сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12915

М.Касчиев, Е.Х.Христов

МЕТОД НЬЮТОНА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

1979

P5 - 12915

М.Касчиев, Е.Х.Христов

МЕТОД НЬЮТОНА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Касчиев М., Христов Е.Х. P5 - 12915

Метод Ньютона в обратной задаче для регулярного оператора Штурма-Лиувилля

Построено уравнение непрерывного аналога метода Ньютона в задачах о восстановлении самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля

$$y''+(\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi \quad (q(x) \in L_2(0,\pi)),$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (h, H < \infty)$$

по спектральной функции и по двум спектрам. На его основе предложены итерационные методы для численного решения этих задач. Приведены результаты расчетов ряда модельных обратных задач.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Kaschiev M., Khristov E.Kh. P5 - 12915

Newton Method in the Inverse Sturm-Liouville Problem

The equation for the continuous analog of Newton's method for construction of the selfadjoint Sturm-Liouville problem is obtained

$$y''+(\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi \quad (q(x) \in L_2(0,\pi)),$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (h, H < \infty)$$

by the spectral function or by two spectra. Iterative methods for numerical solving of this problems are also suggested. The results of computation of some model inverse problems are listed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем вещественное гильбертово пространства $\mathcal{H}_1 = L_2(0,\pi) \oplus \boldsymbol{R}$ с элементами $\tilde{f} = (f(x) \in L_2(0,\pi), \ \alpha \in \boldsymbol{R})$ и скалярным произведением

$$(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_1 = \int_0^{\pi} f_1(x) f_2(x)\,dx + \alpha_1 \alpha_2, \quad (\|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}_1} = (\tilde{f}, \tilde{f})_1^{1/2}).$$

Каждой самосопряженной задаче Штурма-Лиувилля

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad ('= d/dx) \qquad /1.1/$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,^{*} \qquad /1.2/$$

для которой

$$h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(x)\,dx = a^*, \qquad /1.3/$$

где a^* - фиксированное число, поставим в соответствие элемент $\tilde{q} = (q(x), H) \in \mathcal{H}_1$. Обозначим через $\lambda_n(\tilde{q})$ $(n=0,1,\dots)$ ее собственные значения /с.з./, а через $\beta_n(\tilde{q}) = \{\int_0^{\pi} \psi_n^2(x)\,dx\}^{-1}$ - ее нормировочные числа /н.ч./, где $\psi_n(x) = \psi(x, \lambda_n)$ - собственная функция, для которой $\psi_n(\pi) = 1$. Хорошо известно, что для любого $\tilde{q} \in \mathcal{H}_1$

$$\lambda_m(\tilde{q}) < \lambda_n(\tilde{q}) \ (m < n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n(\tilde{q}) - n^2 - \frac{2}{\pi} a^*)^2 < \infty, \qquad /1.4/$$

$$\beta_n(\tilde{q}) > 0 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\beta_n(\tilde{q}) - \frac{2}{\pi})^2 < \infty). \qquad /1.5/$$

Имеет место и обратное

*Здесь и всюду в дальнейшем вещественная функция $q(x) \in L_2(0,\pi)$, числа h и H конечны.

Предложение 1 /см. Гельфанд и Левитан [1] /. Если для двух последовательностей чисел $\{\lambda^*_n\}^\infty_{n=0}$ и $\{\beta^*_n\}^\infty_{n=0}$ выполняются условия /1.4/ т /1.5/, то существует единственный элемент $\tilde{q}_* = (q_*(x), H_*) \in \mathfrak{H}_1$, для которого

$$\lambda^*_n = \lambda_n(\tilde{q}_*),\ \beta^*_n = \beta_n(\tilde{q}_*) \quad (n = 0,1,\dots). \qquad /1.6/$$

Здесь обратная задача, в дальнейшем цитируемая как о.з.1, состоит в восстановлении элемента $\tilde{q}_*$ по заданным $\{\lambda^*_n\}$ и $\{\beta^*_n\}$. В §3 этой работы доказана следующая

Теорема 1. Пусть заданы последовательности $\{\lambda^*_n\}^\infty_{n=0}$ и $\{\beta^*_n\}^\infty_{n=0}$, удовлетворяющие условиям /1.4/ и /1.5/, и по ним построено множество

$$\Omega_I(N) = \{\tilde{q} \in \mathfrak{H}_1 \mid \lambda_n(\tilde{q}) = \lambda^*_n,\ \beta_n(\tilde{q}) = \beta^*_n,\ n = N+1, \dots\}, \qquad /1.7/$$

где N - конечное число. Тогда для любого начального значения $\tilde{q}_0 = (q_0(x), H_0) \in \Omega_I(N)$ задача Коши,

$$\begin{aligned} q'_t(t) = \sum_{n=0}^{N} \{&\beta_n(\tilde{q}(t))[\lambda^*_n - \lambda_n(\tilde{q}(t))]\tilde{V}_{2n+1}(\tilde{q}(t)) + \\ &+ [\beta^*_n - \beta_n(\tilde{q}(t))]\tilde{V}_{2n+2}(\tilde{q}(t))\}, \end{aligned} \qquad /1.8/$$

$$\tilde{q}(t) = (q(x,t), H(t)),\quad 0 \le t < \infty,\quad \tilde{q}(0) = \tilde{q}_0,$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_{2n+1} = \frac{d}{d\lambda}\tilde{\Psi}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n},\quad \tilde{V}_{2n+2} = \tilde{\Psi}(\lambda_n), \\ &\tilde{\Psi}(\lambda) = \left(2\frac{d}{dx}\psi^2(x,\lambda),\ -1\right), \end{aligned} \qquad /1.9/$$

$\psi(x,\lambda)$ - решение уравнения /1.1/, определяемое начальными $\psi(\pi,\lambda) = 1$, $\psi'(\pi,\lambda) = -H$, имеет единственное решение

$$\tilde{q}(t) \in C^1_{\mathfrak{H}_1} \cap \Omega_I(N),\quad (0 < t < \infty), \qquad /1.10/$$

т.е. $\tilde{q}(t)$ как вектор-функция от t непрерывно дифференцируема, $\tilde{q}(t) \in \Omega_I(N)$. При этом существует предел $\tilde{q}_* = (q_*(x), H_*)$:

$$\lim_{t\to\infty} \|\tilde{q}(t) - \tilde{q}_*\|_{\mathfrak{H}_1} = 0, \qquad /1.11/$$

для которого выполняются равенства /1.6/.

К о.з.1 примыкает восходящая к работе Борга [2] задача об определении оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам, далее цитируемая как о.з. II.

Рассмотрим две краевые задачи, определяемые одним и тем же дифференциальным уравнением

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0,\quad 0 \le x \le \pi \qquad /1.12/$$

и соответственно граничными условиями

$$y'(0) - hy(0) = 0,\quad y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0, \qquad /1.13/_1$$

$$y'(0) - hy(0) = 0,\quad y'(\pi) + H_2 y(\pi) = 0,\quad (H_1 < H_2). \qquad /1.13/_2$$

Построим по краевым задачам /1.12/, $/1.13/_j$, для которых с некоторыми фиксированными $a^*_j (a^*_1 < a^*_2)$ выполняются равенства

$$h + H_j + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx = a^*_j,\quad (j = 1,2), \qquad /1.14/$$

элемент $\tilde{q} = (q(x), H_1) \in \mathfrak{H}_1$ и обозначим через $\lambda_{2n+j}(\tilde{q})$ $(n = 0,1,\dots;\ j = 1,2)$ их собственные значения.

Собственные значения $\lambda_{2n+j}(\tilde{q})$ удовлетворяют условиям

$$\lambda_{2n+1}(\tilde{q}) < \lambda_{2n+2}(\tilde{q}) < \lambda_{2(n+1)+1}(\tilde{q})\quad (n = 0,1,\dots), \qquad /1.15/$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^\infty (\lambda_{2n+j}(\tilde{q}) - n^2 - \frac{2}{\pi}a^*_j)^2 < \infty, \\ &\sum_{n=1}^\infty n^2(\lambda_{2n+2}(\tilde{q}) - \lambda_{2n+1}(\tilde{q}) - \frac{2}{\pi}(a^*_2 - a^*_1))^2 < \infty, \end{aligned} \qquad /1.16/$$

при этом имеет место

Предложение 2 /см. Левитан и Гасымов [3] /. Если последовательности чисел $\{\lambda^*_{2n+j}\}^\infty_{n=0}$ $(j=1,2)$ удовлетворяют соотношениям /1.15/, /1.16/, то существует единственный элемент $\tilde{q}_* = (q_*(x), H_{1,*}) \in \mathfrak{H}_1$, для которого

$$\lambda^*_{2n+j} = \lambda_{2n+j}(\tilde{q}_*),\quad (n = 0,1,\dots;\ j = 1,2). \qquad /1.17/$$

Для этой о.з. в §3 показано, что справедлива следующая

Теорема 2 /см. также [4] /. Пусть заданы две последовательности $\{\lambda^*_{2n+j}\}^\infty_{n=0}$ $(j=1,2)$, для которых выполняются условия /1.14/, /1.15/, и по ним построено множество

$$\Omega_{II}(N) = \{\tilde{q} \in \mathfrak{H}_1 \mid \lambda_{2n+j}(\tilde{q}) = \lambda^*_{2n+j},\ n = N+1, N+2, \dots;\ j = 1,2\}. \qquad /1.18/$$

Тогда для любого начального значения $\tilde{q}_0 = (q_0(x), H_{1,0}) \in \Omega_{II}(N)$ задача Коши

$$\tilde{q}_t'(t) = \frac{1}{a_2^*-a_1^*} \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1,2} (-1)^j [\lambda^*_{2n+j} - \lambda_{2n+j}(\tilde{q}(t))] \tilde{V}_{2n+j}(\tilde{q}(t)), \qquad /1.19/$$

$$\tilde{q}(t) = (q(x,t), H_1(t)), \quad \tilde{q}(0) = \tilde{q}_0, \quad 0 \le t < \infty,$$

где

$$\tilde{V}_{2n+j} = \tilde{\Psi}(\lambda_{2n+j}), \quad \tilde{\Psi}(\lambda) = (2\frac{d}{dx}\psi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda), -1), \qquad /1.20/$$

$\psi_j(x,\lambda)$ - решение уравнения /1.12/, определяемое начальными условиями $\psi_j(\pi,\lambda) = 1$, $\psi_j'(\pi,\lambda) = -H$, имеет единственное решение $\tilde{q}(t) \in C^1_{\mathfrak{N}_1} \cap \Omega_{II}(N)$, $(0 < t < \infty)$, для которого предел $\lim_{t\to\infty} q(t) = \tilde{q}_* = (\tilde{q}_*(x), H_{1,*})$ удовлетворяет равенствам /1.16/.

В работах[1,3], в частности, был предложен и эффективный метод решения указанных о.з. с помощью известного уравнения Гельфанда-Левитана.

Методика, изложенная в теоремах 1 и 2, основана на общей идее /см. Гавурин[5] / нахождения решения v_* операторного уравнения $f(v) = y_*$ из уравнения непрерывного аналога метода Ньютона

$$v_t = -[f'(v)]^{-1}(f(v) - y_*), \quad 0 < t < \infty, \quad v(0) = v_0. \qquad /1.21/$$

Здесь в общем случае f - нелинейный оператор, f' - его производная Фреше, y_* - заданный элемент. При надлежащем выборе начального значения v_0 искомое $v_* = \lim_{t\to\infty} v(t; v_0)$, где $v(t; v_0)$ - решение задачи Коши /1.21/. Такой подход позволяет с высокой точностью численно решать ряд задач математической физики[6]. Для обратной задачи рассеяния он детально изложен в[7].

В §4 на основе уравнений /1.8/ и /1.19/ построены итерационные алгоритмы для численных расчетов о.з. I и II. Всюду в дальнейшем мы пользуемся введенными здесь обозначениями.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $\phi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ - решения уравнения /1.1/, удовлетворяющие начальным условиям

$$\phi(0,\lambda) = 1, \ \phi'(0,\lambda) = h; \ \psi(\pi,\lambda) = 1, \ \psi'(\pi,\lambda) = -H.$$

Напомним, что если ввести характеристическую функцию

$$\omega(\lambda) = \phi'(\pi,\lambda) + H\phi(\pi,\lambda) \equiv h\psi(0,\lambda) - \psi'(0,\lambda), \qquad /2.1/$$

то с.з. λ_n краевой задачи /1.1/, /1.2/ определяется нулями функции $\omega(\lambda)$:

$$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda_n \mid \omega(\lambda_n) = 0, \ n = 0,1,\dots\} (\dot{\omega}(\lambda_n) \ne 0), \qquad /2.2/$$

при этом для н.ч. β_n справедливы записи

$$\beta_n = -\psi^{-1}(0,\lambda_n)\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n) \equiv -\phi(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n), \qquad /2.3/$$

где точкой обозначена производная по λ.

Лемма 1. При любом $\tilde{q} \in \mathfrak{N}_1$ существуют дифференциалы Гато

$$\frac{d}{ds}\lambda_n(\tilde{q}+s\tilde{f})|_{s=0} = (\tilde{f}, \frac{\partial\lambda_n}{\partial\tilde{q}})_1, \quad \frac{d}{ds}\beta_n(\tilde{q}+s\tilde{f})|_{s=0} = (\tilde{f}, \frac{\partial\beta_n}{\partial\tilde{q}})_1, \qquad /2.4/$$

$$(\tilde{f} \in \mathfrak{N}_1),$$

для которых градиенты

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial\tilde{q}} = \beta_n^{-1}\tilde{U}_{2n+1}, \qquad \frac{\partial\beta_n}{\partial\tilde{q}} = \tilde{U}_{2n+2}, \qquad /2.5/$$

где функции

$$\tilde{U}_{2n+1} = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\tilde{\Phi}(\lambda_n), \ \tilde{U}_{2n+2} = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\{\dot{\tilde{\Phi}}(\lambda_n) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\tilde{\Phi}(\lambda_n)\}, \qquad /2.6/$$

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = (\Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2}, \ \Phi(\pi,\lambda) - 1), \ \Phi(x,\lambda) = \phi^2(x,\lambda). \qquad /2.7/$$

Доказательство. Рассмотрим величины $\hat{q} = (q(x), H, h)$, определяющие задачу /1.1/, /1.2/ как элемент пространства

$$\mathfrak{N}_2 = L_2(0,\pi) \oplus \mathbf{R}^2 \ni \hat{f} = (f(x), \alpha, \beta),$$

со скалярным произведением

$$(\hat{f}_1, \hat{f}_2)_2 = \int_0^{\pi} f_1(x)f_2(x)dx + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$$

и соответствующие $\hat{q}$ с.з. $\lambda_n(\hat{q})$ и н.ч. $\beta_n(\hat{q})$ как функционалы из $\mathfrak{N}_2$ в $\mathbf{R}$. Покажем, что для любых $\hat{q}, \hat{f} \in \mathfrak{N}_2$

$$\frac{d}{ds}\lambda_n(\hat{q}+s\hat{f})|_{s=0} = (\hat{f}, \frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}})_2, \qquad /2.8/$$

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}} \overset{\text{def.}}{=} (\frac{\delta\lambda_n}{\delta q}(x), \frac{\partial\lambda_n}{\partial H}, \frac{\partial\lambda_n}{\partial h}),$$

$$\frac{d}{ds}\beta_n(\hat{q}+s\hat{f})|_{s=0} = (\hat{f}, \frac{\partial\beta}{\partial\hat{q}})_2, \qquad /2.9/$$

$$\frac{\partial\beta_n}{\partial\hat{q}} \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\delta\beta_n}{\delta q}(x), \ \frac{\partial\beta_n}{\partial H}, \ \frac{\partial\beta_n}{\partial h}\right),$$

где $\hat{\Phi}(\lambda) = (\Phi(x,\lambda), \ \Phi(\pi,\lambda), \ 1)$,

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}} = \frac{-1}{\phi(\pi,\lambda_n)\,\dot{\omega}(\lambda_n)}\hat{\Phi}(\lambda_n),$$

$$/2.10/$$

$$\frac{\partial\beta_n}{\partial\hat{q}} = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\{\dot{\hat{\Phi}}(\lambda_n) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\hat{\Phi}(\lambda_n)\}.$$

Следуя, например, работе [8], можно получить из /2.2/ и /2.3/, что для $f(x) \in L_2(0,\pi)$, имеют место формулы:

$$\frac{d}{ds}\lambda_n(q(x)+sf(x))|_{s=0} = \frac{-1}{\phi(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n)}\int_0^\pi f(x)\Phi(x,\lambda_n)dx, \qquad /2.11/$$

$$\frac{d}{ds}\beta_n(q(x)+sf(x)|_{s=0} = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\int_0^\pi f(x)[\dot{\Phi}(x,\lambda_n) - \qquad /2.12/$$

$$- \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\Phi(x,\lambda_n)]dx,$$

определяющие /при фиксированных h и H в /1.2// линейную по $s \to 0$ часть приращения $\lambda_n(s)$ и $\beta_n(s)$ при замене в /1.1/ $q(x)$ на $q(x)+sf(x)$. Далее, так как $\partial\psi(x,\lambda)/\partial h = 0$, $\partial\phi(x,\lambda)/\partial H=0$, то, дифференцируя по h и H соответственно равенства

$$0 = h\psi(0,\lambda_n(h)) - \psi'(0,\lambda_n(h)) \equiv \omega(\lambda_n(h)),$$

$$0 = \phi'(\pi,\lambda_n(H)) + H\phi(\pi,\lambda_n(H)) \equiv \omega(\lambda_n(H)),$$

находим, что частные производные /см. также [3] /

$$\partial\lambda_n/\partial h = -\phi^{-1}(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}^{-1}(\lambda_n), \quad \partial\lambda_n/\partial H = \beta_n. \qquad /2.13/$$

Отсюда, используя для β_n вытекающие из /2.1/ и /2.3/ записи

$$\beta_n(h) = -\psi^{-1}(0,\lambda_n(h))(h\dot{\psi}(0,\lambda_n(h)) - \dot{\psi}'(0,\lambda_n(h)))^{-1},$$

$$\beta_n(H) = -\phi(\pi,\lambda_n(H))(\dot{\phi}'(\pi,\lambda_n(H)) + H\dot{\phi}(\pi,\lambda_n(H))^{-1},$$

получаем

$$\frac{\partial\beta_n}{\partial h} = -\frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}^3(\lambda_n)}, \quad \frac{\partial\beta_n}{\partial H} = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\{\dot{\Phi}(\pi,\lambda_n) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\Phi(\pi,\lambda_n)\},$$

что вместе с /2.11/, /2.12/ и /2.13/ дает представления /2.10/. Теперь, для того чтобы получить формулы /2.4/, /2.5/, достаточно отметить, что если в $\mathfrak{H}_2$ ввести подпространство $\mathfrak{M} = \{\hat{f} \in \mathfrak{H}_2 | \alpha + \beta + \frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)dx = 0\}$, то из /2.8/ следует равенство $d\lambda_n(\tilde{q}+s\tilde{f})/ds|_{s=0} = d\lambda_n(\hat{q}+s\hat{f})/ds|_{s=0}$, где $\hat{f} \in \mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Введем в пространстве $\mathfrak{H}_1$ системы $\{\tilde{U}_n = (U_n(x), U_n^{(0)})\}_{n=1}^\infty$ и $\{\tilde{V}_n = (V_n(x), V_n^{(0)})\}_{n=1}^\infty$ следующим образом: если $H_1 \neq H_2$, положим

$$\tilde{U}_{2n+j} = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})\tilde{\Phi}(\lambda_{2n+j}), \quad (n=0,1,\dots;\ j=1,2), \qquad /2.14/$$

$$\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda),$$

где $\omega_j(\lambda)$- характеристическая функция /2.1/ задачи /1.12/, /1.13/$_j$; $\{\lambda_{2n+j}\}_{n=0}^\infty$ - ее с.з., $\tilde{\Phi}(\lambda)$ задается /2.7/; $\tilde{V}_n$ определим как в /1.20/; если $H_1=H_2$, функции $\tilde{U}_{2n+j}$ и $\tilde{V}_{2n+j}$ $(n=0,1,\dots;\ j=1,2)$ определим соответственно формулами /2.6/ и /1.9/. Важную роль в наших дальнейших построениях играет

Предложение 3 [4]. Для любой функции $\tilde{f} = (f(x), \alpha) \in \mathfrak{H}_1$ справедлива следующая формула разложения:

$$\lim_{M\to\infty} ||\tilde{f} - \sum_{n=1}^{2M}\tilde{V}_n(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1||_{\mathfrak{H}_1} = 0, \qquad /2.15/$$

где $(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1 = \int_0^\pi f(x)U_n(x)dx + \alpha U_n^{(0)}$ - коэффициенты разложения $\tilde{f}$ по определенной выше системе $\{\tilde{U}_n\}$. При этом система $\{\tilde{U}_n\}$ биортогонально сопряжена системе $\{\tilde{V}_n\}$, т.е.

$$(\tilde{U}_m, \tilde{V}_n)_1 = \delta_{m,n} \ (m,n=1,2,\dots). \qquad /2.16/$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функции

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(\tilde{q}_0)e^{-t} + \lambda_n^*(1 - e^{-t}),$$

$$\beta_n(t) = \beta_n(\tilde{q})e^{-t} + \beta_n^*(1 - e^{-t}), \qquad /3.1/$$

$$(n = 0,1,\dots;\ 0 \le t < \infty),$$

где $\tilde{q}_0 \in \Omega_I(N)$, $\lambda_n(\tilde{q}_0), \beta_n(\tilde{q}_0)$ - соответственно с.з. и н.ч. краевой задачи /1.1/, /1.2/ с $q_0(x)$, H_0, $h_0 = a_* - H_0 - \frac{1}{2}\int_0^\pi q_0(x)dx$, λ_n^*, β_n^* удовлетворяют /1.4/, /1.5/. Из предложения 1 /см. §1/ и определения $\Omega_I(N)$ /1.7/ следует, что функции /3.1/ определяют однозначно семейство краевых задач

$$y'' + (\lambda - q(x,t))y = 0, \quad (0 \le x \le \pi,\ 0 \le t < \infty), \qquad /3.2/$$

$$y'(0) - h(t)y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H(t)y(\pi) = 0, \qquad /3.3/$$

где

$$h(t) + H(t) + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x,t)dx = a^*, \quad (0 \le t < \infty), \qquad /3.4/$$

для которых

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(\tilde{q}(t)),\ \beta_n(t) = \beta_n(\tilde{q}(t)),\ \tilde{q}(t) \in \Omega_I(N). \qquad /3.5/$$

Далее из конкретного вида функций $\lambda_n(t)$ и $\beta_n(t)$ нетрудно вывести с помощью уравнения Гельфанда-Левитана /ядро которого, как хорошо известно, при условии $\tilde{q}_0 \in \Omega_I(N)$ вырожденное /см., напр., [9] /, что $\tilde{q}(t) \in C^1_{\mathcal{H}_1}$ $(0 \le t < \infty)$, причем для $\tilde{q}(t)$ при $t \to \infty$ существует предел $\tilde{q}_*$ /1.11/, удовлетворяющий /1.6/. Продифференцируем по t равенства /3.1/. С учетом /1.10/, /3.5/ и леммы 1 находим, что $\tilde{q}(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$(\tilde{q}_t, \tilde{U}_{2n+1}(\tilde{q}(t)))_1 = \beta_n(\tilde{q}(t))[\lambda_n^* - \lambda_n(\tilde{q}(t))],$$

$$(\tilde{q}_t, \tilde{U}_{2n+2}(\tilde{q}(t)))_1 = \beta_n^* - \beta_n(\tilde{q}(t)),$$

$$(n = 0, 1, \dots, N),$$

$$(\tilde{q}_t, \tilde{U}_{2n+1}(\tilde{q}(t)))_1 = (\tilde{q}_t, \tilde{U}_{2n+2}(\tilde{q}(t)))_1 = 0, \qquad /3.6/$$

$$(n = N+1, N+2, \dots),$$

где функции $\tilde{U}_{2n+j}$ определяются формулами /2.6/, /2.7/. Отсюда, применяя формулу обращения /2.15/, получаем, что $\tilde{q}(t)$ является решением задачи Коши /1.8/. Покажем теперь, что это решение единственно. Пусть $\tilde{q}(t) \in C^1_{\mathcal{H}_1}$ $(0 \le t < \infty)$ удовлетворяет /1.8/, где $\lambda_n(\tilde{q}(t))$ и $\beta_n(\tilde{q}(t))$ - с.з. и н.ч. краевой задачи /3.2/, /3.3/, $h(t)$ определяется из /3.4/. Из соотношения биортогональности /2.17/ вытекает, что уравнение /1.8/ эквивалентно системе уравнений /3.6/, которую в силу леммы 1 можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\lambda_n(\tilde{q}(t)) = \lambda_n^* - \lambda_n(\tilde{q}(t)),\ \frac{d}{dt}\beta_n(\tilde{q}(t)) = \beta_n^* - \beta_n(\tilde{q}(t)),$$

$$(n = 0,1,\dots).$$

Единственное решение этой системы при начальных условиях

$$\lambda_n(\tilde{q}(0)) = \lambda_n(\tilde{q}_0),\ \beta_n(\tilde{q}(0)) = \beta_n(\tilde{q}_0),\ \tilde{q}_0 \in \Omega_I(N),$$

очевидно, дается формулами /3.1/. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть заданы последовательности $\{\lambda^*_{2n+j}\}_{n=0}^\infty$ $(j = 1, 2)$, удовлетворяющие условиям /1.15/, /1.16/, и пусть $\{\lambda_{2n+j}(\tilde{q}_0)\}_{n=0}^\infty$ $(j = 1,2)$ с.з. краевых задач /1.12/, /1.13/$_j$, с $\tilde{q}_0 = (q_0(x), H_{1,0}) \in \Omega_{II}(N)$. Исходя из предложения 2 /см. §1/, легко установить, что функции

$$\lambda_{2n+j}(t) = \lambda_{2n+j}(\tilde{q}_0)e^{-t} + \lambda^*_{2n+j}(1 - e^{-t}),\ (0 \le t < \infty), \qquad /3.7/$$

$$(n = 0,1,\dots;\ j = 1,2)$$

определяют однозначно семейство краевых задач

$$y'' + (\lambda - q(x,t))y = 0, \quad (0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t < \infty)$$

$$y'(0) - h(t)y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j(t)y(\pi) = 0, \quad (j = 1,2),$$

где

$$h(t) + H_j(t) + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x,t)dx = a_j^*, \quad (j = 1,2),$$

для которых

$$\lambda_{2n+j}(t) = \lambda_{2n+j}(\tilde{q}(t)),\ \tilde{q}(t) = (q(x,t), H_1(t)) \in \Omega_{II}(N).$$

Для определенной таким образом функции $\tilde{q}(t)$ соотношение $\tilde{q}(t) \in C^1_{\mathcal{H}_1}$ $(0 \le t < \infty)$ здесь вытекает из результатов Левитана [9] /см. также Хохштадт [10]/. Отсюда, замечая, что из определения $\Omega(\lambda)$ /2.14/ имеем равенство

$$-\phi^{-1}(\pi,\lambda_{2n+j})\dot{\omega}_j^{-1}(\lambda_{2n+j}) = (-1)^j(a_2^*-a_1^*)\dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j}),$$

находим, в силу леммы 1, что $\tilde{q}(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$(\tilde{q}_t', \tilde{U}_{2n+j}(\tilde{q}(t)))_1 = \begin{cases} (-1)^j(a_2^*-a_1^*)^{-1}[\lambda^*_{2n+j}-\lambda_{2n+j}(\tilde{q}(t))], \\ \qquad\qquad (n=0,1,\dots,N;\ j=1,2) \\ 0 \qquad\qquad (n=N+1,N+2,\dots;\ j=1,2), \end{cases}$$

где $\tilde{U}_{2n+j}$ определяются /2.14/. Уравнение /1.19/ теперь получается непосредственно из формулы обращения /2.15/. Теорема доказана.

Замечание 1. Указанная в доказательствах теорем 1 и 2 эквивалентность задач Коши /1.8/ и /1.19/ соответственно равенствам /3.1/ и /3.7/ основана на известном факте [5], что для задачи Коши /1.21/ существует первый интеграл

$$f(v(t;v_0)) = f(v_0)e^{-t} + y_*(1-e^{-t}), \quad (0 \le t < \infty), \qquad /3.8/$$

т.е. ее решение $v(t;v_0)$ есть прообраз отрезка, соединяющего точки $f(v_0)$ и y_*:

$$v(t;v_0) = f^{-1}(f(v_0)e^{-t} + y_*(1-e^{-t})) \quad (0 \le t < \infty).$$

Полагая для о.з. 1

$$f \overset{\text{def}}{=} f_I(\tilde{q}) = \{\lambda_n(\tilde{q}), \beta_n(\tilde{q})\}_{n=0}^{\infty}, \qquad /3.9/$$
$$y_* = \{\lambda_n^*, \beta_n^*\}_{n=0}^{\infty},$$

а для о.з.

$$f \overset{\text{def}}{=} f_{II}(\tilde{q}) = \{\lambda_{2n+1}(\tilde{q}), \lambda_{2n+2}(\tilde{q})\}_{n=0}^{\infty}, \qquad /3.10/$$
$$y_* = \{\lambda^*_{2n+1}, \lambda^*_{2n+2}\}_{n=0}^{\infty},$$

получаем, что /3.8/ приводит к /3.1/ и /3.7/. Уравнения /1.8/ и /1.19/ есть уравнение /1.21/, в котором f определяется /3.9/ и /3.10/ соответственно.

Замечание 2. Ограничения /1.7/ и /1.18/ на областях начальных значений для задач Коши /1.8/ и /1.19/ /играющих

существенную роль лишь в доказательстве гладкости решений $\tilde{q}(t)$ / можно значительно ослабить, используя имеющиеся в [3] оценки, и показать, что с $N=\infty$ в /1.8/ и /1.19/ имеем $\Omega_I(N) = \Omega_{II}(N) = \mathfrak{N}_1$. Это предложение естественным образом согласуется с однозначной разрешимостью о.з. I и II во всем $\mathfrak{N}_1$ и с выпуклостью областей значений операторов $f_I(\tilde{q})$ и $f_{II}(\tilde{q})$. Отметим еще, что в некоторых исключительных случаях решения уравнений /1.8/ и /1.19/ можно выписать в явном виде. Простейший пример в этом направлении получается, если в /3.1/ положим $\lambda_n(\tilde{q}_0) = \lambda_n^*$ $(n=0,1,\dots)$, $\beta_n(\tilde{q}_0) = \beta_n^*(n \ne m, n=0,1,\dots)$ и $\beta_m^* > 0$ - произвольное число. Тогда с помощью уравнения Гельфанда-Левитана находим, что решение уравнения /1.8/ дается формулами:

$$q(x,t) = q_0(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[1+(\beta_m(\tilde{q}_0)-\beta_m^*)(1-e^{-t})\int_x^{\pi}\psi_m^2(\tilde{q}_0;s)ds],$$

$$H(t) = H_0 + (\beta_m(\tilde{q}_0) - \beta_m^*)(1-e^{-t}).$$

§4. РАСЧЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ I и II

Приведем некоторые общие соображения, которые легли в основу предлагаемых здесь численных методов решения о.з.

Из задачи Коши /1.21/, как правило, расчетная схема получается, если применить конечно-разностный метод Эйлера для ее приближенного решения, что приводит к следующей итерационной последовательности

$$v_{k+1} = v_k - r_k[f'(v_k)]^{-1}(f(v_k)-y_*), \quad k=0,1,\dots \ (0<r_k \le 1).$$

Здесь, по сравнению с классическим методом Ньютона-Канторовича /который получается при $r_k \equiv 1$ /, можно за счет выбора r_k существенно расширить область начальных значений v_0, для которых $\lim_{k\to\infty} v_k = v_*$: $f(v_*) = y_*$ /см. [6] /. Положив теперь $v_k = v_0$ в $[f'(v_k)]^{-1}$, получаем из /4.1/ модифицированный ньютоновский процесс

$$v_{k+1} = v_k - r_k[f'(v_0)]^{-1}(f(v_k)-y_*), \quad (0<r_k \le 1), \qquad /4.2/$$

который с вычислительной точки зрения часто оказывается более экономичным. Отметим, что этим путем в [7] были получены простые алгоритмы для решения обратной задачи рассеяния.

Применяя изложенную выше схему к задаче Коши /1.8/ с $\tilde{q}_0 = 0$,получаем следующий алгоритм типа /4.2/ для решения о.з. 1:

$$\tilde{q}_{k+1} = \tilde{q}_k + r_k\sum_{n=0}^{N}\{[\lambda_n^* - \lambda_n(\tilde{q}_k)]\beta_n(\tilde{q}_0)V_{2n+1}(\tilde{q}_0) +$$

$$+ [\beta_n^* - \beta_n(\tilde{q}_k)]\tilde{V}_{2n+2}(\tilde{q}_0)\}, \quad \tilde{q}_k = (q_k(x), H_k), \qquad /4.3/$$

$$h_k = a_* - H_k - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q_k(x)dx, \quad (k = 0,1,\dots) \quad \tilde{q}_0 = (q_0(x) \equiv 0,\ H_0 = 0),$$

где функции

$$\tilde{V}_{2n+1}(\tilde{q}_0) = \left(-\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n^{(0)}}(x-\pi)}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}}} - 2(x-\pi)\cos 2\sqrt{\lambda_n^{(0)}}(x-\pi),\ 0\right),$$

$$\tilde{V}_{2n+2}(\tilde{q}_0) = \left(-2\sqrt{\lambda_n^{(0)}}\sin 2\sqrt{\lambda_n^{(0)}}(x-\pi),\ -1\right), \quad \lambda_n^{(0)} = \lambda_n(\tilde{q}_0).$$

Аналогично, для решения о.з.II выводим из задачи Коши /1.19/ при $\tilde{q}_0 = 0$ итерационную последовательность

$$\tilde{q}_{k+1} = \tilde{q}_k + \frac{\tau_k}{a_2^* - a_1^*}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1,2}(-1)^j[\lambda_{2n+j}^* - \lambda_{2n+j}(\tilde{q}_0)]\tilde{V}_{2n+j}(\tilde{q}_0),$$

$$h_k = a_1^* - H_{1,k} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q_k(x)dx, \quad H_{2,k} = H_{1,k} + a_2^* - a_1^*, \qquad /4.4/$$

$$\tilde{q}_k = (q_k(x), H_{1,k}), \quad (k = 0,1,\dots), \quad \tilde{q}_0 = (q_0(x) \equiv 0,\ H_{1,0} = 0),$$

где $(\lambda_{2n+j}^{(0)} = \lambda_{2n+j}(\tilde{q}_0))$ – функции

$$V_{2n+j}(q_0) = \Big(-2\sqrt{\lambda_{2n+j}^{(0)}}\sin 2\sqrt{\lambda_{2n+j}^{(0)}}(x-\pi) -$$

$$- 2(a_2^* - a_1^*)\cos 2\sqrt{\lambda_{2n+j}^{(0)}}(x-\pi),\ -1\Big).$$

В предположении о некоторой априорной малости L_2-нормы искомого $q_*(x)$ в работе Барселона[11] была доказана сходимость последовательности типа /4.4/ для случая $h_* = H_{1,*} = \infty$, $H_{2,*} = 0$ /если в /1.2/ $h(H) = \infty$, то соответствующее условие заменяется на $y(0)(y(\pi)) = 0$/. /. Устойчивый метод численного решения обратной задачи в случае $q_*(x) = q_*(x-\pi)$, $h_* = H_* = \infty$ был предложен в [12].

В настоящей работе мы ограничимся численным исследованием сходимости итерационных процессов /4.3/ и /4.4/. Существенным фактором в реализации предложенных алгоритмов является эффективное решение /на каждом итерационном шаге/ прямой задачи /1.1/, /1.2/. Здесь нами использована известная разностная схема Тихонова и Самарского[13] с шагом $\pi/500$, для которой первые N собственных значений и соответствующие им

Таблица 1

x	$q_*(x)$	$q^{I}_{90}(x)$	$q^{II}_{90}(x)$
0.000	0.0000	.1920	.2918
.183	-.2793	-.3128	-.3767
.377	-.5359	-.5173	-.5211
.503	-.6345	-.6348	-.6303
.628	-.8090	-.8113	-.8034
.754	-.9049	-.8977	-.9440
.879	-.9696	-.9699	-.9864
1.005	-.9980	-1.0024	-.9703
1.131	-.9921	-.9916	-.9657
1.256	-.9510	-.9505	-.9680
1.382	-.8763	-.8751	-.9096
1.507	-.7705	-.7749	-.7643
1.633	-.6374	-.6395	-.5963
1.759	-.4817	-.4705	-.4760
1.884	-.3090	-.3206	-.3673
2.011	-.1253	-.1410	-.1361
2.136	.2507	.2569	.3144
2.262	.9635	.9322	.9279
2.387	1.5410	1.5626	1.5204
2.513	1.9021	1.9257	1.9098
2.639	1.9960	1.9777	2.0085
2.764	1.8096	1.8182	1.8153
2.953	1.0716	1.0576	1.0615
3.141	0.0000	0.0103	.0016

n	λ_n^*	$\lambda_n^{(90)}$	β_n^*	$\beta_n^{(90)}$
0	-.382782	-.382637	.030545	.030566
1	1.533956	1.533986	.609096	.609077
2	3.996371	3.996367	.931652	.931653
3	8.882540	8.882540	.666634	.666634
4	15.988978	15.988978	.625104	.625104
5	25.005193	25.005193	.638383	.638383
6	35.981982	35.981928	.637439	.637439
7	48.992093	48.992093	.635178	.635178

$h_* = 0.0000 \quad H_* = 0.0000 \quad a_* = 0.0000$

$h_{90} = -.0010 \quad H_{90} = .0010$

n	λ_{2n+1}^*	$\lambda_{2n+1}^{(90)}$	λ_{2n+2}^*	$\lambda_{2n+2}^{(90)}$
0	-.382782	-.382782	-.371807	-.371808
1	1.533956	1.533956	1.760789	1.760789
2	3.996371	3.996371	4.431745	4.431745
3	8.882540	8.882540	9.215627	9.215627
4	15.988978	15.988978	16.299802	16.299802
5	25.005193	25.005193	25.322633	25.322633

$h_* = 0.000 \quad H_{1,*} = 0.000 \quad H_{2,*} = .500 \quad a_{1,*} = 0.000 \quad a_{2,*} = .500$

$h_{90} = -.002 \quad H_{1,90} = .002 \quad H_{2,90} = .502$

$$q_*(x) = \begin{cases} -\sin\frac{3}{2}x, & 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi, \\ 2\sin(3x - 2\pi), & \frac{2}{3}\pi \le x \le \pi. \end{cases}$$

Таблица 2

X	$q_*(x)$	$q^{I}_{80}(x)$	$q^{II}_{80}(x)$
0.000	0.0000	-.0547	.0002
.188	.3681	.3865	.3635
.377	.6845	.6790	.6865
.503	.8443	.8362	.8437
.628	.9496	.9528	.9510
.754	.9980	1.0046	.9982
.879	.9822	.9826	.9835
1.005	.9048	.9004	.9050
1.131	.7705	.7689	.7695
1.256	.5877	.5907	.5873
1.382	.3681	.3702	.3689
1.507	.1253	.1235	.1260
1.633	-.1253	-.1277	-.1258
1.759	-.3681	-.3673	-.3689
1.884	-.5877	-.5855	-.5874
2.011	-.7705	-.7704	-.7695
2.136	-.9048	-.9068	-.9049
2.262	-.9822	-.9829	-.9834
2.387	-.9980	-.9963	-.9982
2.513	-.9510	-.9499	-.9497
2.639	-.8443	-.8455	-.8437
2.764	-.6845	-.6861	-.6863
2.953	-.3681	-.3664	-.3635
3.141	0.0000	0.0000	.0004

n	λ^*_n	$\lambda^{(80)}_n$	β^*_n	$\beta^{(80)}_n$
0	-.039085	-.039085	.381977	.381977
1	1.395254	1.395254	.243702	.243702
2	4.285993	4.285993	.574306	.574306
3	9.325821	9.325821	.604159	.604159
4	16.322036	16.322026	.619222	.619222
5	25.319180	25.319180	.625764	.625764

$h_* = 0.0000$ $H_* = .5000$ $a_* = .5000$
$h_{80} = .0002$ $H_{80} = .4998$

n	λ^*_{2n+1}	$\lambda^{(80)}_{2n+1}$	λ^*_{2n+2}	$\lambda^{(80)}_{2n+2}$
0	-.295130	-.295140	-.039085	-.039091
1	1.263178	1.263185	1.395254	1.395257
2	3.980022	3.980019	4.285993	4.285991
3	9.015115	9.015116	9.325821	9.325823
4	16.007522	16.007522	16.322036	16.322037
5	25.003153	25.003153	25.319180	25.319180

$h_* = 0.000$ $H_{1,*} = 0.000$ $H_{2,*} = .500$ $a_{1,*} = 0.000$ $a_{2,*} = .500$
$h_{80} = .000$ $H_{1,80} = -.000$ $H_{2,80} = .500$

$$q_*(x) = \sin 2x, \quad (0 \le x \le \pi)$$

Таблица 3

X	$q_*(x)$	$q^{I}_{70}(x)$	$q^{II}_{70}(x)$
0.000	0.0000	-.3293	-.2309
.188	.1873	.2322	.2031
.377	.3681	.3525	.3353
.503	.4817	.4377	.5059
.628	.5878	.6346	.5945
.754	.6845	.6989	.6644
.879	.7705	.7345	.7775
1.005	.8442	.8741	.8553
1.131	.9048	.9257	.8927
1.256	.9510	.9207	.9492
1.382	.9823	.9902	.9931
1.507	.9980	1.0274	.9928
1.633	.9980	.9740	.9916
1.759	.9823	.9714	.9905
1.884	.9510	.9842	.9515
2.011	.9048	.8914	.8971
2.136	.8442	.8168	.8485
2.262	.7705	.8057	.7748
2.387	.6845	.6899	.6779
2.513	.5878	.5425	.5879
2.639	.4817	.5113	.4878
2.764	.3681	.4024	.3640
2.953	.1873	.1131	.1883
3.141	0.0000	0.0000	-.0003

n	λ^*_n	$\lambda^{(70)}_n$	β^*_n	$\beta^{(70)}_n$
0	.613584	.613412	.394033	.393703
1	1.416286	1.414799	.681297	.681475
2	4.612421	4.612167	.592533	.592695
3	9.622959	9.623055	.616296	.616294
4	16.627841	16.627909	.624728	.624724
5	25.629362	25.629408	.628847	.628845
6	36.628697	36.628731	.631156	.631155
7	49.626011	49.626042	.632576	.632576

$h_* = 0.0000$ $H_* = 0.0000$ $a_* = 1.0000$
$h_{70} = .0170$ $H_{70} = -.0181$

n	λ^*_{2n-1}	$\lambda^{(70)}_{2n+1}$	λ^*_{2n+2}	$\lambda^{(70)}_{2n+2}$
0	.613584	.613598	.729685	.729708
1	1.416286	1.416310	1.737875	1.737889
2	4.612421	4.612409	4.901794	4.901782
3	9.622959	9.622952	9.926747	9.926741
4	16.627841	16.627837	16.937444	16.937440
5	25.629362	25.629360	25.941916	25.941914
6	36.628697	36.628695	36.942935	36.942934
7	49.626011	49.626010	49.941296	49.941295

$h_* = 0.000$ $H_{1,*} = 0.000$ $H_{2,*} = .500$ $a_{1,*} = 1.000$ $a_{2,*} = 1.500$
$h_{70} = .000$ $H_{1,70} = -.000$ $H_{2,70} = .500$

$$q_*(x) = \sin x, \quad (0 \le x \le \pi)$$

собственные функции вычислялись по блочно-степенному методу[14]. Значение $r_0=0{,}02$ в дальнейшем увеличивается по мере убывания невязки $\delta_I^{(k)}=(\sum_{n=0}^{N}(\lambda_n(\tilde{q}_k)-\lambda_n^*)^2+(\beta_n(\tilde{q}_k)-\beta_n^*)^2)^{1/2}$ /либо $\delta_{II}^{(k)}=(\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1,2}(\lambda_{2n+j}(\tilde{q}_k)-\lambda_{2n+j}^*)^2)^{1/2}$/.

Число N слагаемых в рядах /4.3/ и /4.4/ определяется соответственно из условий $|\lambda_N^*-\lambda_N(\tilde{q}_0)|$, $|\beta_N^*-\beta_N(\tilde{q}_0)|\le 10^{-5}$ и $|\lambda_{2N+j}^*-\lambda_{2N+j}(\tilde{q}_0)|\le 10^{-5}$ $(j=1,2)$. Результаты расчетов для некоторых модельных обратных задач I и II приведены в табл. 1-3. Расчеты проводились на ЭВМ CDC-6500 ОИЯИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, с.309-360.
2. Borg G. Acta Math., 1945, 78, No.2, p.1-96.
3. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. УМН, 1964, 19, вып.2, с.3-63.
4. Кирчев К.П., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-12227, Дубна, 1979.
5. Гавурин М.К. Изв. вузов, сер. матем., 1958, №5/6/, с.18-31.
6. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, вып.1, с.123-158.
7. Визнер Я. и др. ЭЧАЯ, 1978, т.8, вып.3, с.710-768.
8. Kaup D.J. SIAM Appl.Math., 1976,vol.31,No.1, p.121-133.
9. Левитан Б.М. Изв. АН СССР, 1978, 42, №1, с.185-199.
10. Hochstadt J.of Diff. Equations,1977,23, p.402-413.
11. Borcilon V. J.Math.Phys., 1974, v.15, No.4,p.429-436.
12. Hald O.H. Math.of Comput., 1978, v.32, No.143, p.687-705.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. ЖВМ и МФ, 1961, 1, №5, с.784-805.
14. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis, 1976, Prentice-Hall Inc., N.J.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 ноября 1979 года.