



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

1141/
2-80

18/3-80

P5 - 12914

Г. Мюллер

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР
ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ЦЕПЕЙ

Направлено в "Nachrichtentechnik-Elektronik"
(Berlin - DDR).

1980

1. Введение

Дискретное преобразование Фурье рассматривают очень часто как приближение непрерывного преобразования Фурье. Приближение состоит в том, что ввиду конечности числа используемых точек временной и частотный интервалы ограничены. Часто применяют дифференциальный оператор непрерывного преобразования Фурье. Ограничение временного интервала приводит к периодичности временной функции, ограничение частотного интервала сильно сказывается на результатах (явление Гиббса). Обычно влияние ограничения частотного интервала на действительную и мнимую части функции различно. Поэтому расчетные результаты имеют плохую точность. В последние годы пытались улучшить преобразование Фурье с помощью слабого ограничения частоты. Тем самым осуществляют сглаживание решения, и осцилляции решения уменьшаются^{/1/}. В^{/2/} дана функция ограничения, которая оптимальна при анализе цепей, содержащих линии связи и интегральные схемы. Кроме того, в этой работе интегрирование выполнено вдоль прямой, лежащей справа от мнимой оси, как в случае преобразования Лапласа. Недостатки, возникающие из-за дополнительной дискретизации, можно исключить с помощью специального дифференциального оператора для дискретных временных и спектральных функций. Впервые такая методика была изложена в^{/3/} и затем в^{/4/} как часть дискретной теории систем.

В данной работе получены операторы для разностей любых порядков и показано, что оператор непрерывного преобразования во временной области, по-



строенный как ряд разностей, обладает плохой сходимостью. Это является основным недостатком непрерывного оператора при анализе цепей с помощью дискретного преобразования Фурье. Оптимальным дифференциальным оператором оказался оператор конечной разности первого порядка назад. С помощью этого оператора проанализирован фильтр нижних частот и показано, что он имеет преимущества в сравнении с непрерывным оператором. Результаты анализа более сложной цепи, содержащей 9 линий связи и 10 емкостных нагрузок, дают неосциллирующие кривые, которые хорошо соответствуют экспериментальным наблюдениям. Дискретное преобразование Фурье выполнялось на ЭВМ с помощью программы^{5/}.

2. Дифференциальный оператор дискретного преобразования Фурье

Дискретное преобразование Фурье представляет собой линейную матричную операцию. При этом вектор дискретной временной функции (x) умножается на комплексную матрицу (F) Фурье. Вообще говоря, результат является комплексным вектором (X). Обратная операция позволяет определить оригинал по спектральной функции.

Матрица (F) имеет элементы

$$f_{ik} = e^{-j2\pi \frac{ik}{N}} \quad (i, k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1)$$

и обратная матрица (F)⁻¹ - элементы

$$f_{ik}^* = \frac{1}{N} e^{j2\pi \frac{ik}{N}}. \quad (2)$$

Определяя дискретное преобразование Фурье как

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{ik}{N}} X_i, \quad (3)$$

легко получить конечную разность первого порядка назад:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{ik}{N}} \frac{1 - e^{-j2\pi \frac{i}{N}}}{\Delta t} X_i. \quad (4)$$

При этом видно, что дифференцированию функции (образованию разности) по времени соответствует умножение фурье-образа на оператор

$$p_2 = \frac{1 - e^{-j2\pi \frac{i}{N}}}{\Delta t}. \quad (5)$$

Точно так же преобразуются и другие разности. Разности вперед соответствует оператор

$$p_1 = \frac{e^{j2\pi \frac{i}{N}} - 1}{\Delta t}, \quad (6)$$

собственные частоты которого лежат в левой полуплоскости. Поэтому этот оператор не подходит для анализа действительных цепей. Для центральной разности, пользуясь правилом трапеций, получаем оператор

$$p_3 = \frac{j}{\Delta t} \sin 2\pi \frac{i}{N}. \quad (7)$$

Для аппроксимации производной можно брать большее число значений. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, по значениям функции в пяти точках находим

$$\frac{dx}{dt} \Big|_k \approx \frac{4}{3} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{3} \frac{x_{k+2} - x_{k-2}}{4\Delta t}, \quad (8)$$

что эквивалентно точному дифференцированию полинома четвертого порядка. Соответствующий оператор имеет вид

$$p_5 = \frac{j}{\Delta t} \left[\frac{4}{3} \sin 2\pi \frac{i}{N} - \frac{1}{6} \sin 4\pi \frac{i}{N} \right]. \quad (9)$$

Таким образом, получаем общую формулу для коэффициентов синус-ряда,

$$p_{2m+1} = \frac{j}{\Delta t} \sum_{q=1}^m a_q \sin 2\pi \frac{qi}{N}, \quad (10a)$$

$$a_q = \frac{[(q-1)!]^2}{(2q-1)!} (-1)^{q-1}, \quad (10б)$$

$$a_q = a \prod_{r=q+1}^m \frac{r^2}{r^2 - q^2}, \text{ если } q < m, \quad (10в)$$

с помощью которой определена зависимость собственных частот от i с параметром m , показанная на рис.1.

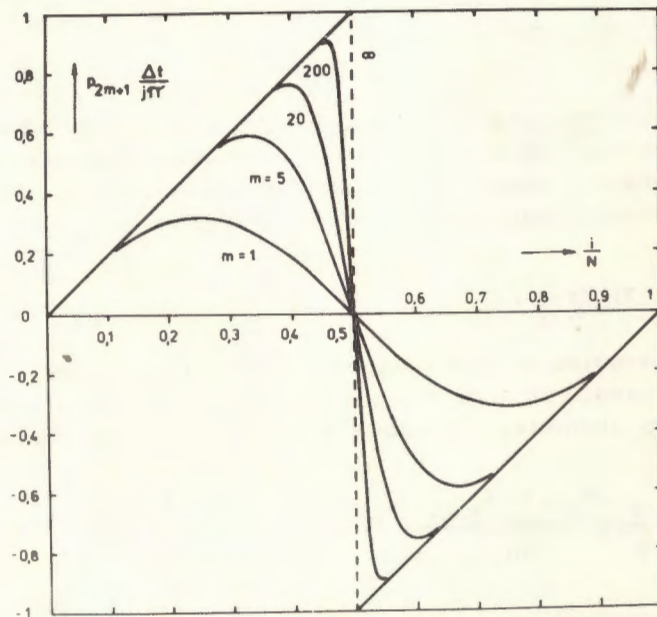
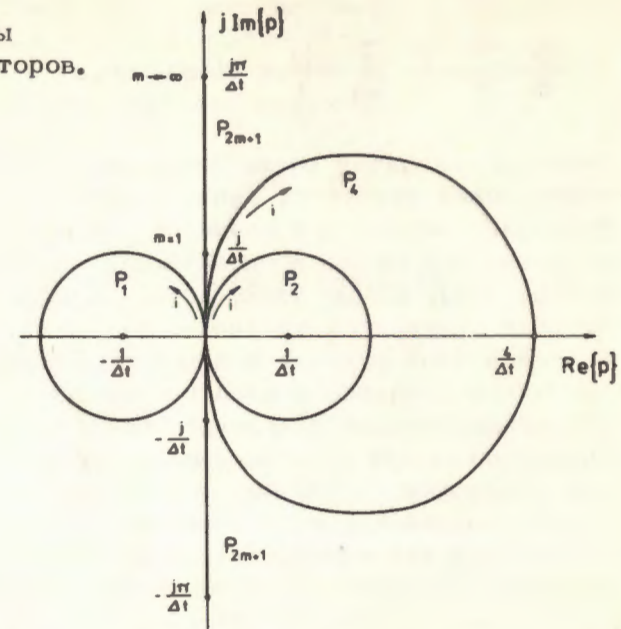


Рис.1. Относительная функция оператора для различных разностей.

Рис.2. Годографы различных операторов.



Используя значения в точках $k, k-1, k-2$, получаем оператор второго порядка разностей назад:

$$p_4 = \frac{\frac{3}{2} - 2e^{-j2\pi \frac{i}{N}} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi \frac{i}{N}}}{\Delta t}. \quad (11)$$

Годографы различных операторов даны на рис.2.

3. Проблема выбора дискретного дифференциального оператора

Из определения симметричных операторов следует, что функция оператора нечетна относительно $i=N/2$ и сходится очень медленно к оператору непрерывного преобразования Фурье. Максимальная частота при $m \rightarrow \infty$ есть $f = \frac{1}{2\Delta t}$ (теорема Котельникова). Функция оператора при $m \rightarrow \infty$ представляет собой во временной области бесконечный ряд разностей

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_k = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r} (x_{k+r} - x_{k-r}) . \quad (12)$$

Этот ряд сходится очень медленно, и для определения производной требуется знать много значений временной функции. Из-за этого возникают ошибки при расчете переходных процессов в окрестности точек разрыва (см. пример 5.1). Кроме того, из-за периодичности временной функции получается труднообозримая суперпозиция из N значений этой функции в периоде. Тестовые расчеты переходного процесса в фильтре нижних частот показали, что симметричные операторы любого порядка практически не пригодны для анализа рассматриваемых цепей, потому что возникают осцилляции и нарушения принципа причинности. Только при использовании оператора p_3 в (7) получаются в первой трети периода довольно хорошие результаты. Операторы высшего порядка разностей назад (11) также вызывают осцилляции при малых значениях величины постоянной времени. Поэтому оказывается, что только оператор p_2 приводит к оптимальному результату. При применении этого оператора в системе разностных уравнений имеется связь только с предшествующим периодом временной функции. Поэтому, с учетом периодичности, анализ с помощью преобразования Фурье и оператора p_2 дает результат, совпадающий с прямым решением системы временных разностных уравнений. Это значит, что точность решения не связана с использованием преобразования Фурье, а зависит только от степени приближения производной. Исходя из этого можно определить ошибки вычислений.

4. Оператор сдвига

Введенный оптимальный дифференциальный оператор достаточен для анализа цепей с линейными сосредоточенными параметрами. Элементы с распределенными параметрами (линии) требуют введения оператора сдвига. При

переходе к дискретному преобразованию Фурье в операторе непрерывного преобразования Фурье $e^{-j\omega t}$ нельзя понимать $j\omega$ как оператор производной. Из (3) следует, напротив, что дискретный оператор сдвига

$$p_v = e^{-j2\pi \frac{ik_v}{N}} . \quad (13)$$

При этом k_v - целое число сдвигов в единицах временной разности Δt .

5. Примеры и применения

Дискретное преобразование Фурье обеспечивает анализ линейных цепей, если спектральная функция известна. Некоторые примеры представлены для того, чтобы показать преимущества этого метода при использовании оператора p_2 .

5.1. Дифференцирование дискретной функции

Периодическая дискретная функция принимает в периоде ($N=32$) сначала 16 раз значение "1" и затем 16 раз значение "0". В результате дифференцирования этой функции с помощью непрерывного оператора $j\omega$ получаются следующие значения первой производной в последовательных точках ($\Delta t = 1$): 0,694750; - 0,311705; 0,201382; - 0,152038 и т.д. Их можно определить также с помощью уравнения (12), однако в этом случае для достижения той же точности требуется несколько тысяч членов ряда. Напротив, оператор p_2 дает такие значения: 1,000000; 0,000000; 0,000000; 0,000000 и т.д. Это подтверждает равенство (12) и, с другой стороны, показывает недостатки непрерывного оператора $j\omega$.

5.2. Переходные процессы в фильтре нижних частот

Дифференциальное уравнение фильтра нижних частот преобразовано с помощью операторов $j\omega$ и p_2 . После

этого с помощью обратного преобразования Фурье рассчитаны соответствующие импульсные реакции $H(T)$ и их суммы (интегралы) $G(T)$. При этом временная разность Δt в 2 раза больше постоянной времени RC . На рис.3 показаны результаты расчета и точные решения на основе непрерывной входной функции. Численные результаты, приведенные в табл.1 и 2, еще нагляднее демонстрируют свойства операторов $j\omega$ и p_2 . Они соответствуют точному решению системы разностных уравнений во временной области.

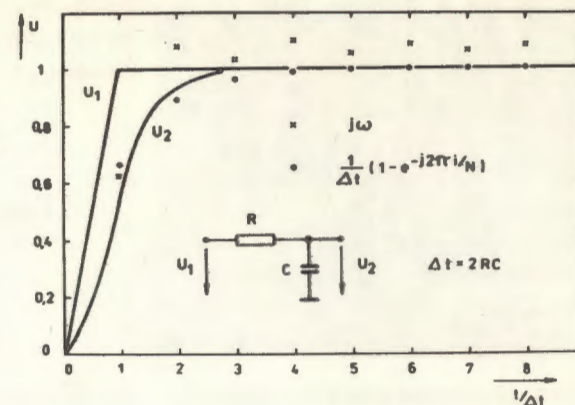
Табл.1. Импульсная реакция $H(T)$ фильтра нижних частот и ее сумма $G(T)$, рассчитанные с помощью оператора $j\omega$
 $\tau/\Delta t = .50$

$H(T)$				
.638959	.441845	-.044126	-.056243	-.036215
-.028375	-.022474	-.018249	-.014960	-.012290
-.010040	-.008083	-.006334	-.004752	-.003233
-.001739	-.000400	-.000996	-.002460	-.003853
-.005397	-.007055	-.008834	-.010954	-.013364
-.016259	-.019913	-.024726	-.031533	-.042150
-.061533	-.103815			
$G(T)$				
0.000000	.638959	1.080805	1.036678	1.092921
1.056705	1.085080	1.062607	1.040856	1.065896
1.078136	1.068146	1.076229	1.059895	1.074628
1.071335	1.073194	1.072734	1.071403	1.074204
1.070345	1.075742	1.068687	1.077571	1.065617
1.079392	1.063713	1.083626	1.058900	1.090433
1.048292	1.103815			

Табл.2. Импульсная реакция $H(T)$ и ее сумма, рассчитанные с помощью оператора p_2
 $\tau/\Delta t = .50$

$H(T)$				
.666667	.222222	.074074	.024691	.008230
.002743	.000914	.000305	.000102	.000034
.000011	.000004	.000001	.000000	.000000
.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
-.000000	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000
-.000000	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000
-.000000	-.000000	-.000000	-.000000	-.000000
$G(T)$				
0.000000	.666667	.888889	.952963	.987654
.395395	.978628	.995433	.998448	.999943
.399393	.993994	.999398	.999999	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Рис.3. Сравнение операторов $j\omega$ и p_2 по временной характеристике фильтра нижних частот.



5.3. Анализ цепи с линиями связи

Анализируемая цепь, содержащая активную логическую схему (ТТЛ), 10 нагрузочных логических схем и 9 линий связи, показана на рис.4. Согласно [2] линии характеризуются передаточной функцией

$$F = \frac{2R_L p_v}{R_L (p_v^2 + 1) + Z (p_v^2 - 1)} \quad (14)$$

и входным сопротивлением

$$Z = \frac{R_L (p_v^2 + 1) + Z (p_v^2 - 1)}{Z (p_v^2 + 1) + R_L (p_v^2 - 1)} Z, \quad (15)$$

где Z - волновое сопротивление линии, R_L - комплексное нагрузочное сопротивление, содержащее входное сопротивление следующей линии и входное сопротивление нагрузочной логической схемы в этом узле, и p_v - оператор сдвига с $k_v = 1$ в уравнении (13). Общая передаточная

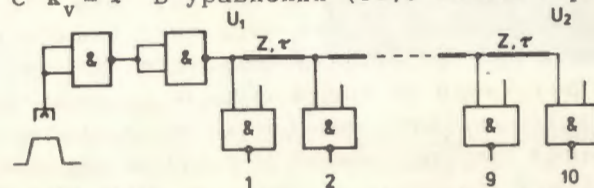


Рис.4. Анализируемая цепь, содержащая логические схемы ТТЛ (МН 7400), $Z = 93$ Ом, $\tau = \Delta t = 0,05$ нс.

функция в любом узле получается последовательно с помощью (14) и (15). Простая линейная эквивалентная схема логических элементов /2/ показана на рис.5. Внутрен-

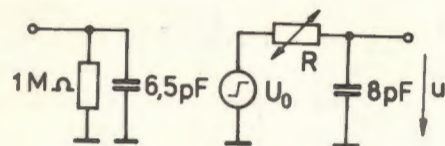


Рис.5. Эквивалентная схема МН 7400.

нее сопротивление R зависит от состояния элемента. Во время положительного фронта импульса и в его верхнем состоянии $R = 125 \text{ Ом}$, а во время отрицательного фронта импульса и в его нижнем состоянии $R = 40 \text{ Ом}$ (модель 1). Входное сопротивление велико в обоих состояниях. Спектральное разложение получено с помощью оператора p_2 . Если интересоваться только реакцией на одно переключение, решение получается однократным обратным преобразованием Фурье. В случае применения полного коммутационного цикла нужны еще свертки, которые необходимы при использовании нелинейной модели II в нижнем состоянии логических элементов с $R = 9 \text{ Ом}$ для $u > 0$ и $R = 58 \text{ Ом}$ для $u < 0$. Результаты расчета для входного импульса с полушириной 60 нс показаны на рис.6а и 7а. При этом видно, что в модели I появляются сильные колебания отрицательной полярности (пунктирные линии). Эти результаты отличаются от результатов измерений, которые показаны на рис.6б и 7б. Расхождения связаны с входной нелинейностью логических элементов, которую нельзя учесть в расчетах, если пользоваться преобразованием Фурье. Поэтому при анализе цепи, содержащей большое число логических элементов, предпочтительна модель I. Решение при $N = 256$ не имеет численных колебаний, которые типичны при применении оператора $j\omega$, вследствие небольшого затухания на максимальной частоте. Затраты машинного времени слабо зависят от числа узлов цепи. Они составляют приблизительно 2 секунды на решение рассматриваемой проблемы с помощью ЭВМ CDC-6500.

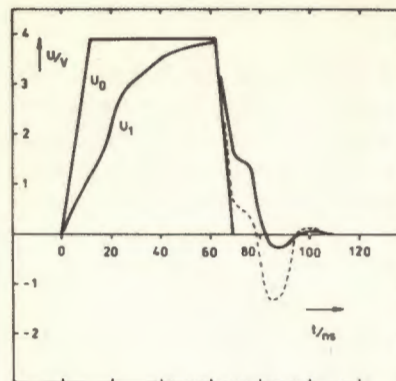


Рис.6а. Расчетная функция напряжения U_1 на входе линии. Положительный фронт напряжения $U_0 - 12 \text{ нс}$, отрицательный фронт - 6 нс. Пунктирная линия получена на основе модели II.

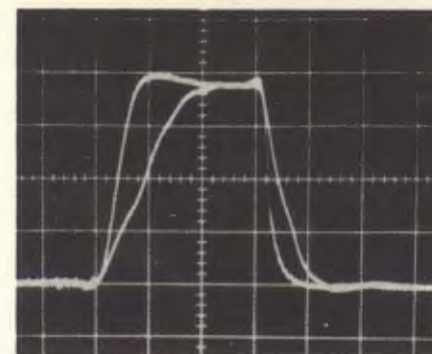


Рис.6б. Измеренные напряжения U_1 и U_0 ($U_0 -$ напряжение без нагрузки), полученные на экране стробоскопического осциллографа (20 нс/дел., 1 В/дел.). Нагрузка монитором составляет только 2 пФ.

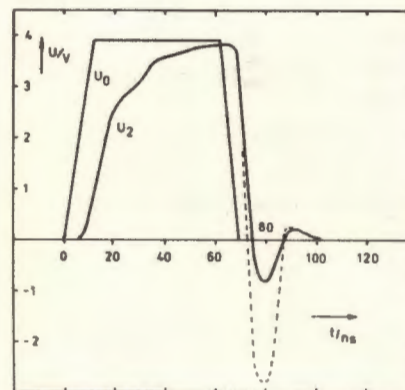


Рис.7а. Расчетная функция напряжения U_2 на выходе линии.

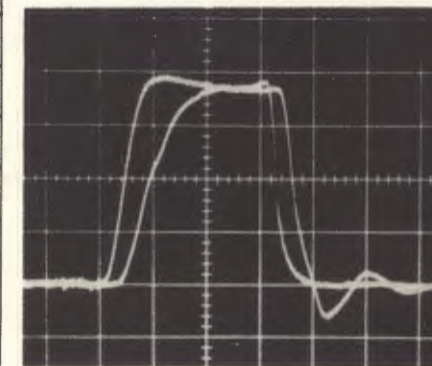


Рис.7б. Измеренные напряжения U_2 и U_0 .

6. Заключение

Сравнение всех возможных дискретных дифференциальных операторов показало, что оператор разности первого порядка назад оптимален. Дифференциальный оператор непрерывного преобразования Фурье представляет собой во временной области бесконечный ряд разностей, и вследствие плохой сходимости ряда его не рекомендуется использовать для анализа цепей. Дискретное преобразование Фурье, основанное на указанном выше операторе, имеет особые преимущества при анализе цепей, содержащих элементы с распределенными параметрами, вследствие сокращения затрат на программирование и машинное время. При этом цепями с распределенными параметрами могут быть и линии связи, и RC -линии в эквивалентных схемах транзисторов или в моделях теплопроводности. Анализ линий с потерями требует применения двух операторов, а именно: оператора сдвига для описания задержки и дифференциального оператора для описания затухания.

В заключение автор благодарит Э.А.Перельштейна за поддержку работы.

Литература

1. Splettstösser W. A.E.Ü., 1978, 32, p.267-275.
2. Rabbat N.B. et al. IEEE Trans. on Computers, 1976, p.221-227.
3. Klein W. A.E.Ü., 1969, 23, p.295-300.
4. Klein W. A.E.Ü., 1974, 28, p.71-80.
5. Kremer H. Elektronische Datenverarbeitung, 1969, 11, p.281-284.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 ноября 1979 года.