объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12806

В.А.Загребнов

О СЕМЕЙСТВАХ ГИББСОВСКИХ ПОЛУГРУПП

1979

Загребнов В.А. P5 - 12806

О семействах гиббсовских полугрупп

Показано, что семейство гиббсовских полугрупп компактно в ядерной топологии, если соответствующие генераторы принадлежат монотонному и, в определенном смысле, ограниченному семейству самосопряженных операторов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zagrebnov V.A. P5 - 12806

On Families of Gibbs Semigroups

The families of Gibbs semigroups with generators from conveniently bounded monotonous families of self-adjoint operators are proved to be compact in trace-norm topology.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

I. Пусть $\mathcal{H}$ -сепарабельное гильбертово пространство, а $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$- банахово пространство компактных операторов с конечной p - нормой:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ ,$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ -сингулярные числа оператора $A \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$, т.е. $\lambda_n = \mu_n(|A|)$. Здесь $\mu_n(\cdot)$- n-ое собственное значение, с учетом повторений, а $|A| = \sqrt{AA^*}$- абсолютная величина оператора A . Для банаховых пространств $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ имеют место соотношения: $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$(tr - класс, или ядерные операторы) $\subset \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ (операторы Гильберта-Шмидта) $\subset \ldots \subset \mathfrak{C}_p(\mathcal{H}) \subset \ldots \subset \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ (компактные операторы) $\subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (ограниченные линейные операторы) [I].

В статистической механике естественно возникают сильно непрерывные на $\mathbb{R}_+^1 \cup \{0\}$ полугруппы самосопряженных операторов $\{Q(t)\}$, $Q : \mathbb{R}_+^1 \cup \{0\} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ со значениями в $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ при $t \in \mathbb{R}_+^1$. Они связаны с оператором $\exp(-\beta H)$, порождающим матрицу плотности. Здесь H – гамильтониан системы, а $\beta^{-1} \in \mathbb{R}_+^1$ – ее температура. Обычно полугруппы $Q(t)$ называют гиббсовскими [2,3] . Однако в некоторых случаях, например, при аналитическом продолжении по константе взаимодействия [3], оператор H не является самосопряженным, а лишь нормальным m -секториальным оператором (см.[4,5]), причем по-прежнему $\exp(-tH) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ при $t \in \mathbb{R}_+^1$. Поэтому удобнее следующее более общее

<u>Определение I.</u> Сильно непрерывная на $\mathbb{R}_+^1 \cup \{0\}$ полугруппа операторов $Q(t)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется гиббсовской, если $Q : \mathbb{R}_+^1 \to \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$.

Как известно, (см. [4, том 2, X.8] и [5,IX]), каждая сильно непрерывная полугруппа порождается замкнутым плотно определенным квази-m- аккретивным оператором T (генератор полугруппы) и имеет вид $Q(t)=\exp(-tT)$.

Пример I. Квази-m- аккретивные генераторы гиббсовских полугрупп возникают в теории возмущений [6-9]. Пусть самосопряженный оператор $T\geq 0$ порождает гиббсовскую полугруппу, а симметрический оператор U является T-ограниченным с T-границей $b<1$. Это означает, что для любого вектора ψ из $D(T)$ — области определения оператора T — имеем: $\|U\psi\|\leq a\|\psi\|+b\|T\psi\|$.
Тогда для $\{\lambda\in\mathbb{C}: |\lambda|<b^{-1}\}$ оператор $H_\lambda=T+\lambda U$ хорошо определен на $D(T)$ как алгебраическая сумма (см. [5]) и является генератором гиббсовской полугруппы. Причем, множество его числовых значений $\Theta(H_\lambda)=\{(\psi,H_\lambda\psi)$, где $\psi\in D(T)$ и $\|\psi\|=1\}$ не только принадлежит полуплоскости $\mathbb{C}_+(\gamma)=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,z>\gamma\}$ (квази-m- аккретивность), но и сектору $S_{\gamma,\omega}=\{z\in\mathbb{C}: |\arg(z-\gamma)|<\omega\}$, где $\gamma=-a|\lambda|(1-b^2|\lambda|^2)^{-3/2}$ и $\omega=\operatorname{arctg}(b|\lambda|/\sqrt{1-b^2|\lambda|^2})$. Поэтому генератор H_λ является, при $|\lambda|<b^{-1}$, m-секториальным.

Заметим, что гиббсовские полугруппы в квантовой статистической задаются иногда как пределы последовательностей полугрупп, соответствующих некоторым семействам гамильтонианов [IO,II]. Поэтому целью настоящей работы является формулировка условий компактности семейств гиббсовских полугрупп в топологии пространства $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ с помощью задания условий на соответствующие семейства генераторов.

2. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство полуограниченных снизу самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 2. Назовем семейство $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ монотонным, если из любой его последовательности можно извлечь упорядоченную подпоследовательность $\{T_{\alpha_k}\}_{k=1}^{\infty}$ в том смысле, что $T_{\alpha_1}\leq T_{\alpha_2}\leq\ldots$ или $T_{\alpha_1}\geq T_{\alpha_2}\geq\ldots$.

Лемма. Пусть $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ — упорядоченная последовательность самосопряженных операторов, обладающая следующими свойствами:

(i) существует самосопряженный оператор T_- и такое $\gamma\in\mathbb{R}^1$, что $\gamma\leq T_-\leq T_k$ для всех $k\geq 1$, кроме того, $\exp(-tT_-)\in\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ для $t\in\mathbb{R}^1_+$ и некоторого $1\leq p<\infty$;

(ii) существует самосопряженный оператор T_+ такой, что $T_k\leq T_+$ для всех $k\geq 1$. Тогда существует такой самосопряженный полуограниченный снизу оператор T, что для $t\in\mathbb{R}^1_+$ имеем:

(а) $Q(t)=\exp(-tT)\in\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$;

(б) $Q(t)=\|\cdot\|_1\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\exp(-tT_k)$.

Доказательство. (а) Из определения пространства $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ следует, что, если $A\in\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$, то $|A|^p\in\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Поэтому из условия (i) следует, что спектр оператора T_- чисто дискретный и, в силу полугруппового свойства, $\exp(-tT_-)=\left(\exp(-\tfrac{t}{p}T_-)\right)^p\in\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Из монотонности последовательности $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ее условной ограниченности: $T_-\leq T_k\leq T_+$ следует существование такого самосопряженного оператора T, что $T_-\leq T\leq T_+$, причем T является пределом этой последовательности в обобщенном сильном смысле [5,VIII, §3]. Тогда из принципа мини-макса Вейля следует, что спектр оператора T так же чисто дискретный, и $\mu_n(T_-)\leq\mu_n(T)$. Последнее означает, что $\exp(-tT)\in\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ для $t\in\mathbb{R}^1_+$.

(б) Из условия (i) и пункта (а) следует, что резольвенты $\{R_\zeta(T_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $R_\zeta(T)=(\zeta-T)^{-1}$ для $\{\zeta\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\,\zeta\neq 0\}$ и $\zeta<\gamma$ принадлежат, по крайней мере, пространству $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. С другой стороны, из монотонности последовательности $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ получаем, что для $\zeta < \gamma$ последовательность резольвент $\{R_\zeta(T_k)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна. Поскольку обобщенная сильная сходимость $T_k \to T$ означает сходимость соответствующих резольвент в сильной операторной топологии для $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \neq 0\}$ и $\zeta < \gamma$, то из отмеченной выше компактности и монотонности резольвент следует, что их сходимость имеет место по операторной норме[5, УШ, §3] :

$$R_\zeta(T) = \|\cdot\|\text{-}\lim_{k\to\infty} R_\zeta(T_k). \tag{I}$$

В свою очередь, из (I) следует, что для $t \in \mathbb{R}_+^1 \cup \{0\}$ имеем (см. [4, том I, УШ, 7]):

$$Q(t) = \|\cdot\|\text{-}\lim_{k\to\infty} Q_k(t) , \tag{2}$$

где $Q_k(t) = \exp(-tT_k)$. Полугруппы $\{Q_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $Q(t) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ для $t \in \mathbb{R}_+^1$, поэтому [5,X,§I] I) из (2) следует

$$\mu_n(Q(t)) = \lim_{k\to\infty} \mu_n(Q_k(t)), \tag{3}$$

причем сходимость в(3) равномерна по $n \geq 1$. Используя (3) и неравенство $\mu_n(Q(t)) \leq \mu_n(\exp(-tT_-))$, получаем:

$$\operatorname{Tr} Q(t) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Tr} Q_k(t) . \tag{4}$$

I) См. также Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 2, Спектральная теория. "Мир", М., 1966 (Гл.XI , §9, I.5) .

Пусть теперь $\mathcal{P}$ – спектральный проектор конечного ранга, соответствующий оператору $Q(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ при некотором фиксированном $t \in \mathbb{R}_+^1$, тогда

$$\|Q(t) - Q_k(t)\|_1 \leq \|Q(t) - \mathcal{P}Q(t)\mathcal{P}\|_1 + \\ + \|\mathcal{P}(Q(t) - Q_k(t))\mathcal{P}\|_1 + \|\mathcal{P}Q_k(t)\mathcal{P} - Q_k(t)\|_1 . \tag{5}$$

Поскольку $Q(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и имеют место пределы (2) и (4) , то для любого $\varepsilon > 0$ и фиксированного $t \in \mathbb{R}_+^1$ можно выбрать такой проектор $\mathcal{P}$ и число N_ε , что

$$\|Q(t) - \mathcal{P}Q(t)\mathcal{P}\|_1 < \varepsilon \tag{6}$$

и

$$\|\mathcal{P}(Q(t) - Q_k(t))\mathcal{P}\|_1 < \varepsilon , \\ |\operatorname{Tr}(Q(t) - Q_k(t))| < \varepsilon \tag{7}$$

для любого $k > N_\varepsilon$. Воспользуемся теперь тем, что для операторов $Q_k(t) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ имеет место каноническое представление:

$$(Q_k(t)\,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(Q_k(t))\,(\cdot\, , e_n[Q_k(t)])\; e_n[Q_k(t)] ,$$

где $\{e_n[Q_k(t)]\}_{n=1}^{\infty}$ –ортонормированный набор собственных векторов, образующих базис в пространстве $\mathcal{H}$. Тогда:

$$\|Q_k(t)-PQ_k(t)P\|_1 \leq \|Q_k(t)-PQ_k(t)\|_1+\|P(Q_k(t)-Q_k(t)P)\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(Q_k(t)) \,\|(e_n[Q_k(t)]-Pe_n[Q_k(t)])(\cdot, e_n[Q_k(t)])\|_1 + \tag{8}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(Q_k(t)) \,\| Pe_n[Q_k(t)](\cdot, e_n[Q_k(t)]-Pe_n[Q_k(t)])\|_1 \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(Q_k(t)) \,\| e_n[Q_k(t)]-Pe_n[Q_k(t)]\| \leq$$

$$\leq 2\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(Q_k(t))\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(Q_k(t))\,\|e_n[Q_k(t)]-Pe_n[Q_k(t)]\|^2\Big\}^{1/2}=$$

$$=2\{\operatorname{Tr} Q_k(t)\}^{1/2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(Q_k(t))\,(1-\|Pe_n[Q_k(t)]\|^2)\Big\}^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\{\operatorname{Tr}\exp(-tT_-)\}^{1/2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(Q_k(t))-\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(Q_k(t))\,\|Pe_n[Q_k(t)]\|^2\Big\}^{1/2}=$$

$$=2\{\operatorname{Tr}\exp(-tT_-)\}^{1/2}\{\operatorname{Tr} Q_k(t)-\operatorname{Tr} PQ_k(t)P\}^{1/2}.$$

Заметим, наконец, что

$$\operatorname{Tr} Q_k(t)-\operatorname{Tr} PQ_k(t)P \leq |\operatorname{Tr}(Q_k(t)-Q(t))|+$$

$$+|\operatorname{Tr}(Q(t)-PQ(t)P)|+|\operatorname{Tr}(P(Q(t)-Q_k(t))P)| \leq$$

$$\leq |\operatorname{Tr}(Q_k(t)-Q(t))|+\|Q(t)-PQ(t)P\|_1+\|P(Q(t)-Q_k(t))P\|_1,$$

поэтому из неравенств (6) -(8) получаем:

$$\|Q_k(t)-PQ_k(t)P\|_1 < (12\varepsilon \operatorname{Tr}\exp(-tT_-))^{1/2}.$$

Последняя оценка вместе с оценками (5) - (7) доказывает пункт (б).□

<u>Следствие I.</u> Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$-монотонное семейство самосопряженных операторов, удовлетворяющих условиям (i) и (ii) Леммы. Тогда соответствующее семейство гиббсовских полугрупп $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ является $\|\cdot\|_1$- компактным для $t\in \mathbb{R}^1_+$.

<u>Теорема</u>. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$-монотонное семейство самосопряженных операторов, удовлетворяющих условиям (i) и (ii) Леммы. Тогда гиббсовские полугруппы $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ образуют в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ $\|\cdot\|_1$- голоморфное семейство, которое $\|\cdot\|_1$-компактно внутри этой области.

<u>Доказательство</u>. Полугруппы из семейства $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ могут быть продолжены с полуоси $\mathbb{R}^1_+$ до голоморфных в области $\mathbb{C}_+$ (в сильной операторной топологии) гиббсовских полугрупп с помощью формулы Данфорда-Тейлора [5,IX, §I.6]

$$Q_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\zeta\, e^{-t\zeta} R_\zeta(T_\alpha). \tag{9}$$

В правой части формулы (9) стоит сходящийся по операторной норме интеграл Бохнера (см.[9, III, §I, 3.7]). Контур интегрирования C лежит в резольвентном множестве оператора T_- и охватывает спектр этого оператора. Сильная голоморфность полугрупп $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ в действительности влечет за собой $\|\cdot\|$- голоморфность (см. [5, III, §3.I] или [9, III, §2.2]). Поэтому из оценки

$$\Big\|\frac{1}{t'}(Q_\alpha(t+t')-Q_\alpha(t))+T_\alpha Q_\alpha(t)\Big\|_1 \leq$$

$$\leq \Big\|\frac{1}{t'}(Q_\alpha(t')-\mathbb{1})Q_\alpha(t/2)+T_\alpha Q_\alpha(t/2)\Big\|\cdot\|Q_\alpha(t/2)\|_1$$

для $t,t'\in\mathbb{C}_+$ следует существование предела

$$\|\cdot\|_1\text{-}\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}(Q_\alpha(t+t')-Q_\alpha(t))=-T_\alpha Q_\alpha(t)\in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}). \tag{10}$$

Предел (10) доказывает, что гиббсовские полугруппы являются $\|\cdot\|_1$- голоморфными в области $\mathbb{C}_+$. Пусть задано некоторое компактное множество $G\subset\mathbb{C}_+$ такое, что пересечение $G\cap\mathbb{R}^1_+$

содержит по крайней мере одну предельную точку. Полугруппы $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ на этом множестве равномерно $\|\cdot\|_1$-ограничены:

$$\|Q_\alpha(t)\|_1 \leq \sup_{t\in G} \|\exp\{-(\mathrm{Re}\,t)T_-\}\|_1 . \tag{II}$$

Тогда, из равномерной ограниченности (II), $\|\cdot\|_1$-компактности семейства $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ на R^1_+ и теоремы Витали [9, Ш, §2,3.I4] следует $\|\cdot\|_1$-компактность семейства полугрупп $\{Q_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}$ на множестве G. Заметим, что каждая функция $Q_\alpha: \mathbb{C}_+ \to \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ может быть однозначно аналитически продолжена с произвольной области $G\subset\mathbb{C}_+$ в более широкую область G', причем пересечение $G'\cap R^1_+$ уже содержит по крайней мере одну предельную точку. Это замечание завершает доказательство теоремы. □

Пример 2. Пусть $T(\Lambda^N)$ -самосопряженный оператор кинетической энергии системы из N частиц, заключенных в сосуд $\Lambda\subset R^\nu$. Для определенности, пусть $T(\Lambda^N)=\left(\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\Delta_i}{2m}\right)\right)_F$ — фридрихсовское расширение с условиями Дирихле на кусочно-гладкой границе сосуда $\partial\Lambda$. Далее, пусть $U(N)=\sum_{1\leq i<j\leq N}\Phi(x_i-x_j)$ – полуограниченный снизу симметрический оператор N-частичного взаимодействия. Если потенциал парного взаимодействия $\Phi: R^\nu\to R^1\cup\{+\infty\}$ достаточно сингулярен в окрестности начала координат, тогда оператор $U(N)$ не является малым возмущением оператора $T(\Lambda^N)$. Поэтому удобно ввести обрезанное взаимодействие $U_L(N)=\sum_{1\leq i<j\leq N}\Phi_L(x_i-x_j)$, где $L\geq 0$ и

$$\Phi_L(x)=\begin{cases}\Phi(x) & \text{для } \{x\in R^\nu: \Phi(x)\leq L\}\\ L & \text{для } \{x\in R^\nu: \Phi(x)> L\}.\end{cases}$$

Теперь легко определить гамильтониан $H_L(\Lambda^N)$. Поскольку $U_L(N)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, то он хорошо определен на $D(T(\Lambda^N))$ как

алгебраическая сумма: $H_L(\Lambda^N)=T(\Lambda^N)+U_L(N)$ и $H_L(\Lambda^N)\leq H_+$, где $H_+=(T(\Lambda^N)+U(N))_F$ – фридрихсовское расширение суммы $T(\Lambda^N)+U(N)$, определенной на области $D(T(\Lambda^N))\cap U(N)$. Таким образом, семейство гамильтонианов $\{H_L(\Lambda^N)\}_{L\geq 0}$ удовлетворяет условиям теоремы. При $L\to\infty$ гиббсовские полугруппы $\{Q_L(t)\}_{L\geq 0}$ сходятся по ядерной норме $\|\cdot\|_1$ к гиббсовской полугруппе $Q(t)$ равномерно внутри области $\mathbb{C}_+$. Можно показать (см. [I0,II]), что генератор H этой полугруппы является суммой операторов $T(\Lambda^N)$ и $U(N)$ в смысле квадратичных форм: $H=T(\Lambda^N)\dot{+}U(N)$. Если функция $\Phi(x)\in L^\infty(K)$ для любого компакта $K\subset R^\nu$, не содержащего сингулярность, и полуограничена снизу, то оператор H совпадает с H_+ [I0,II].

Пример 3. Пусть T и U -положительные самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и оператор T является генератором гиббсовской полугруппы. Если пересечение $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}(T)\cap\mathcal{Q}(U)$ плотно в $\mathcal{H}$ (здесь $\mathcal{Q}(\cdot)$ – область определения форм, соответствующих операторам, в данном случае $\mathcal{Q}(T)=D(T^{1/2})$ и $\mathcal{Q}(U)=D(U^{1/2})$), тогда для произвольного $\lambda>0$ можно определить самосопряженный оператор $H_\lambda=T\dot{+}\lambda U$. Следовательно, семейство $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ удовлетворяет условиям Теоремы. При $\lambda\downarrow 0$ гиббсовские полугруппы $\{Q_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ сходятся по ядерной норме $\|\cdot\|_1$ к гиббсовской полугруппе $Q(t)$ равномерно внутри области $\mathbb{C}_+$. Генератор H_0 этой полугруппы является самосопряженным оператором, ассоциированным с замкнутой симметричной квадратичной формой $(t\restriction\mathcal{Q})^\sim$, где $t[\psi]=(T^{1/2}\psi,T^{1/2}\psi)$. Если оператор является достаточно сингулярным возмущением оператора T, то $H_0\neq T$ (явление Клаудера [I2]). Можно показать, что оператор H_0

совпадает с T в том и только в том случае, если пересечение Q является ядром для квадратичной формы, порождаемой оператором T (см.[13]).

Считаю своим приятным долгом поблагодарить Н.Ангелеску и А.Ульмана за полезные обсуждения и замечания.

Литература

1. Schatten R. Norm ideals of completely continuous operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg. Springer 1960.
2. Uhlenbrock D. J.Math.Phys., 1971, 12, p.2503.
3. Angelescu N., Nenciu G., Bundaru M. Commun.Math.Phys. 1975, 42, p.29.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, том I, том. 2, "Мир", М., 1978.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. "Мир", М., 1972.
6. Bogolubov N.N. (jr.). Physica, 1969, 41, p.601.
7. Watson H.D. Commun.Math.Phys., 1971, 22, p.166.
8. Загребнов В.А., Бранков Й.Г., Тончев Н.С. ДАН СССР, 1975, 225, с.71.
9. Хилле Е., Филлипс Р.С. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.
10. Zagrebnov V.A. Ann. of Phys. (N.Y.), 1976, 102, p.108.
11. Загребнов В.А. Труды Московского Мат.общества. том 41, Изд-во Московского университета, М., 1979.
12. Klauder J.R. Acta Phys.Austr.Supp. XI, 1973, p.341.
13. Simon B., J.Funct. Anal., 1973, 14, p.295.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 сентября 1979 года.