сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12609

Е.П.Жидков, П.Е.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Часть 1

1979

Жидков Е.П., Жидков П.Е. P5 - 12609

Исследование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики /часть 1/

Рассматривается краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с сингулярной особенностью, которое возникает при рассмотрении ряда задач в физике элементарных частиц. Сформулированы и доказаны достаточные условия существования частицеподобных решений с любым числом узлов для широкого класса задач математической физики. В частности, строго доказано существование частицеподобных решений с любым числом узлов в модели Фридберга-Ли-Сирлина.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zhidkov E.P., Zhidkov P.E. P5 - 12609

Investigation of Particle-Like Solutions in Some Models of Nonlinear Physics. Part I.

A boundary value problem for nonlinear ordinary differental equation with a singular discontinuity which appears at considering a series of problems in physics of elementary particles is considered. Sufficients conditions of existence of particle-like solutions with any number of roots are formulated and proved for a broad class of problems of mathematical physics. Among their number it is proved strictly there exist particle-like solutions with any number of roots in the Friedberg-Lee-Sirlin model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Данная работа является продолжением работ /I-2/. Как и в /I-2/, объектом исследования является следующая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + \frac{2}{x} y' = f(y)$$

$$y(0) = y_0 < \infty , \quad y'(0) = 0 , \quad y(+\infty) = 0 ,$$

где y_0 - вещественный параметр.

В настоящей работе получены достаточные условия существования решений указанной краевой задачи с любым числом корней для широкого класса функций $f(y)$.

Рассмотрим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + \frac{2}{x} y' = f(y) , \quad 0 \leq x < +\infty \tag{I}$$

$$y(0) = y_0 , \quad y'(0) = 0 , \tag{2}$$

где y_0 - параметр.

Будем предполагать, что функция $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица на любом конечном интервале.

Введем функцию $U(y) = -2\int_0^y f(t)\,dt$.

Для любого решения $y(x)$ уравнения (I) имеет место тождество:

$$\left\{ [y'(x)]^2 + U[y(x)] \right\}' = -4\frac{[y'(x)]^2}{x} . \tag{3}$$

Из (3) следует, что величина $\left\{ [y'(x)]^2 + U[y(x)] \right\}$

не возрастает на полупрямой $0 \le x < +\infty$, следовательно, для произвольного $x: x \geqslant 0$ имеем: $U[y(x)] \le U[y(0)]$.
Из этого неравенства вытекает, что если только существуют такие числа $y_1, y_2: y_1 < y(0) < y_2$, что $U(y_1) \geqslant U[y(0)]$, $U(y_2) \geqslant U[y(0)]$, то для любого $x \geqslant 0$ $y_1 < y(x) < y_2$.
Основываясь на этих рассуждениях, нетрудно доказать следующую теорему о разрешимости задачи (I)-(2).

Теорема I. Пусть y_0 таково, что найдутся y_1 и y_2: $y_1 < y_0 < y_2$ такие, что $U(y_1) \geqslant U(y_0)$, $U(y_2) \geqslant U(y_0)$.
Тогда для данного y_0 существует решение задачи (I)-(2) для всех $x \geqslant 0$.

Примечание. Если α - некоторый корень функции f, то задача (I)-(2) разрешима при $y_0 = \alpha$ - ее решением является функция $y(x) = \alpha$, хотя условия теоремы I для данного y_0 могут и не выполняться.

Справедливы также теоремы о единственности решения задачи (I)-(2) при любом значении y_0 и о непрерывной зависимости этого решения от начального условия y_0:

Теорема 2. Для любого значения параметра y_0 задача (I)-(2) не может иметь более одного решения.

Теорема 3. Для любого промежутка $0 \le x \le A < +\infty$ и любого y_0 такого, что для него и для близких к нему значений y_0 существует решение задачи (I)-(2), имеет место непрерывная зависимость решения и его первой производной от y_0 в этом промежутке.

Определение. Нетривиальное решение $y(x)$ задачи (I)-(2) назовем частицеподобным, если $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$. Решение $y(x)$ задачи (I)-(2) назовем частицеподобным с K узлами, если оно имеет ровно K корней и $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Пусть $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, 0, \alpha_1, \alpha_2$ - корни функции $f(y)$, причем $\alpha_{-2} < \alpha_{-1} < 0 < \alpha_1 < \alpha_2$, и пусть $f(y) < 0$ при $y \in \{(\alpha_{-1}, 0) \cup (\alpha_1, \alpha_2)\}$,
$f(y) > 0$ при $y \in \{(\alpha_{-2}, \alpha_{-1}) \cup (0, \alpha_1)\}$.
Пусть существуют положительные ε, η_1 такие, что $f(y)$ возрастает в промежутке $-\varepsilon \le y \le \varepsilon$ и для любого y:

$$y \in [-\varepsilon, \varepsilon] \qquad |f(y)| \geqslant \eta_1 \cdot |y|.$$

Пусть, кроме того, $U(\alpha_{-2}) \geqslant U(\alpha_2)$.

Имеется Y_τ - непустое множество из интервала (α_1, α_2) такое, что для любого $a \in Y_\tau$ решение задачи (I)-(2) имеет не менее τ корней, если $y_0 = a$.

Лемма. Пусть теперь a - предельная точка множества Y_τ, причем $\alpha_1 < a < \alpha_2$. Тогда решение задачи (I)-(2) при $y_0 = a$ существует и имеет не менее $(\tau - 1)$ корней, причем если число корней указанного решения равно $(\tau - 1)$, то оно является частицеподобным.

Доказательство данной леммы вынесено во вторую часть настоящей статьи, ввиду его большого объема.

Теорема 4. Пусть верны все предположения леммы относительно функций $f(y)$ и $U(y)$. Пусть существует $y_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, при котором соответствующее решение задачи (I)-(2) имеет ровно τ корней, где τ - некоторое натуральное число.

Тогда для любого натурального K: $1 \le K \le \tau - 1$ и для $K = 0$ существует частицеподобное решение задачи (I)-(2) с K узлами.

Доказательство. Во-первых, поскольку для любого $y_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ $U(y_0) < U(\alpha_2) \le U(\alpha_{-2})$, то для любого $y_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ существует решение задачи (I)-(2). Введем следующее обозначение: обозначим через Y_K множество значений параметра y_0 из интервала (α_1, α_2), при которых соответствующие решения задачи (I)-(2) имеют не менее K корней ($K = \overline{1, \tau}$). В силу условия доказываемой теоремы, $Y_K \neq \emptyset$ $(K = \overline{1, \tau})$. Докажем, что существует положительное C: $C < (\alpha_2 - \alpha_1)$ такое, что $\inf Y_\tau \geqslant \alpha_1 + C$. Для этого достаточно доказать, что существует положительное C: $C < \alpha_2 - \alpha_1$ такое, что для любого значения параметра y_0 из промежутка $(\alpha_1, \alpha_1 + C]$ соответствующее решение задачи (I)-(2) не имеет корней.

У нас $U(\alpha_1) < 0$. Возьмем $C > 0$ такое, что для любого α: $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_1 + C]$ $U(\alpha) < 0$. Для произвольного $y_0 \in (\alpha_1, \alpha_1 + C]$ имеем:

$$[y'(0)]^2 + U[y(0)] = U[y_0] < 0,$$

где $y(x)$ - решение задачи (I)-(2), соответствующее данному y_0. Тогда $[y'(x)]^2 + U[y(x)] < 0$ для любого $x \geqslant 0$, так как в силу (3) функция $[y'(x)]^2 + U[y(x)]$ является невозрастающей. Следовательно, функция $y(x)$ не имеет корней, так как если бы некоторое x_0 было корнем $y(x)$, то $[y'(x_0)]^2 + U[y(x_0)] > 0$, что противоречит предыдущему неравенству, тем самым доказано, что $\inf Y_K \geqslant \alpha_1 + C$, где $C > 0$, $K = \overline{1, \tau}$.
Беря теперь значениями y_0 величины $\inf Y_K$ $(K = \overline{1, \tau})$, получим частицеподобные решения с K узлами $(K = \overline{0, \tau - 1})$, в силу леммы.
Теорема 4 доказана.

<u>Теорема 5</u>. Пусть β_2 – корень функции $f(y)$ и пусть существуют $\beta_{-2}, \beta_{-1}, \beta_1$ такие, что:

I) $\beta_{-2} < \beta_{-1} < 0 < \beta_1 < \beta_2$;

2) $U(\beta_{-2}) \geqslant U(\beta_2) > 0$;

3) $f(y) < 0$ при $y \in (\beta_1, \beta_2)$, $f(y) > 0$ при $y \in (\beta_{-2}, \beta_{-1})$

4) $U(\beta_2) > U(y)$, если $y \in [\beta_{-1}, \beta_1]$.

Тогда для любого натурального N_0 существует y_0 такое, что соответствующее ему решение задачи (I)-(2) имеет не менее N_0 корней.

<u>Доказательство</u>. Фиксируем произвольное натуральное N_0. Положим

$$\beta = \min\left\{U(\beta_2) - \max_{\alpha \in [\beta_{-1}, \beta_1]} U(\alpha); U(\beta_{-2}) - \max_{\alpha \in [\beta_{-1}, 0]} U(\alpha)\right\}.$$

Очевидно, что по теореме I для любого $y_0 \in [0, \beta_2]$ существует решение задачи (I)-(2).

Используя тождество (3), нетрудно доказать, что существуют такие $M_1 > 0, M_2 > 0$, что для любого $y_0 \in [0, \beta_2]$ и $x \geqslant 0$

$$|y'(x)| \leq M_1, \quad |y(x)| \leq M_2, \tag{4}$$

где $y(x)$ – решение задачи (I)-(2), соответствующее данному значению y_0.

По теореме о непрерывной зависимости решения $y = \beta_2$ задачи (I)-(2) от начального условия y_0, найдутся $C \in (\beta_1, \beta_2)$ и $\bar{x} > 0$ такие, что

$$[y'(\bar{x})]^2 + U[y(\bar{x})] > U(\beta_2) - \frac{\beta}{2}, \tag{5}$$

$$8\,\frac{M_1 M_2 (N_0 + 1)}{\bar{x}} < \frac{\beta}{2}, \tag{6}$$

где $y(x)$ – решение задачи (I)-(2) при $y_0 = C$, удовлетворяющее еще условию $\alpha_1 < y(x) < \alpha_2$ при $x \in [0, \bar{x}]$.
Пусть $x_1, \dots, x_K$ – все корни функции $y(x)$.
Предположим, что $K < N_0$ (так же, как в лемме, доказывается, что корни $y(x)$ – изолированные).
Положим $x_0 = 0$, $x_{K+1} = +\infty$.

Докажем, что на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, K})$ функция $y(x)$ достигает экстремума один раз, а на $[x_K, +\infty)$ не более одного раза.

Предположим противное. Пусть на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, i_0})$, где i_0 – натуральное число, не большее K, функция $y(x)$ достигает экстремума ровно один раз, а на $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ – более одного раза. Обозначим через $\bar{x}_i$ точку экстремума на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, i_0})$. Экстремальное значение функции $y(x)$ не может совпадать с корнем функции $f(y)$, так как тогда в этой точке нарушалась бы теорема о единственности решения задачи Коши. Поэтому, в силу уравнения (I) в точке экстремума функции $y(x)$ $y''(x) \neq 0$ и, следовательно, все точки экстремума функции $y(x)$ – изолированные. Обозначим через $\bar{x}_{i_0+1}$ и $\bar{\bar{x}}_{i_0+1}$ $(\bar{x}_{i_0+1} < \bar{\bar{x}}_{i_0+1})$ две наименьшие точки экстремума функции $y(x)$ на отрезке $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. Оценим $4\int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}_{i_0+1}} \frac{[y'(x)]^2}{x} dx$. Учитывая, что $y'(x)$ не меняет знака на $[\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i]$, имеем:

$$\int_{\bar{x}_{i-1}}^{\bar{x}_i} \frac{[y'(x)]^2}{x} dx = \int_{\bar{x}_{i-1}}^{\bar{x}_i} \frac{|y'(x)|}{x} \cdot |y'(x)| dx \leq \frac{M_1}{\bar{x}} \int_{\bar{x}_{i-1}}^{\bar{x}_i} |y'(x)| dx \leq 2\,\frac{M_1 M_2}{\bar{x}}.$$

Отсюда

$$4\int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}_{i_0+1}} \frac{[y'(x)]^2}{x} dx \leq 8\,\frac{M_1 M_2 (i_0 + 1)}{\bar{x}} \leq \frac{8 M_1 M_2 N_0}{\bar{x}}. \tag{7}$$

Кроме того, $4\int_{\bar{x}}^{\bar{x}_{i_0+1}} \frac{[y'(x)]^2}{x} dx \leq 4\int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}_{i_0+1}} \frac{[y'(x)]^2}{x} dx$.

Из (7), учитывая (5) и (6), а также тождество (3), получаем, что

$$U(\bar{x}_{i_0+1}) \geqslant U(\bar{\bar{x}}_{i_0+1}) > \max_{\alpha \in [\beta_{-1}, \beta_1]} U(\alpha). \tag{8}$$

Следовательно, величины $y(\bar{x}_{i_0+1})$, $y(\bar{\bar{x}}_{i_0+1})$ лежат в одной из двух областей: $\alpha_1 < y < \alpha_2$, $\alpha_{-2} < y < \alpha_{-1}$.

Пусть для определенности $y(\bar{x}_{i_0+1}) \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $y(\bar{\bar{x}}_{i_0+1}) \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Очевидно, $\bar{x}_{i_0+1}$ – максимум $y(x)$, $\bar{\bar{x}}_{i_0+1}$ – минимум.

В силу (I) $y''(\bar{\bar{x}}_{i_0+1}) < 0$, но это противоречит тому, что в точке минимума должно выполняться условие $y'' \geqslant 0$.

Тем самым доказано, что на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=\overline{1,k})$ функция $y(x)$ достигает экстремума ровно один раз, а на $[x_k, +\infty)$ – не более одного.

Докажем еще, что $y(x) < \beta_1 + \varepsilon$, если $y(x) > 0$ при $x > x_k$ и $y(x) > \beta_{-1} - \varepsilon$, если $y(x) < 0$ при $x > x_k$, для любого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших x.

Пусть для определенности $y(x) > 0$ при $x > x_k$. Если $y(x) < \beta_1$ при всех $x > x_k$, то доказывать нечего.

Пусть $y(d_0) > \beta_1$, где $d_0 > x_k$. Не ограничивая общности рассуждения, будем считать, что $y'(d_0) > 0$.

Функция $y(x)$ не может иметь горизонтальной асимптоты, так как для любого $x \geqslant 0$ $y(x) \leq y(0) < \beta_2$, $f(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\beta_1, \beta_2)$, а горизонтальной асимптотой для $y(x)$ может быть только прямая $y = C$, где C – корень функции $f(y)$ в силу (I).

Поэтому $y(x)$ достигает экстремума в точке $d_1 > d_0$ и далее убывает, пока не достигнет (если достигнет) значения β_1. Если $y(x)$ достигает значения β_1, то нечего доказывать, так как $y(x)$ достигает экстремума при $x > x_k$ не более одного раза, если же нет, то априори $y(x)$ имеет асимптоту $y = C$ и $C \leq \beta_1$, так как $f(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\beta_1, \beta_2)$. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Рассмотрим теперь тождество

$$[y'(\bar{x})]^2 + U[y(\bar{x})] - \left\{[y'(x)]^2 + U[y(x)]\right\}\Big|_{x=+\infty} = 4\int_{\bar{x}}^{+\infty} \frac{[y'(x)]^2}{x}\,dx.$$

В силу доказанного утверждения и неравенства (5) левая часть этого тождества не меньше $\frac{\beta}{2}$. Для правой же части справедлива оценка (7) (она доказывается так же, как прежде). Но тогда получаем противоречие, ибо $8\,\frac{M_1 M_2 (N_0+1)}{\bar{x}} < \frac{\beta}{2}$.

Теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь задачу, встретившуюся ранее в /3,4/:

$$y'' + \frac{2}{x}y' = \eta^2 y - 4y^3 + 3y^5, \qquad 0 \leq x < +\infty \tag{9}$$

$$y(0) = y_0 < \infty, \qquad y'(0) = 0. \tag{IO}$$

Теорема 6. Для любого η: $0 < |\eta| < 1$ существует частицеподобное решение указанной задачи с любым числом узлов. При любом η: $|\eta| \geqslant 1$ задача (9)-(IO) не имеет частицеподобных решений.

Доказательство.

I. Пусть η таково, что $0 < |\eta| < 1$. Положим

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3\eta^2}}{3}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3\eta^2}}{3}},$$

$$\beta_{-1} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3\eta^2}}{3}}, \quad \beta_{-2} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3\eta^2}}{3}}.$$

Нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы 5, следовательно, существуют решения задачи (9)-(IO) со сколь угодно большим числом корней. Также нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы 4, следовательно, задача (9)-(IO) имеет частицеподобные решения с любым числом узлов.

2. Пусть η таково, что $|\eta| \geqslant 1$. Нетрудно проверить, что тогда $U(y) \leq 0$ для любого y, причем $U(y) < 0$, если y не является корнем функции $f(y)$. Предположим, что задача (9)-(IO) имеет частицеподобное решение. Тогда по теореме 4 она имеет положительное частицеподобное решение, которое обозначим через $y_0(x)$. Подставим $y_0(x)$ в тождество (3) и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$. Получим:

$$U[y_0(0)] - [y_0'(x)]^2\Big|_{x=+\infty} = 4\int_0^{+\infty} \frac{[y_0'(x)]}{x}\,dx.$$

Очевидно, что правая часть больше нуля, а левая – не больше. Получаем противоречие. Поэтому при η: $|\eta| \geqslant 1$ задача (9)-(IO) не имеет частицеподобных решений.

Теорема 6 доказана.

Литература

I. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-II599, I978.

2. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-II600, I978.

3. D.L.T. Anderson, J. Math. Phys. 12, 945 (1971)

4. R.Friedberg, T.D.Lee, A. Sirlin. Nucl. Phys. B115, 1(1976).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля I979 года.