сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12610

Е.П.Жидков, П.Е.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Часть 2

1979

Жидков Е.П., Жидков П.Е. P5 - 12610

Исследование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики. /Часть 2/.

Доказан один вспомогательный результат, используемый в работе /1/. Этот результат имеет и самостоятельное значение.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zhidkov E.P., Zhidkov P.E. P5 - 12610

Investigation of Particle-Like Solutions in Some Models of Nonlinear Physics. Part II.

An auxiliary result which is used in Part I has been proved. This result has also its own meaning.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В данной работе доказана лемма, используемая в работе /I/.

Лемма. Пусть $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, 0, \alpha_1, \alpha_2$ – корни функции $f(y)$, причем $\alpha_{-2}<\alpha_{-1}<0<\alpha_1<\alpha_2$ и пусть $f(y)>0$ при $y\in\{(\alpha_{-2},\alpha_{-1})\cup(0,\alpha_1)\}$, $f(y)<0$ при $y\in\{(\alpha_{-1},0)\cup(\alpha_1,\alpha_2)\}$.

Пусть существуют положительные ε, η_1 такие, что $f(y)$ возрастает на промежутке $-\varepsilon\le y\le\varepsilon$ и для любого y:

$$y\in[-\varepsilon,\varepsilon] \qquad |f(y)|\geq \eta_1 |y|.$$

Пусть, кроме того, $U(\alpha_{-2})\geq U(\alpha_2)$.

Имеется Y_r – непустое множество из интервала (α_1,α_2) такое, что для любого $a\in Y_r$ решение задачи (I)-(2)*) имеет не менее r корней, если $y_0=a$.

Пусть теперь a – предельная точка множества Y_r, причем $\alpha_1<a<\alpha_2$. Тогда решение задачи (I)-(2) при $y_0=a$ существует и имеет не менее $(r-1)$ корней, причем если число корней указанного решения задачи (I)-(2) равно $(r-1)$, то оно является частицеподобным.

Доказательство. Решение задачи (I)-(2) при $y_0=a$ существует в промежутке $0\le x<+\infty$ в силу теоремы I (см. /I/), так как $U(a)\le U(\alpha_2)\le U(\alpha_{-2})$ и $\alpha_{-2}<a<\alpha_2$. Обозначим его через $y(x)$.

I. Докажем, что все корни любого нетривиального решения задачи (I)-(2) – изолированные. Пусть $z(x)$ – произвольное решение задачи (I)-(2) и пусть x_0 – его корень. Покажем, что $z'(x_0)\neq 0$. Предположим противное. Пусть $z'(x_0)=0$. Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' = f(y), & 0<x<+\infty \\ y(x_0)=0, & y'(x_0)=0 \end{cases}$$

*) Нумерация формул – сквозная в обеих частях работы.

имеет 2 несовпадающих решения - это $z(x)$ и $y(x)=0$, что противоречит теореме о единственности решения этой задачи. Следовательно, $z'(x_0)\neq 0$. Отсюда сразу вытекает, что функция $z(x)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности точки x_0, исключая саму точку x_0. Тем самым доказано, что все корни функции $z(x)$ изолированные.

Рассмотрим теперь $\{a_n\}$ - некоторую последовательность элементов множества Y_r, сходящуюся к a. Обозначим через $x_1, \dots, x_m$ все корни $y(x)$, через $x_1^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)}$ - все корни функции $y_n(x)$, где $y_n(x)$ - решение задачи (I)-(2) при $y_0 = a_n$.

Будем считать, что $x_1<x_2<\dots<x_m$, и для любого номера n $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_{m_n}^{(n)}$.

Ясно, что $m_n \geqslant r$, m_n может оказаться и бесконечным.
Докажем теперь, что $m \geqslant (r-1)$.
Предположим противное: пусть $m < (r-1)$.

2. Как показано выше, $y'(x_i)\neq 0$ $(i=\overline{1,m})$. Используя это обстоятельство, а также теорему 3, получаем следующее утверждение: каково бы ни было число A: $A > x_m$, все функции $y_n(x)$, начиная с некоторого номера, имеют на промежутке $[0,A]$ ровно m корней. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m+1}^{(n)} = +\infty$.
Будем считать для определенности, что $y(x)>0$ при $x > x_m$.

3. Докажем теперь, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.
Для этого покажем сначала, что график интегральной кривой $y=y(x)$ при некоторых $x>x_m$ будет лежать в области $\alpha_1 < y < \alpha_2$.

Предположим противное, т.е. что при $x > x_m$ график $y(x)$ не выходит из области $0<y<\alpha_1$. Тогда возможны 2 ситуации.

А. $y(x)$ монотонно не убывает в указанной области. Тогда ясно, что $y(x)$ имеет горизонтальную асимптотику $y=C$. Из (I) следует, что $C=\alpha_1$. Очевидно, что найдется b: $b>x_m$ такое, что

$$[y'(b)]^2 + U[y(b)] < 0.$$

Как указано выше, найдется номер N такой, что для любого $n: n \geqslant N$ $x_{m+1}^{(n)} > b$. С другой стороны, по теореме 3 для всех достаточно больших номеров n имеем:

$$[y_n'(b)]^2 + U[y_n(b)] < 0.$$

Но из тождества (3) следует, что $\{[y_n'(x)]^2+U[y_n(x)]\}$ - невозрастающая функция аргумента x, а

$$[y_n'(x_{m+1}^{(n)})]^2 + U[y_n(x_{m+1}^{(n)})] = [y_n'(x_{m+1}^{(n)})]^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, получаем противоречие. Следовательно, ситуация А невозможна.

Б. $y(x)$ имеет точку $x=b>x_m$ локального максимума в области $0<y<\alpha_1$. Но, очевидно, эта ситуация также невозможна, поскольку в точке локального максимума должно быть выполнено условие $y''(b)\leqslant 0$, а из (I) следует, что если $y'(b)=0$ и $0<y(b)<\alpha_1$, то $y''(b)>0$. Таким образом, доказано, что график $y(x)$ достигает прямой $y=\alpha_1$ при $x > x_m$.

Точно так же, как было доказано, что если $z(x)$ - нетривиальное решение задачи (I)-(2) и $z(b)=0$, то $z'(b)\neq 0$, можно доказать, что если $y(b)=\alpha_1$ $(b>x_m)$, то $y'(b)\neq 0$. Обозначим через $b: b>x_m$ точку такую, что $y(b)=\alpha_1$, $y(x)\in(0,\alpha_1)$, если $x\in(x_m,b)$. Тогда, поскольку $y'(b)\neq 0$, $y(x)>\alpha_1$ в некоторой правой полуокрестности b. Покажем, что $y(x)$ достигает своего максимума при $x>b$ в области $\alpha_1<y<\alpha_2$. Предположим противное. Из тождества (3) следует, что $U[y(0)] \geqslant U[y(x)]$ для любого $x\geqslant 0$. Следовательно, для любого $x \geqslant b$ $y(x)\leqslant a<\alpha_2$. Поэтому из предположения, что $y(x)$ не достигает максимума в области $\alpha_1<y<\alpha_2$ при $x>b$, следует, что график функции $y(x)$ имеет горизонтальную асимптоту в этой области $y=C$ $(\alpha_1<C<\alpha_2)$. Но из уравнения (I) следует, что это невозможно, так как тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y''+\frac{2}{x}y'\right] \neq \lim_{x\to+\infty} f[y(x)].$$

Следовательно, $y(x)$ достигает локального максимума в области $\alpha_1<y<\alpha_2$ при $x>b$ в некоторой точке b_1. Тогда, в силу (I), $y''(b_1)<0$, а следовательно, $y'(x)<0$ в некоторой правой полуокрестности точки b_1. Далее, так же, как доказывалось, что невозможно, чтобы имело место неравенство $0<y(x)<\alpha_1$ при всех $x > x_m$, доказывается, что найдется точка $b_2: b_2>b_1$ такая, что $y(b_2)=\alpha_1$, $\alpha_1<y(x)<\alpha_2$ при $x\in(b_1,b_2)$, $y'(b_2)<0$. Следовательно, $0<y(x)<\alpha_1$ в некоторой правой полуокрестности точки b_2. Докажем, что $y(x)$ монотонно не возрастает в промежутке $b_2\leqslant x<+\infty$. Предположим противное.

Тогда существует точка $b_3 > b_2$ такая, что $y(x)$ не возрастает на $[b_2, b_3]$, $y'(b_3)=0$. Ясно, что $0<y(b_3)<\alpha_1$, так как x_m – максимальный корень $y(x)$, а $b_3 > x_m$. Но тогда $[y'(b_3)]^2+U[y(b_3)]<0$ так же, как выше, отсюда следует, что при достаточно больших n функции $y_n(x)$ не могут иметь корней на полупрямой $x \geqslant b_3$, а это противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{m+1}^{(n)}=+\infty$.

Тем самым доказано, что $y(x)$ монотонно не возрастает при $x \geqslant b_2$. Поскольку $y(x)>0$ при $x \geqslant b_2$, то график $y(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=C$, причем из уравнения (I) следует, что единственной асимптотой может быть прямая $y=0$.
Тем самым, наконец, доказали, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

Фиксируем произвольное $\tilde{x}: \tilde{x}>x_m$, удовлетворяющее следующему условию; для любого $x \geqslant \tilde{x}$ $y(x)<\varepsilon$. Так же, как для функции $y(x)$ на полупрямой $x \geqslant x_m$, для функции $y_n(x)$ можно доказать, что при $x \geqslant x_m^{(n)}$ она ведет себя следующим образом: монотонно возрастает, пока не достигнет максимума в некоторой точке $\bar{b}_n$ в области $\alpha_1<y<\alpha_2$, затем убывает, пока не достигнет минимума в некоторой точке $\bar{\bar{b}}_n$ в области $\alpha_{-2}<y<\alpha_{-1}$. Обозначим через $\bar{x}_n$ точку из $[\bar{b}_n, \bar{\bar{b}}_n]$ такую, что $y_n(\bar{x}_n)=-\varepsilon$.
Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} y''+\frac{2}{x}y'=f(y), & \check{x}\le x<+\infty \\ y(\check{x})=y_1, & y'(\check{x})=y_2, \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

где $\check{x}, y_1, y_2$ – некоторые параметры $(\check{x}>0, y_1>0, y_2<0)$, которые определим позже.

Пусть $\check{x}$ – произвольное, $y_1\in(0,\alpha_1)$. y_2 будем рассматривать как параметр. Покажем, что существует положительное решение этой задачи, монотонно убывающее и обращающееся в 0 при $x\to+\infty$.

4. Сначала докажем, что существует функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению этой задачи на некотором промежутке $[\check{x}, \check{x}+c]$ и начальным условиям, монотонно убывающая и обращающаяся в нуль в точке $x+C$.
Для этого сделаем замену $z(x)=x\cdot y(x)$.
Из (II) получим:

$$\begin{cases} z''=x\cdot f(\frac{z}{x}), & x \geqslant \check{x}\\ z(\check{x})=\check{x}\cdot y_1, & z'(\check{x})=y_2\cdot\check{x}^2+\check{x}\, y_1.\end{cases}\qquad \text{(I2)}$$

Положим $y_2 = \frac{-(\check{x}+1)\bar{f} - 2y_1\check{x}}{\check{x}^2}$, где $\bar{f} = \max\limits_{y\in[0,\alpha_1]} f(y)$.

Тогда $z'(\check{x}) = -(\check{x}+1)\bar{f} - y_1\cdot\check{x}$.

Докажем, что при таких начальных условиях интегральная кривая задачи (I2) пересечет ось Ox на $[\check{x}, \check{x}+1]$. Предположим противное. Тогда из (I2) следует, что для любого $x\in[\check{x},\check{x}+1]$

$$|z'(x)| = -z'(\check{x}) - \int_{\check{x}}^{x} t\cdot f(\tfrac{z}{t})\,dt \geqslant -z'(\check{x})-(\check{x}+1)\bar{f} = y_1\cdot\check{x}.$$

Отсюда $z(\check{x}+1)=y_1\check{x}+\int_{\check{x}}^{\check{x}+1} z'(x)\,dx\le 0$,

то есть получаем противоречие с предположением, что на $[\check{x},\check{x}+1]$ функция $z(x)$ не обращается в 0. Тем самым доказано, что для задачи (II) существует функция, определенная на отрезке $[\check{x},\check{x}+c]$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению задачи (II) на $[\check{x},\check{x}+c]$, а также начальным условиям задачи (II), и обращающаяся в 0 при $x=\check{x}+c$.

Рассмотрим теперь множество $P(\check{x},y_1)$ всех значений $y_2<0$, при которых интегральные кривые задачи (II) достигают оси Ox.
Положим $p(\check{x},y_1)=\sup P(\check{x},y_1)$.

5. Докажем, что при $y_2=p(\check{x},y_1)$ существует решение $\bar{v}(x)$ задачи (II), определенное на промежутке $\check{x}\le x<+\infty$, монотонно убывающее и обращающееся в нуль при $x\to+\infty$.

Во-первых, докажем, что $p(\check{x},y_1)<0$. Предположим противное. Тогда $p(\check{x},y_1)=0$. Обозначим через $v(x,\check{x},y_1,y_2)$ траекторию задачи (II), где $y_2\in P(\check{x},y_1)$. Тогда, если y_2 достаточно близко $p(\check{x},y_1)$, имеем:

$$\left[\frac{d v(x,\check{x},y_1,y_2)}{dx}\Big|_{x=\check{x}}\right]^2+U\left[v(\check{x},\check{x},y_1,y_2)\right]<0.$$

Как и раньше, отсюда следует, что функция $v(x,\check{x},y_1,y_2)$ не может обратиться в нуль при $x \geqslant \check{x}$. Получаем противоречие с определением множества $P(\check{x},y_1)$.
Следовательно, $p(\check{x},y_1)<0$.

Функция $\bar{v}(x)$ не обращается в нуль при $x \geqslant \check{x}$, так как тогда, используя теорему о непрерывной зависимости решения системы (II) от начального условия y_0 , получили бы, что для близких $\rho(\check{x}, y_1)$ значений y_2 , больших $\rho(\check{x}, y_1)$, соответствующие траектории задачи (II) достигают оси Ox , что противоречит определению точной верхней грани.

Остается доказать, что для любого $x \geqslant \check{x}$ $\bar{v}'(x)<0$. Предположим противное. Тогда найдется точка $d: d>\check{x}$ - такая, что $\bar{v}'(d)=0$, причем $0<\bar{v}(x)<\alpha_1$ при $x\in[\check{x}, d]$. Тогда $[\bar{v}'(d)]^2+U[\bar{v}(d)]<0$. Используя непрерывную зависимость решения задачи (II) от начального условия y_2 , получаем, что для всех $y_2 \in P(\check{x}, y_1)$, достаточно близких $\rho(\check{x}, y_1)$, соответствующие траектории $v(x,\check{x},y_1,y_2)$ удовлетворяют следующим двум условиям:

1. $v(x,\check{x},y_1,y_2)>0$ при $x\in[\check{x}, d]$;
2. $\left[\left.\dfrac{dv(x,\check{x},y_1,y_2)}{dx}\right|_{x=\check{x}}\right]^2+U[v(\check{x},\check{x},y_1,y_2)]<0$,

откуда следует, что функция $v(x,\check{x},y_1,y_2)$ не имеет корней на промежутке $\check{x}\le x<+\infty$, что противоречит определению множества $P(\check{x}, y_1)$. Следовательно, $\bar{v}'(x)<0$ при $x\geqslant\check{x}$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar{v}(x)=0$

Доказали, что задача (II) имеет положительное решение, монотонно убывающее и обращающееся в нуль при $x\to+\infty$ для любых $\check{x}:\check{x}>0$, $y_1: y_1\in(0,\alpha_1)$. Это решение при $y_1=y_n(\check{x})$ обозначим через $\bar{y}_n(\check{x},x)$, а при $\check{x}=\tilde{x}$, $y_1=\varepsilon$ - через $\bar{y}(x)$.

6. Теперь докажем, что существуют такие $\bar{x}: \bar{x}>\tilde{x}$ и $\gamma: \gamma>0$, что $\bar{y}(x)\le\frac{\gamma}{x}$ при всех $x\geqslant\bar{x}$. Для этого опять обратимся к задаче (I2) для функции $\bar{z}(x)=x\cdot\bar{y}(x)$. Сначала покажем, что $\bar{z}'(x)\le 0$ для любого $x\geqslant\tilde{x}$. Предположим противное. Пусть найдется точка $d\geqslant\tilde{x}$ такая, что $\bar{z}'(d)>0$. Поскольку $0<\bar{y}(x)<\alpha_1$ для любого $x\geqslant\tilde{x}$, $0<\bar{z}(x)<\alpha_1 x$ для любого $x\geqslant\tilde{x}$. Поэтому из (I2) следует, что $\bar{z}''(x)>0$ для любого $x\geqslant\tilde{x}$. Но тогда $\bar{z}'(x)\geqslant\bar{z}'(d)>0$ для всех $x\geqslant d$, а следовательно, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\bar{z}(x)}{x}$, то этот предел не меньше $\bar{z}'(d)>0$. Это противоречит тому, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\bar{z}(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\bar{y}(x)=0 .$$

Следовательно, $\bar{z}'(x)<0$ для любого $x\geqslant\tilde{x}$. Кроме того, $\bar{z}(x)>0$ для любого $x\geqslant\tilde{x}$. Поэтому график функции $z=\bar{z}(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $z=c\geqslant 0$. Отсюда следует требуемое утвер-

дение, что найдутся такие $\bar{x}: \bar{x}>0$ и $\gamma: \gamma>0$, что $\bar{y}(x)\le\frac{\gamma}{x}$ при всех $x\geqslant\bar{x}$ (можно взять, например, $\gamma=2c$).

7. Докажем, что если $\check{x}\geqslant\tilde{x}$ и номер n столь велик, что $x_{m+1}^{(n)}>\check{x}$, $0<y_n(\check{x})<\varepsilon$ и функция $y_n(x)$ монотонно убывает на промежутке $\check{x}\le x\le\bar{x}_n$, то $\bar{y}_n'(\check{x},x)>y_n'(x)$ для любого $x\in[\check{x},\bar{x}_n]$.

В самом деле, $\bar{y}_n'(\check{x},\check{x})>y_n'(\check{x})$. Теперь предположим, что неравенство $\bar{y}_n'(\check{x},x)>y_n'(x)$ нарушается в некоторых точках отрезка $[\check{x},\bar{x}_n]$. Тогда найдется точка $d\in[\check{x},\bar{x}_n]$ такая, что $\bar{y}_n'(\check{x},d)=y_n'(d)$, $\bar{y}_n'(\check{x},x)>y_n'(x)$ для любого $x\in[\check{x},d]$. Следовательно, $-\varepsilon<y_n(d)<\bar{y}_n(\check{x},d)<\varepsilon$, так как $\bar{y}_n(\check{x},\check{x})=y_n(\check{x})$ Поскольку функция $f(y)$ возрастает в промежутке $-\varepsilon\le y\le\varepsilon$, то $\bar{y}_n''(\check{x},d)>y_n''(d)$ в силу уравнения из (I2). Но тогда получаем противоречие, так как $\frac{d}{dx}[\bar{y}_n(\check{x},x)-y_n(x)]>0$ слева от d и, следовательно, условие $\left.\frac{d^2}{dx^2}[\bar{y}_n(\check{x},x)-y_n(x)]\right|_{x=d}\le 0$ является необходимым для того, чтобы выполнялось равенство

$$\bar{y}_n'(\check{x},d)=y_n'(d) .$$

Таким образом, доказано, что $\bar{y}_n'(\check{x},x)>y_n'(x)$ для любого $x\in[\check{x},\bar{x}_n]$.

8. Аналогичным образом доказывается, что задача (II) имеет для любых $\check{x}>0$ и $y_1: 0<y_1\le\varepsilon$ единственное положительное, монотонно убывающее решение, обращающееся в нуль при $x\to+\infty$. В самом деле, предположим, что она имеет два таких решения $z_1(x)$ и $z_2(x)$. Пусть для определенности $z_1'(\check{x})>z_2'(\check{x})$. Те же рассуждения, что и выше, позволяют заключить, что $z_1'(x)>z_2'(x)$ для любого $x\geqslant\check{x}$. Но тогда $z_i(\check{x})=-\int_{\check{x}}^{+\infty}z_i'(x)dx$ $(i=1,2)$, следовательно, $z_1(\check{x})\ne z_2(\check{x})$, что противоречит тому, что $z_1(\check{x})=z_2(\check{x})=y_1$.

9. Аналогичным же образом доказывается, что если $\tilde{y}_1$ и $\tilde{\tilde{y}}_1$ - два различных значения параметра y_1 при неизменном $\check{x}$, причем $0<\tilde{y}_1<\tilde{\tilde{y}}_1\le\varepsilon$, то для любого $x\geqslant\check{x}$ $\tilde{y}(x)<\tilde{\tilde{y}}(x)$, $\tilde{y}'(x)>\tilde{\tilde{y}}'(x)$, где $\tilde{y}(x)$, $\tilde{\tilde{y}}(x)$ - положительные монотонно убывающие, стремящиеся к нулю при $x\to+\infty$ решения задачи (II) при $y_1=\tilde{y}_1$ и $y_1=\tilde{\tilde{y}}_1$ соответственно.

Пусть теперь $\check{x}\geqslant\tilde{x}$.

10. Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}[\bar{y}_n'(\check{x},\check{x})-y_n'(\check{x})]=0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n'(\check{x})=y'(\check{x})$, достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{y}_n'(\check{x},\check{x})=y'(\check{x})$.

Предположим противное. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty}\bar{y}_n'(\check{x},\check{x})\ne y'(\check{x})$.
Рассмотрим функцию $U_n(x)=y(x)-\bar{y}_n(\check{x},x)$. Учитывая, что $y(x)$ и

$\bar{y}_n(\check{x},x)$ удовлетворяют уравнению (I), для функции $u_n(x)$ получаем:

$$u''_n(x)+\frac{2}{x}u'_n(x)=f[y(x)]-f[\bar{y}_n(\check{x},x)].$$

В силу пункта 9 $\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})>y'(\check{x})$, если $\bar{y}_n(\check{x},\check{x})<y(\check{x})$ и $\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})<y'(\check{x})$, если $\bar{y}_n(\check{x},\check{x})>y(\check{x})$, поскольку $y(x)$ - решение задачи (II) при $y_1=y(\check{x})$, $y_2=y'(\check{x})$.

Используя для функций $u_n(x)$ рассуждения, аналогичные рассуждениям из пункта 4 и учитывая, что $u_n(\check{x})\to 0$ при $n\to\infty$, получим, что найдется номер n, при котором графики функции $\bar{y}_n(\check{x},x)$ и $y(x)$ пересекутся в некоторой точке d_n. В силу единственности решения задачи Коши

$$\begin{cases} y''+\frac{2}{x}y'=f(y) \\ y(d_n),\ \ y'(d_n) \end{cases} \quad \text{- заданы}$$

и так как $y(d_n)=\bar{y}_n(\check{x},d_n)$, то $y'(d_n)\neq\bar{y}'_n(\check{x},d_n)$. Но тогда получаем противоречие с п. 8.

II. Докажем, что существуют постоянные $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2:\mathcal{D}_1>0,\ \mathcal{D}_2>0$ такие, что для всех $x:x\geqslant\tilde{x}$ и всех номеров n

$$|y'_n(x)|\leq\mathcal{D}_1,\quad |y''_n(x)|\leq\mathcal{D}_2. \qquad (I3)$$

В самом деле, для всех номеров n $\alpha_{-2}<y_n(x)<\alpha_2$, поэтому из тождества (3), если учесть, что величины $[y'_n(x)]^2+U[y_n(x)]$ монотонно не возрастают для любого n, следовательно, равномерно по n ограничены величиной $U(d\text{-}2)$, вытекает, что величины $|y'_n(x)|$ также равномерно ограничены. Так как последовательности $|y_n(x)|$ и $|y'_n(x)|$ равномерно ограничены, то из уравнения (I) вытекает, что и последовательность $|y''_n(x)|$ равномерно ограничена для всех $x: x\geqslant\tilde{x}>0$. Введем следующие обозначения:

$$\hat{x}=max\left\{4;\ \bar{x};\ \frac{8}{\mathcal{D}_1}\right\},$$

для каждого $\check{x}:\check{x}\geqslant\hat{x}$ обозначим через $N(\check{x})$ номер такой, что для любого $n\geqslant N(\check{x})$ выполняются следующие неравенства: $y_n(\check{x})<\varepsilon$, $\check{x}+1<x^{(n)}_{m+1}$, $y'_n(\check{x})<0$ и $\frac{1}{4}[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})]<\varepsilon$ (такое обозначение корректно в силу п. 2 и п. 10), для каждого $n\geqslant N(\check{x})$, где $\check{x}\geqslant\hat{x}$, обозначим через $\bar{\bar{x}}_n$ точку интервала $(\check{x},\bar{x}_n)$ такую, что

$$y_n(\bar{\bar{x}}_n)=-\frac{1}{4}[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})],$$

через $K_n(x)$ - функцию $\dfrac{\bar{y}'_n(\check{x},x)-y'_n(x)}{\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})}$ аргумента x.

Докажем, что существуют постоянная $M: M>0$, что для каждого $\check{x}:\check{x}\geqslant\hat{x}$ и для любого $n: n\geqslant N(\check{x})$ выполняется неравенство

$$\bar{x}_n\leq\frac{M}{\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})}. \qquad (I4)$$

Сначала для доказательства неравенства (I4) докажем, что для любого $\check{x}:\check{x}\geqslant\hat{x}$ и любого номера $n: n\geqslant N(\check{x})$ имеет место неравенство

$$\bar{\bar{x}}_n\leq\frac{M_1}{\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})}, \qquad (I5)$$

где $M_1=4\gamma$.

Зафиксируем произвольное $\check{x}:\check{x}\geqslant\hat{x}$ и произвольный номер $n: n\geqslant N(\check{x})$.

Рассмотрим отдельно 2 случая.

а). Пусть существует $c\in(\check{x},x^{(n)}_{m+1}]$ такое, что $K_n(c)<\frac{1}{2}$. Тогда на отрезке $[\check{x},x^{(n)}_{m+1}]$ найдется счетное, вообще говоря, семейство сегментов $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\dots}$, обладающее следующими свойствами:

для любого i $b_i<a_{i+1}$, $K(b_i)=K(a_{i+1})$, функция $K(x)$ не возрастает на каждом сегменте семейства;

$$K(a_1)=1,\quad \sum_i[K(b_i)-K(a_i)]=1/2.$$

Из (I) и (I2) получаем для любого i и $x\in[a_i,b_i]$:

$$\bar{y}''_n(\check{x},x)-y''_n(x)=\frac{2}{x}[y'_n(x)-\bar{y}'_n(\check{x},x)]+f[\bar{y}_n(\check{x},x)]-f[y_n(x)]\geqslant\frac{1}{2}[y'_n(\check{x})-\bar{y}'_n(\check{x},x)],$$

поскольку $\check{x}\geqslant 4$, функция $f(y)$ возрастает на отрезке $-\varepsilon\leq y\leq\varepsilon$ и на отрезке $a_i\leq x\leq b_i$ $\frac{1}{2}\leq K_n(x)\leq 1$.

Из последнего неравенства и тождества

$$\sum_i[K_n(b_i)-K_n(a_i)]\cdot[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})]=\sum_i\int_{a_i}^{b_i}[\bar{y}''_n(\check{x},x)-y''_n(x)]\,dx$$

вытекает, что $\sum_i(b_i-a_i)\geqslant 1$.

Отсюда, учитывая, что на $[\check{x},\bar{x}_n]$ $\bar{y}'_n(\check{x},x)>y'_n(x)$ (см. п.7), получаем:

$$\bar y_n(\check x, x^{(n)}_{m+1}) - y_n(x^{(n)}_{m+1}) \geq \lim_{i\to\infty}[\bar y_n(\check x, b_i) - y_i(b_i)] =$$

$$= \sum_i \int_{a_i}^{b_i}[\bar y'_n(\check x, x) - y'_n(x)]\,dx + \bar y_n(\check x, a_1) - y_n(a_1) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)].$$

Так как $y_n(x^{(n)}_{m+1})=0$, то отсюда получаем:

$$\bar y_n(\check x, x^{(n)}_{m+1}) \geq \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)].$$

Из этого неравенства вытекает, что, так как при $x\in[\check x, \bar{\bar x}_n]$ $\bar y'_n(\check x, x) > y'_n(x)$, то $\bar y'_n(\check x, \bar{\bar x}) \geq \frac{1}{4}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$.
Из п. 8 следует, что $\bar y(x) \geq \bar y_n(\check x, x)$ для всех $x \geq \check x$.
Следовательно, $\bar x_n$ не больше x – корня уравнения $\frac{x}{x} = \frac{1}{4}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$ (см. п.6). Отсюда вытекает неравенство (I5) для этого случая.

б). Пусть $\min\limits_{x\in[\check x, \bar{\bar x}_n]} K(x) \geq \frac{1}{2}$.

Поскольку $x^{(n)}_{m+1} > \check x + 1$, то $\bar y_n(\check x, x^{(n)}_{m+1}) =$

$$= \int_{\check x}^{x^{(n)}_{m+1}}[\bar y'_n(\check x, x) - y'_n(x)]\,dx > \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)].$$

Действуя далее, как в случае а), получим неравенство (I5).
Итак, неравенство (I5) доказано.

Для доказательства неравенства (I4) теперь, очевидно, достаточно будет доказать, что для всех $\check x : \check x \geq \hat x$ и всех $n : n \geq N(\check x)$ выполняется неравенство

$$\bar x_n - \bar{\bar x}_n \leq \frac{M_2}{\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)}, \qquad (I6)$$

где M_2 – постоянная, не зависящая от $\check x$ и n. Поскольку для любого n и для любого $x \geq \hat x$ $|y'_n(x)| \leq D_1$ – (см. п. II) и $y'_n(\check x) < \bar y'_n(\check x, \check x) < 0$, то существует конечный положительный $\sup\limits_{\check x \geq \hat x}\ \sup\limits_{n\geq N(\check x)}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$, который обозначим через K.
Рассмотрим опять 2 случая:
а) $\bar x_n > \bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}$ и б) $\bar x_n \leq \bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}$.

а). Пусть для данного η $\bar x_n > \bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}$
Докажем, что для всех $x : x\in[\bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}, \bar x_n]$

$$-y'_n(x) \geq \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]. \qquad (I7)$$

Для этого достаточно доказать: I) что $-y'_n(x)$ достигает значения $\frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$ на отрезке $[\bar{\bar x}_n, \bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}]$
и 2) что если в какой-то точке d отрезка $[\bar{\bar x}_n, \bar x_n]$ $-y'_n(x)$ достигла значения $\frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$,

то она имеет не меньшее значение во всех точках $x : x\in[d, \bar x_n]$.

Докажем I). Предположим противное. Пусть

$$-y'_n(x) < \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$$

для любого $x\in[\bar{\bar x}_n, \bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}]$. Тогда, учитывая, что $\hat x \geq \frac{8}{\eta_1}$, $-f[y_n(x)] \geq -\eta_1 y_n(x)$, из уравнения (I) для $y_n(x)$ получаем:

$$-y''_n(x) \geq \frac{\eta_1}{8}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)].$$

Отсюда

$$-y'_n\left(\bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}\right) \geq -\int_{\bar{\bar x}_n}^{\bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}} y''_n(x)\,dx \geq \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)].$$

Получаем противоречие с тем, что, по предположению

$$-y'_n(x) < \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)],$$

при

$$x\in[\bar{\bar x}_n, \bar{\bar x}_n + \frac{4}{\eta_1}].$$

Тем самым I) доказано.

Для доказательства 2) достаточно доказать, что если

$$-y'_n(x_0) = \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)],$$

где x_0 – точка из отрезка $[\bar{\bar x}_n, \bar x_n]$, то

$$-y'_n(x) > \frac{1}{2}[\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)]$$

в некоторой правой полуокрестности точки x_0, а для этого достаточно доказать, что $y''_n(x_0) < 0$. Но то, что $y''_n(x_0) < 0$, следует из уравнения (I) для $y_n(x)$.
Тем самым 2) доказано, а с ним доказано и неравенство (I7).
Из неравенства (I7) и неравенства $0 < y_n(\bar{\bar x}_n) - y_n(\bar x_n) < \varepsilon$ следует, что

$$\bar x_n - \bar{\bar x}_n \leq \frac{4}{\eta_1} + \frac{2\varepsilon}{\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)} \leq \frac{2\varepsilon + \frac{4}{\eta_1}\cdot K}{\bar y'_n(\check x, \check x) - y'_n(\check x)}. \qquad (I8)$$

б). Пусть для данного n $\bar{X}_n - \bar{\bar{X}}_n \le \frac{4}{\eta_1}$.
Тогда, очевидно,

$$\bar{X}_n - \bar{\bar{X}}_n \le \frac{4}{\eta_1}\cdot\frac{K}{\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})-y'_n(\check{x})}. \qquad (19)$$

Положим $M_2 = 2\varepsilon + \frac{4}{\eta_1}\cdot K$, тогда получим из (18) и (19) неравенство (16).
Таким образом, неравенство (14) доказано.
Из (13) следует, что для всех $n : n \ge N(\hat{x})$
$\bar{X}_n - X^{(n)}_{m+1} \ge \Delta_1$, где $\Delta_1 = const > 0$ – не зависит от номера n.
Покажем, что существуют номер N_1 и постоянная $\mathcal{D} : \mathcal{D} > 0$ такие, что $-y'_n(\bar{X}_n) \ge \mathcal{D}$ для всех $n \ge N_1$. Обозначим через $\tilde{X}_n$ точку из интервала $(\bar{\bar{X}}_n, \bar{X}_n)$ такую, что $y_n(\tilde{X}_n) = -\frac{\varepsilon}{2}$. В силу (13) существует постоянная $\Delta_2 > 0$ такая, что $\bar{X}_n - \tilde{X}_n \ge \Delta_2$ для всех $n \ge N(\hat{x})$.
Возьмем номер $N_1 : N_1 \ge N(\hat{x})$ такой, что при $n \ge N_1$

$$\frac{2\mathcal{D}_1}{X^{(n)}_{m+1}} < \frac{1}{2}\min_{y\in[-\varepsilon,-\frac{\varepsilon}{2}]}|f(y)| ,$$

где $\mathcal{D}_1$ берется из (13).
Тогда, очевидно, в силу уравнения (1), что

$$-y''_n(x) \ge \frac{1}{2}\min_{y\in[-\varepsilon,-\frac{\varepsilon}{2}]}[-f(y)] > 0 .$$

Тогда $-y'_n(\bar{X}_n) \ge C_1 > 0$ для всех $n : n \ge N_1$.
В силу (13) существует $\Delta > 0, C_2 > 0$ такие, что для всех n: $n \ge N_1$ $-y'_n(x) \ge C_2 > 0$ для всех $x \in [\bar{X}_n - \Delta, \bar{X}_n]$.
Отсюда получаем, что для всех $n \ge N_1$:

$$4\int_{\bar{X}_n-\Delta}^{\bar{X}_n}\frac{[y'_n(x)]^2}{x}\,dx \ge \frac{C}{\bar{X}_n} , \qquad (20)$$

где $C = const > 0$ – не зависит от n.
Рассмотрим теперь следующее тождество, вытекающее из тождества (3):

$$[y'_n(\bar{X}_n)]^2 + U[y_n(\bar{X}_n)] = \{[y'_n(\check{x})]^2 - [\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]^2\} + \{[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]^2 + U[\bar{y}_n(\check{x},\check{x})]\} - 4\int_{\check{x}}^{\bar{X}_n}\frac{[y'_n(x)]^2}{x}\,dx . \qquad (21)$$

В силу (20) и (14)

$$4\int_{\check{x}}^{\bar{X}_n}\frac{[y'_n(x)]^2}{x}\,dx \ge \frac{C}{M}[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x}) - y'_n(\check{x})] \qquad (22)$$

для любого $n \ge N_0(\check{x})$, где $N_0(\check{x}) = \max\{N_1; N(\check{x})\}$
Оценим остальные два члена в правой части тождества (21)

$$[y'_n(\check{x})]^2 - [\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]^2 = [y'_n(\check{x}) - \bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]\cdot[y'_n(\check{x}) + \bar{y}'_n(\check{x},\check{x})] \qquad (23)$$

$y(x)$, монотонно не возрастая, начиная с некоторого $\hat{x}$, стремится к нулю, отсюда в силу уравнения (1) $y''(x) > 0$ для $x \ge \hat{x}$, поэтому $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} y'_n(\check{x}) = y'(\check{x})$, $\lim_{n\to\infty}\bar{y}'_n(\check{x},\check{x}) = y'(\check{x})$ (см. п. 10 и теорему 3) и в силу (23), то

$$[y'_n(\check{x})]^2 - [\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]^2 < \frac{C}{2M}[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x}) - y'_n(\check{x})] \qquad (24)$$

для всех достаточно больших $\check{x}$ и n.
Рассмотрим теперь $[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]^2 + U[\bar{y}_n(\check{x},\check{x})]$.

В силу п. 9 $[\bar{y}'_n(\check{x},\check{x})]^2 + U[\bar{y}_n(\check{x},\check{x})] <$

$$< [\bar{y}'(\check{x})]^2 + U[\bar{y}(\check{x})] , \qquad (25)$$

так как для любого решения $z(x)$ задачи (1)-(2)

$$[z'(x)]^2 + U[z(x)] = 4\int_x^{+\infty}\frac{[z'(t)]^2}{t}\,dt .$$

Оценим величину

$$[\bar{y}'(\check{x})]^2 + U[\bar{y}(\check{x})] = 4\int_{\check{x}}^{+\infty}\frac{[\bar{y}'(x)]^2}{x}\,dx .$$

$$4\int_{\check{x}}^{+\infty}\frac{[\bar{y}'(x)]^2}{x}\,dx = 4\int_{\check{x}}^{+\infty}\frac{[-\bar{y}'(x)]}{x}\cdot[-\bar{y}'(x)]\,dx . \qquad (26)$$

Так как $\bar{y}(x)$ монотонно не возрастает и в силу (1) $\bar{y}''(x) > 0$.
Поэтому $-\frac{\bar{y}'(x)}{x} \le \frac{|\bar{y}'(\hat{x})|}{\check{x}}$.

Поэтому из (26):

$$4\int_{\check{x}}^{+\infty}\frac{[\bar{y}'(x)]^2}{x}\,dx \le \frac{|\bar{y}'(\hat{x})|}{\check{x}}\cdot\bar{y}(\check{x}) = O\left(\frac{1}{\check{x}}\right).$$

Отсюда и из (25) следует, что для достаточно больших $\check{X}$ и n

$$[\bar{y}_n'(\check{x},\check{x})]^2+U[\bar{y}_n(\check{x},\check{x})]<\frac{C}{2M}[\bar{y}_n'(\check{x},\check{x})-y_n'(\check{x})]. \quad (27)$$

Из неравенств (22), (24) и (27) следует, что

$$[y_n'(\bar{x}_n)]^2+U[y_n(\bar{x}_n)]<0$$

для достаточно больших номеров n. Но это противоречит тому, что $x_{m+2}^{(n)}>\bar{x}_n$, так как, как установлено ранее,

$$[y_n'(x_{m+2}^{(n)})]^2+U[y_n(x_{m+2}^{(n)})]>0,$$

а функция $[y_n'(x)]^2+U[y_n(x)]$ является невозрастающей. Пришли к противоречию, следовательно, $m\geqslant r-1$.
Если $m=r-1$, то, как и в п. 3, доказывается, что $y(x)$ – частицеподобное решение. Лемма доказана.

Литература

I. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-12609, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1979 года.