3/

$$y_n^2(x) \le \mathcal{J}_n \tag{2.4}$$

и условие (I.9), имеем

$$1 \le \mathcal{J}_n^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{1}{x_n^{k-1}}, \qquad \text{где} \qquad k > 1. \tag{2.5}$$

Отсюда, если $x_n \to \infty$, то при $1 < k < 5$ получаем $\mathcal{J}_n \to \infty$.

Итак, для $1 < k < 5$ доказано второе утверждение леммы I.

Покажем, что $\mathfrak{I}_j(x_j, x_{j+1}, y_j)$ – непрерывная функция от x_j и x_{j+1}. Доказательство проведем для интервала $0 \leq x < x_1$. Другие возможные случаи $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ и $x_n \leq x < \infty$ доказываются аналогично.

Пусть функции $\hat{y}_0(x)$ и $y_0(x)$ являются решениями вариационной задачи соответственно в промежутках $0 \leq x \leq \hat{x}$ и $0 \leq x \leq x_1$, причем $0 < \hat{x} \leq x_1$. Положим $\xi = \frac{x_1}{\hat{x}} \geq 1$. Определим функцию $u(x) = \alpha y_0(\xi x)$ в промежутке $0 \leq x \leq \hat{x}$, причем $u(0) = u(\hat{x}) = 0$. Постоянную α выберем так, чтобы функция $u(x)$ удовлетворяла условию (I.9) в этом промежутке. Так как функция $y_0(x)$ является решением вариационной задачи и удовлетворяет условию нормировки (I.9) в промежутке $0 \leq x \leq x_1$, то при $\hat{x} \to x_1$ имеем $\alpha \to 1$. Функция $u(x)$ является допустимой функцией для вариационной задачи в промежутке $0 \leq x \leq \hat{x}$, поэтому

$$\mathfrak{I}_0(0, \hat{x}, \hat{y}_0) \leq \mathfrak{I}_0(0, \hat{x}, u) = \alpha^2 \int_0^{\hat{x}} [\dot{y}_0^2(\xi x) + Q_\ell y^2(\xi x)]\, dx .$$

Переходя в последнем интеграле к новым переменным интегрирования $\xi x = t$ и учитывая $\alpha \to 1$ при $\hat{x} \to x_1$, получим

$$\mathfrak{I}_0(0, \hat{x}, \hat{y}_0) \leq \mathfrak{I}_0(0, x_1, y_1) + \gamma , \qquad (2.6)$$

где $\gamma \geq 0$ и $\lim\limits_{\hat{x} \to x_1} \gamma \to 0$.

Из (2.6) и свойства (а) леммы I следует непрерывная зависимость $\mathfrak{I}_0(0, x_1, y_1)$ от x_1. Это и завершает доказательство леммы I.

Теперь будем минимизировать функционал $\mathfrak{I}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y)$ в интервале $[0, \infty]$ при соблюдении нормировки (I.9) в каждом промежутке $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. Минимизация ведется путем вариации точек x_j $(j = 1, 2, \dots n)$. Учитывая три свойства $\mathfrak{I}_j$, доказанные в лемме I, убедимся, что функция $\mathfrak{I}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y)$ достигает минимума при некотором разбиении $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ интервала $[0, \infty]$.

В самом деле, согласно свойству (б), величины x_j должны быть отделены друг от друга, т.е. $(x_{j+1} - x_j) \geq \varepsilon$, где ε – достаточно маленькое фиксированное число, кроме того $x_n \leq T$, где T – достаточно большое фиксированное число. Поэтому переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ изменяются в замкнутой ограниченной области, причем из свойства (в) леммы I видно, что в этой области функционал $J(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y)$ - непрерывная функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда существует ограниченная последовательность точек

$$\{x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}\} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

минимизирующая функционал $J(x_0, x_{1m}, \ldots x_{nm}, x_{n+1}, y)$ в интервале $[0, \infty]$ при соблюдении нормировки (I.9) в каждом промежутке $x_j \le x \le x_{j+1}$. Из нее можно извлечь подпоследовательность

$$\{x_{1\bar{m}}, x_{2\bar{m}}, \ldots, x_{n\bar{m}}\} \qquad (\bar{m} = 1, 2, \ldots),$$

которая сходится к $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. В силу непрерывной зависимости $J(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y)$ от переменных x_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ получаем

$$\lim_{x_j \to \bar{x}_j\,(j=1,2,\ldots n)} J(x_0, x_1, \ldots x_n, x_{n+1}, y) = J(x_0, \bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n, x_{n+1}, y) = \\ = \inf J(x_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, x_{n+1}, y).$$

Следовательно, $\min J$ действительно достигается при некотором разбиении $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ интервала $[0, \infty]$. Функция $y_j(x)$ в каждом из интервалов $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ удовлетворяет уравнению (I) и условию $y(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_{i+1}) = 0$. Считаем без ограничения общности, что $y_j(x)$ меняет знак при прохождении через точки $\bar{x}_j$. Покажем теперь, что функция $y(x)$, составленная из $y_j(x)$ $(j=1,2,\ldots n)$, есть решение уравнения (I) на всем интервале $[0, \infty]$. Для этого достаточно установить равенство

$$\lim_{x \to \bar{x}_j - 0} \dot{y}_j(x) = \lim_{x \to \bar{x}_j + 0} \dot{y}_j(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.7}$$

3. В этом разделе докажем, что функция $y(x)$, составленная из $y_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots n)$, не будет решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) на всем интервале $[0, \infty]$, если не будет выполняться условие (2.7). Для удобства введем следующие обозначения: $x_{j-1} = a$, $x_j = c$ и $x_{j+1} = b$. Пусть функция $y(x)$ является решением вариационной задачи в $[a, b]$.

Без ограничения общности предположим, что $y(x)>0$ в $[a,c]$ и $y(x)<0$ в $[c,b]$. Определим функцию $u(x)$ следующим образом:

$$u(x) = \begin{cases} u(x) = y(x), \text{ при } [a, c-\delta] \text{ и } [c+\delta, b], \\ u(x) = Ax + B, \text{ при } [c-\delta, c+\delta], \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$A = (2\delta)^{-1}\left[y(c+\delta) - y(c-\delta)\right],$$
$$B = y(c-\delta) - (2\delta)^{-1}(c-\delta)\left[y(c+\delta) - y(c-\delta)\right]. \quad (3.2)$$

Пусть в точке $x=c'$ функция $u(c')=0$. В интервале $[a,c']$ функцию $u(x)$ умножем на σ и в интервале $[c',b]$ – умножем на ρ. Постоянные σ и ρ подбираем так, чтобы выполнялись условия

$$\sigma^{k+1}\int_a^{c'}\frac{u^{k+1}}{x^{k-1}}\,dx = \int_a^{c}\frac{y^{k+1}}{x^{k-1}}\,dx, \quad (3.3)$$

$$\rho^{k+1}\int_{c'}^{b}\frac{u^{k+1}}{x^{k-1}}\,dx = \int_{c}^{b}\frac{y^{k+1}}{x^{k-1}}\,dx. \quad (3.4)$$

Выполнение условий (3.3) и (3.4) обеспечивает реализацию условия нормировки (I.9) для функции $u(x)$ в промежутке $a\le x\le b$. Так как при $\delta\to 0$ имеем $c'\to c$, то из (3.3) и (3.4) получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma(\delta)\to 1, \quad \lim_{\delta\to 0}\rho(\delta)\to 1. \quad (3.5)$$

Теперь рассмотрим функционал в промежутке $a\le x\le b$:

$$J(u) = \int_a^b\left[\dot u^2(x) + Q_\ell(x)\,u^2(x)\right]dx.$$

Учитывая определение (3.I) функции $u(x)$ и свойства (3.5), повторяя выкладки и рассуждения, приведенные в работе [8], имеем

$$J(u) \le J(y) - \frac{\delta}{2}\left[\dot y_+(c) - \dot y_-(c)\right]^2 + o(\delta), \quad (3.6)$$

где
$$\dot{y}_+(c) = \lim_{x \to c+0} \dot{y}(x),$$

$$\dot{y}_-(c) = \lim_{x \to c-0} \dot{y}(x).$$

Если $\dot{y}_+(c) \neq \dot{y}_-(c)$, то при достаточно малом положительном δ выражение $-\frac{\delta}{2}[\dot{y}_-(c) - \dot{y}_-(c)]^2 + o(\delta)$ отрицательно, поэтому из (3.6) имеем

$$J(u) < J(y).$$

Но это противоречит предположению, что $y(x)$ есть решение вариационной задачи. Противоречия можно избежать, если выполнить условие (2.7). Тем самым доказано утверждение, сформулированное в начале этого раздела.

Так как функция $y_j(x)$ в каждом промежутке $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ является решением уравнения (I) и на концах промежутка выполняется условие (I.8) и (2.7), то функция $y(x)$, составленная из $y_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, является решением краевой задачи (I)-(2), и тем самым завершается доказательство теоремы 2.

В заключение отметим, что вопрос об однозначной разрешимости вариационной задачи (I.I)-(I.2) остается открытым. Другой вопрос, который остается без ответа,- имеет ли задача (I)-(2) дополнительные решения с n нулями в $[0, \infty]$, который в то же время не является решением вариационной задачи (I.I)-(I.2).

Авторы выражают благодарность В.Г.Маханькову за интерес к работе и признательны И.Л.Боголюбскому, Г.А.Емельяненко, Г.И.Макаренко, С.И.Сердюковой и Б.Н.Хоромскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makhankov V.G. Phys. Reports, 35, 1, 1978.
   Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys. Reports, 42,1, 1978 .
2. Гласко В.Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я.П., Шушурин С.Ф. ЖЭТФ, 35, 452, 1958 .
3. Z.Nehari. Proc. R. Irish Asad., A62, 117, 1963.
4. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, P-1319,Дубна, 1963; ЖВМ и МФ, № 4, 804, 1964 .
5. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. ОИЯИ, P5-11705, Дубна, 1978.
6. Амирханов И.В., Макаренко Г.И. ОИЯИ, P5-11865, Дубна, 1978.
7. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. ОИЯИ, P5-11866, Дубна, 1978.
8. Z.Nehari. Trans. Amer. Math. Soc., 95, N1, 101, 1960;
   Acta Math., 105, 141, 1961.
9. G.H.Ryder. Pacific Journal of Mathematics, Vol 22, N3, 1967, 477.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 ноября 1979 года.