объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5 - 12916

Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЧУ-ЛОУ

Направлено в журнал "Вычислительная математика и математическая физика"

1979

§1. УРАВНЕНИЕ ТИПА ЧУ-ЛОУ

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегральное уравнение типа Чу-Лоу /1,2/

$$v(x) = g(x)[v^2(x) + (\lambda + Fv(x))^2],$$

где

$$Fv(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(y)\,dy}{y-x} + C\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(y)\,dy}{y+x}, \quad x \in [0, 1].$$

Здесь вещественная функция $g(x)$, вектор параметров λ и квадратная матрица C порядка N заданы, а вектор-функция $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ - искомая.

Пусть $x = \cos t$, $y = \cos\tau$, $t, \tau \in [0, \pi/2]$ и для простоты $v(\cos t)$, $g(\cos t)$ обозначаются снова через $v(t)$ и $g(t)$. В результате несложного преобразования рассматриваемое уравнение примет следующий вид:

$$v(t) = g(t)[v^2(t) + (\lambda + Fv(t))^2], \qquad /1.1/$$

где

$$Fv(t) = K_1 v(t) + CK_2 v(t) + (E + C)\,\ell(t)\,v(t),$$

$$K_1 v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} [v(\tau) - v(t)]\,\mathrm{ctg}\frac{\tau - t}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} [v(\tau) + v(t)]\,\mathrm{ctg}\frac{\tau + t}{2},$$

$$K_2 v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} [v(\tau) - v(t)]\,\mathrm{tg}\frac{\tau - t}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} [v(\tau) + v(t)]\,\mathrm{tg}\frac{\tau + t}{2},$$

E - единичная матрица порядка N,

$$\ell(t) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\cos t}{1 + \sin t}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$v^2 = (v_1^2, v_2^2, \ldots, v_N^2).$$

Пусть $H_0^{m+\alpha}$ - пространство m раз $(m\geq 0)$ дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,\pi/2]$, m-я производная которых непрерывна по Гельдеру с показателем $\alpha\ (0<\alpha\leq 1)$, а $H_{0,N}^{m+\alpha}$ - пространство вектор-функций, компоненты которых принадлежат $H_0^{m+\alpha}$. При m=0 эти пространства обозначаем через H_0^{α} и $H_{0,N}^{\alpha}$. Для краткости вместо "вектор-функция" будем говорить просто "функция".

Пусть

$$\|x\| = \max_{0\leq t\leq\pi/2}|x(t)| + \sup_{0\leq t,\tau\leq\pi/2}|x(t)-x(\tau)|\,|t-\tau|^{-\alpha},$$

$$x(t)\in H_0^{\alpha},\quad \|v\|_{\alpha}=\max_{1\leq i\leq N}\|v_i\|_{\alpha},\quad v(t)\in H_{0,N}^{\alpha},$$

$$\|\lambda\|=\max_{1\leq i\leq N}|\lambda_i|;\quad u=(u_1,u_2,\dots,u_N),$$

$$uv=(u_1v_1,\ u_2v_2,\dots,u_Nv_N),$$

$$uv^{-1}=(u_1v_1^{-1},\ u_2v_2^{-1},\dots,u_Nv_N^{-1}),$$

$$S_R=\{v(t)\,|\,v(t)\in H_{0,N}^{m+\alpha},\ \|v\|_{\alpha}\leq R,\ 0\leq R<+\infty\}.$$

Будем предполагать, что $g(t)\in H_0^{2\nu+\alpha+1}$, $\nu\geq 2$.

Для любой функции $v(t)\in S_R$ рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$\phi(t)-2g(t)[v\phi(t)+(\lambda+Fv)F\phi(t)]+y(t)=0, \qquad /1.2/$$

где $y(t)$ - некоторый элемент пространства $H_{0,N}^{2\nu+\alpha-1}$. Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть $R>0$ таково, что

$$\|2g\|_{\alpha}[R+(\|\lambda\|+\|F\|_{\alpha}R)\|F\|_{\alpha}]<1. \qquad /1.3/$$

Тогда уравнение /1.1/ имеет в S_R единственное решение $v^*(t)$, которое может быть получено методом простой итерации, а линейное интегральное уравнение /1.2/ при каждой ограниченной вектор-функции $y(t)\in H_{0,N}^{2\nu-1+\alpha}$ имеет в этом пространстве только одно решение: $\phi(t)$.

Эта лемма доказывается аналогично теореме единственности из работы /1/.

§2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ТОЧНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть Ω_n - множество равноотстоящих точек с шагом h, $t_0=0,\ t_1=h,\ t_2=2h,\dots,t_n=nh=\frac{\pi}{2}$.

Для приближенного решения уравнения /1.1/ рассмотрим разностную задачу

$$v_n(t_j)=g(t_j)[v_n^2(t_j)+(\lambda+F_nv_n(t_j))^2],\quad t_j\in\Omega_n, \qquad /2.1/$$

где

$$F_nv_n(t_j)=B_n^1v_n(t\ )+CB_n^2v_n(t_j)+(C+E)\ell(t_j)v_n(t_j). \qquad /2.2/$$

Здесь $v_n(t_j)$ - сеточная функция на Ω_n,

$$B_n^1v_n(t_j)=h\{v_n(t_j)(a_j+\frac{1}{2}a_{n+j}-\frac{1}{2}a_{n-j})+\sum_{k=1}^{n-1}[v_n(t_k)-v_n(t_j)]a_{k-j}+\sum_{k=1}^{n-1}[v_n(t_k)+v_n(t_j)]a_{n+j}\}, \qquad /2.3/$$

$$B_n^2v_n(t_j)=h\{v_n(t_j)(b_j+\frac{1}{2}b_{n+j}-\frac{1}{2}b_{n-j})+\sum_{k=1}^{n-1}[v_n(t_k)-v_n(t_j)]b_{k-j}+\sum_{k=1}^{n-1}[v_n(t_k)+v_n(t_j)]b_{k+j}\}, \qquad /2.4/$$

$$t_j\ (j=1,2,\dots,n-1)\in\Omega_n,$$

$$a_i=\mathrm{ctg}\frac{i}{2}h,\quad b_i=a_i^{-1}=\mathrm{tg}\frac{i}{2}h \qquad (i=\pm1,\pm2,\dots,\pm(2n-1)).$$

В формуле /2.3/ слагаемое

$$[v_n(t_k)-v_n(t_j)]a_{k-j}$$

при $k=j$ заменяется на величину $2v'(t_j)$, которая может быть вычислена по формуле

$$v'(t_j)=[2h]^{-1}[v_n(t_{j+1})-v_n(t_{j-1})]+\sum_{k=1}^{\nu-1}e_{2k}(t\ )h^{2k}+e_{2\nu}, \qquad /2.5/$$

где $e_{2k}(t\ )$ не зависят от h, а $e_{2\nu}$ имеет порядок $h^{2\nu}$.

Вместо $t_j \in \Omega_n$, $t_j \neq 0$, $t_j \neq \frac{\pi}{2}$ будем писать просто $t \in \Omega_n$. Пусть P_n - оператор простого сноса, A - оператор, определенный правой частью уравнения /1.1/, а A_n - оператор правой части разностной задачи /2.1/.

Положим

$$\rho_n(v) = P_n F v(t) - F_n P_n v(t),$$

$$\gamma_n(v) = P_n A v(t) - A_n P_n v(t), \quad t \in \Omega_n.$$

Пусть $v(t) \in H_{0,N}^{2\nu+1+\alpha}$, $\nu \geq 2$. Тогда согласно разложению Эйлера-Маклорена для остатка квадратурной формулы трапеций [3] и выражению /2.5/ можем записать

$$P_n K_1 v(t) = B_n^1 P_n v(t) + \sum_{k=2}^{2\nu-1} c_k^1 h^k + \rho_{2\nu}^1, \qquad /2.6/$$

$$P_n K_2 v(t) = B_n^2 P_n v(t) + \sum_{k=1}^{\nu-1} c_{2k}^2 h^{2k} + \rho_{2\nu}^2, \quad t \in \Omega. \qquad /2.7/$$

Здесь $\rho_{2\nu}^1$, $\rho_{2\nu}^2$ имеют порядок $h^{2\nu}$; c_k^1, c_{2k}^2 - не зависящие от h функции, а B_n^1 и B_n^2 вычисляются по формулам /2.3/-/2.4/ при $v_n(t) = P_n v(t)$.

Из соотношений /2.2/, /2.6/-/2.7/ нетрудно вывести, что $\rho_n(v)$ имеет вид

$$\rho_n(v) = \sum_{k=2}^{2\nu-1} c_k(t) h^k + r_n, \quad t \in \Omega_n, \qquad /2.8/$$

где $c_k(t) \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha-k+1}$ и не зависят от h, а r_n имеет порядок $h^{2\nu}$.

Пусть S_R^n - множество, получающееся простым сносом из множества S_R. Согласно [2] при выполнении неравенства /1.3/ разностная задача /2.1/ имеет в S_R^n единственное решение $v_n^*(t)$, которое может быть получено методом простой итерации.

Близость решения $v_n^*(t)$ к точному решению $v^*(t)$, а также разложение функции $\gamma_n(v)$ по степеням шага h устанавливает следующая

Лемма 2.

1/ $$\|v_n^*(t) - v^*(t)\|_{C,\Omega_n} \leq M_1 \|\gamma_n(v^*)\|_{C,\Omega_n}, \qquad /2.9/$$

$$M_1 = \text{const},$$

где $\|\cdot\|_{C,\Omega_n}$ - равномерная норма на Ω_n;

2/ $$\gamma_n(v) = \sum_{k=2}^{2\nu-1} d_k(t) h^k + \eta_n, \quad \forall v \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha+1}, \qquad /2.10/$$

где $d_k(t) \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha-k+1}$ $(t \in \Omega)$ и не зависят от h, а η_n имеет порядок $h^{2\nu}$.

Первое утверждение леммы 2 доказано в [2]. Второе утверждение непосредственно получается из представления /2.8/ для функции $\rho_n(v)$, а также из следующего соотношения:

$$\gamma_n(v) = 2g(\lambda + P_n F v)\rho_n(n) - g\rho_n^2(v), \quad t \in \Omega_n.$$

§3. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ И УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ

Теорема 1. Пусть выполняется условие леммы 1. Тогда

$$v^*(t) = v_n^*(t) + \sum_{k=2}^{2\nu-2} \phi_k(t) h^k + \omega_n, \quad t \in \Omega_n. \qquad /3.1/$$

Здесь $\phi_k(t) \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha-k+1}$ и не зависят от h, ω_n имеет порядок $h^{2\nu-1}$.

Доказательство. Для простоты приведем доказательство данной теоремы при $\nu = 2$. В этом случае представления /2.8/ и /2.10/, а также разложение /3.1/ имеют соответственно вид:

$$\rho_n(v) = c_2(t)h^2 + r_n, \quad \|r_n\|_C = O(h^3), \qquad /3.2/$$

$$\gamma_n(v) = d_2(t)h^2 + \eta_n, \quad \|\eta_n\|_C = O(h^3), \qquad /3.3/$$

$$v^*(t) = v_n^*(t) + \phi_2(t)h^2 + \omega_n, \quad \|\omega_n\|_C = O(h^3). \qquad /3.4/$$

Пусть $\phi_2(t) \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha-1}$. Составим сеточную функцию

$$\omega_n(t) = v^*(t) - v_n^*(t) - \phi_2(t)h^2, \quad t \in \Omega_n. \qquad /3.5/$$

Положим

$$\sigma = v^*(t) - v_n^*(t), \quad t \in \Omega_n.$$

Несложным преобразованием получим

$$\sigma = \gamma_n(v^*) + 2g\{v^*\sigma + (\lambda + P_n F v^*)[\rho_n(v^*) + F_n\sigma] - \frac{1}{2}[\sigma^2 + (\rho_n(v^*) + F_n\sigma)^2]\}. \qquad /3.6/$$

Аналогично представлениям /2.6/-/2.7/ можем написать разложения

$$P_n K_1 \phi_2(t) = B_n^1 P_n \phi_2(t) + \bar{c}_2^1(t)h^2 + \rho_1, \qquad /3.7/$$

$$P_n K_2 \phi_2(t) = B_n^2 P_n \phi_2(t) + \bar{c}_2^2(t) h^2 + \rho_2, \qquad /3.8/$$

и

$$P_n F \phi_2(t) = F_n P_n \phi_2(t) + \bar{c}_2(t) h^2 + \rho, \qquad /3.9/$$

где $\bar{c}_2^1$, $\bar{c}_2^2$, $\bar{c}_2$ не зависят от h; ρ_1, ρ_2, ρ имеют порядок h^3.

Поскольку F_n - линейный ограниченный оператор, то в силу неравенства /2.9/ и разложений /3.2/-/3.3/ выражение

$$\frac{1}{2}[\sigma^2 + (\rho_n(v^*) + F_n \sigma)^2]$$

имеет порядок h^4. Отсюда, учитывая /3.7/-/3.9/, можем переписать /3.6/ в виде

$$\phi_2(t) h^2 + \omega_n = 2g\{[v^* \phi_2(t) + (\lambda + P_n F v^*) P_n F \phi_2(x)] + y(t)\} h^2 +$$
$$+ 2g[v^* \omega_n + (\lambda + P_n F v^*) F_n \omega_n] + \sigma_n. \qquad /3.10/$$

Здесь $y(t)$ - некоторый фиксированный элемент пространства $H_{0,N}^{2\nu+\alpha-1}$, а σ_n имеет порядок h^3.

Таким образом, для любой функции $\phi_2(t) \in H_{0,N}^{2\nu+\alpha-1}$ имеет место тождество /3.10/. Пусть $\phi_2(t)$ - единственное решение линейного уравнения /1.2/. Тогда из тождества /3.10/ получим

$$\omega_n = 2g[v^* \omega_n + (\lambda + P_n F v^*) F_n \omega_n] + \sigma_n, \quad t \in \Omega_n. \qquad /3.11/$$

В силу разрешимости /1.2/ и согласно [2] нетрудно показать, что

$$\|\omega_n\|_{C,\Omega_n} \le M_2 \|\sigma_n\|_{C,\Omega_n}, \quad M_2 = \mathrm{const},$$

и так как $\|\sigma_n\|_{C,\Omega_n}$ - величина порядка h^3, то, выражая $v^*(t)$ из /3.5/, получим разложение /3.4/ с требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Ускорение сходимости, основанное на разложении типа /3.1/, достаточно подробно исследовано в [4].

Рассмотрим еще один способ повышения точности разностных решений $v_n^*(t)$ задачи /2.1/.

§4. УТОЧНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

На основе леммы 1 будем решать уравнение /1.1/ и задачу /2.1/ на Ω_{2n} методом простой итерации.

Для удобства функцию $v(t)$ в уравнении /1.1/ обозначим через $\bar{v}(t)$, а $v_{2n}(t)$ в задаче /2.1/ - через $v(t)$, $t \in \Omega_{2n}$.

Пусть $\bar{v}_0(t) \in S_R$ при R, удовлетворяющем неравенству /1.3/. Положим

$$v_0(t) = P_{2n} \bar{v}_0(t), \quad t \in \Omega_{2n}.$$

Для задачи /2.1/ на Ω_{2n} рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$v_{k+1}(t) = g(t)[v_k^2(t) + \chi_k(\lambda + F_{2n} v_k(t))^2], \qquad /4.1/$$

где

$$\chi_k = \frac{4r_k - r_k^2}{4r_k - 1}, \quad r_k = \frac{\lambda + F_n v_k(t)}{\lambda + F_{2n} v_k(t)}, \qquad /4.2/$$

$$t \in \Omega_{2n} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Пусть

$$v_{2n}^*(t) = \lim_{k\to\infty} v_k(t), \quad t \in \Omega_{2n}.$$

Сходимость рассматриваемого процесса следует из [2]. Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть выполняется условие леммы 1. Тогда

$$v^*(t) = v_{2n}^*(t) + \omega_n, \quad t \in \Omega_{2n}, \qquad /4.3/$$

где ω_n имеет порядок h^3.

Доказательство. Первое приближение к решению уравнения /1.1/ имеет вид

$$\bar{v}_1(t) = g(t)[\bar{v}_0^2(t) + (\lambda + F\bar{v}_0(t))^2], \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

На сетке Ω_{2n} оно может быть представлено двумя способами:

$$\bar{v}_1(t) = g(t)[P_n \bar{v}_0^2(t) + (\lambda + F_n P_n \bar{v}_0(t) + c_2(t) h^2 + r_n^1)^2],$$
$$\bar{v}_1(t) = g(t)[P_{2n} \bar{v}_0^2(t) + (\lambda + F_{2n} P_{2n} \bar{v}_0(t) + c_2(t)\frac{h^2}{4} + r_n^2)^2], \qquad /4.4/$$

где r_n^1, r_n^2 имеют порядок h^3.

Так как $P_{2n}\bar{v}_0(t)=v_0(t)$, $t\in\Omega_{2n}$, то из равенств /4.4/ нетрудно получить

$$\bar{v}_1(t)=g(t)[v_0^2(t)+\chi_0(\lambda+F_{2n}v_0(t))^2+\sigma_n,\quad t\in\Omega_{2n},$$

где χ_0 вычисляется по формуле /4.2/ при $k=0$, а σ_n имеет порядок h^3. Следовательно,

$$\bar{v}_1(t)=v_1(t)+\sigma_n,\quad t\in\Omega_{2n}.$$

Допустим, что при некотором $k\geq 1$ справедливо разложение

$$\bar{v}_k(t)=v_k(t)+\sigma_n,\quad \|\sigma_n\|_{C,\Omega_n}=O(h^3),\quad t\in\Omega_{2n}. \qquad /4.5/$$

Покажем, что это разложение имеет место и при $k+1$.

Аналогично /4.4/ можем записать представления

$$\bar{v}_{k+1}(t)=g(t)[P_n\bar{v}_k^2(t)+(\lambda+F_nP_n\bar{v}_k(t)+c_2(t)h^2+r_n^1)^2],$$

$$\bar{v}_{k+1}(t)=g(t)[P_{2n}\bar{v}_k^2(t)+(\lambda+F_{2n}P_{2n}\bar{v}_k(t)+c_2(t)\frac{h^2}{4}+r_n^2)^2], \qquad /4.6/$$

где r_n^1, r_n^2 имеют порядок h^3. Заменим величину $P_{2n}\bar{v}_k(t)$ в формулах /4.6/ на $v_k(t)+\sigma_n$. Далее легко получить

$$\bar{v}_{k+1}(t)=g(t)[v_k^2(t)+\chi_k(\lambda+F_{2n}v_k(t))^2]+\sigma_n$$

$$=v_{k+1}(t)+\sigma_n,\quad t\in\Omega_{2n},$$

где $\|\sigma_n\|_c=O(h^3)$. Таким образом, разложение /4.5/ справедливо и при $k+1$. Перейдя в этом разложении к пределу, получим

$$v^*(t)=v^*_{2n}(t)+\sigma_n,\quad t\in\Omega_{2n},$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что используя идею линейной экстраполяции Ричардсона на последовательности сеток $\Omega_n\subset\Omega_{2n}\subset\Omega_{4n}\subset\ldots\subset\Omega_{2^\ell n}$, можем аналогично теореме 2 получить уточненные решения на сетке $\Omega_{2^\ell n}(\ell\geq 1)$ с точностью порядка $h^{\ell+2}$. Однако реализация итерационного процесса при большом ℓ связана с трудностями. Процесс /4.1/, рассмотренный в теореме 2, мало отличается от обычной итерации. Дело в том, что структура

формулы трапеций позволяет организовать вычислительный процесс так, чтобы на каждом шаге итерации вычислялась только сумма $F_{2n}v_k(t)$.

Из леммы 2 следует еще один способ повышения точности приближенных решений задачи /2.1/, связанный с получением разностных схем повышенной точности. Для увеличения порядка точности разностной задачи /2.1/ достаточно повысить порядок аппроксимации оператора $Fv(t)$ операторами $F_nv_n(t)$. Оказывается, что квадратурная формула повышенной точности может быть получена линейной экстраполяцией Ричардсона, основанной на формуле трапеций. В частности, линейная комбинация двух сумм, T_n и T_{2n}, типа трапеций

$$\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

дает квадратурную формулу Симпсона на Ω_{2n}. Как правило, можно из формулы трапеций получить формулу более высокой точности, нежели формула Симпсона.

§5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Пусть

$$C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad g(t)=\cos^2t\sin t,\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2),\quad \lambda_1=-\lambda_2=0{,}99.$$

Тогда уравнение /1.1/ имеет следующее решение /1,5/:

$$v_i(t)=4\lambda_i^2\cos^2t\sin t[4-4\lambda_i\cos t(2\cos^2t-1)+\lambda_i^2\cos^2t]^{-1}$$
$$(i=1,2).$$

Пусть $v^*_{1,n}$ - решение разностной задачи /2.1/, $v^*_{2,n}$ - решение разностной задачи типа /2.1/, построенной с помощью формулы Симпсона, а $v^*_{3,n}$ - решение задачи /2.1/, полученное в результате итерационного процесса /4.1/. Для этих решений были найдены максимальные ошибки:

$$\sigma_i(n)=\|v^*_{i,n}-v^*\|_{C,\Omega_n}\qquad (i=1,2,3),$$
$$(n=10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160).$$

После этого составлялась линейная комбинация двух решений задачи /2.1/:

$$v^*_{n,2n}=\frac{4}{3}v^*_{1,2n}-\frac{1}{3}v^*_{1,n},$$

и вновь вычислялась ее максимальная погрешность:

$$\sigma(n, 2n) = \| v^*_{n,2n} - v^* \|_{C,\Omega_n} .$$

Эти максимальные погрешности приведены в таблице.

Таблица

Максимальные погрешности приближенных решений

n	$\sigma_1(n)$	$\sigma_2(n)$	$\sigma_3(n)$	$\sigma(n, 2n)$
10	$9{\cdot}14 \cdot 10^{-8}$	$6{\cdot}23 \cdot 10^{-4}$	$6{\cdot}15 \cdot 10^{-4}$	-
20	$1{\cdot}12 \cdot 10^{-4}$	$3{\cdot}15 \cdot 10^{-5}$	$3{\cdot}14 \cdot 10^{-5}$	$3{\cdot}20 \cdot 10^{-5}$
40	$2{\cdot}77 \cdot 10^{-5}$	$2{\cdot}43 \cdot 10^{-6}$	$2{\cdot}64 \cdot 10^{-6}$	$2{\cdot}52 \cdot 10^{-6}$
80	$7{\cdot}01 \cdot 10^{-6}$	$1{\cdot}62 \cdot 10^{-7}$	$1{\cdot}62 \cdot 10^{-7}$	$1{\cdot}60 \cdot 10^{-7}$
160	$9{\cdot}11 \cdot 10^{-7}$	$4{\cdot}93 \cdot 10^{-9}$	$5{\cdot}27 \cdot 10^{-9}$	$4{\cdot}82 \cdot 10^{-9}$

Следует отметить, что в данном примере благодаря высокой гладкости решения величина $v'(t_j)$ аппроксимировалась следующим разностным отношением:

$$v'(t_j) = [6h]^{-1}[6v(t_{j+1}) - 3v(t_j) - v(t_{j+2}) - 2v(t_{j-1})] + O(h^4)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

что позволило получить решения $v^*_{2,n}$, $v^*_{3,n}$ и $v^*_{n,2n}$ с точностью порядка h^4.

На основе разложения /3.1/, комбинируя различные решения $v^*_{1,n}$, на большом числе сеток Ω_n можно получить решение более высокой точности, чем $v^*_{n,2n}$. Такая возможность имеется и для итерационного процесса типа /4.1/. Однако в этом случае реализация аналогичного /4.1/ процесса связана с трудностями, возникающими при решении системы алгебраических уравнений для коэффициентов типа χ_k.

Повышая порядок аппроксимации, можем увеличить точность приближенных решений, однако реализация схем повышенной точности, как правило, связана с определенными трудностями. Экстраполяционный метод Ричардсона обладает рядом достоинств, которые достаточно полно отмечены в /4/, и хорошо зарекомендовал себя при решении дифференциальных задач /4,6,7/. Прост в реализации и метод, предложенный в §4 /теорема 2/, в котором отсутствует один недостаток /хотя несущественный/ метода Ричардсона, заключающийся в том, что уточненные решения получаются лишь на пересечении используемых сеток.

Он дает решения повышенной точности на объединении сеток после однократной реализации итерационного процесса и может интерпретироваться как экстраполяция Ричардсона, которая учитывает нелинейность исходной задачи /1.1/. По-видимому, этот метод может быть использован в различных итерационных методах решения как уравнения /1.1/, так и других уравнений, содержащих интегральный оператор типа $Fv(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидков Е.П., Нгуен Монг, Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-11912, Дубна, 1978.
2. Жидков Е.П., Нгуен Монг, Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-12247, Дубна, 1979.
3. Крылов В.Н. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.
4. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
5. Жидков Е.П. и др. ЖВМ и МФ, 1979, 19, №4, с.998-1014.
6. Волков Е.А. Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков, ч. I, II. Дифференциальные уравнения, 1965, 1, №7, с.946-960; №8, с.1070-1084.
7. Краснов С.А. ОИЯИ, Б1-11-12508, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 ноября 1979 года.