5106/2-79

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

17/12-79

ж-696

P5 - 12602

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1979

P5 - 12602

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. P5 - 12602

Об одном классе систем нелинейных интегральных уравнений

Рассматривается один класс нелинейных интегральных уравнений в пространстве $H_{\alpha}^{N}[0,1]$. К этому классу относится, в частности, уравнение Лоу, рассмотренное в работах /4-7/. Доказываются теоремы существования и единственности решений. Предлагается алгоритм приближенного решения данного класса уравнений. Выводятся некоторые условия сходимости и устойчивости итерационных процессов приближенного решения общего операторного уравнения. Эти условия справедливы для рассматриваемого класса уравнений. Отмечена также устойчивость итерационных процессов приближенного решения уравнения Лоу, рассмотренного в /7/, где этот вопрос не был исследован.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zhidkov E.P., Nguyen M., Khoromsky B.N. P5 - 12602

On One Class of Nonlinear Integral Equations

One class of nonlinear integral equations in $H_{\alpha}^{N}[0,1]$ space is considered. This class applies to Low's equation. There are proved the theorems of existence and uniqueness of solutions. An algoritm of interative solution of considered class is proposed. Some conditions for the convergence and the stability of interative processes for numerical solution of general operator equation are obtained. There conditions apply to the considered class of equations. The stability is remarked for interative processes for numerical solution of the Low's equation where these problems were not investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Одномерные нелинейные сингулярные интегральные уравнения изучались, например, Гусейновым А.И./1,2/ и Наталевичем В.К./3/. В настоящей работе рассматривается один класс систем уравнений следующего вида:

$$x(t) = \Phi(x(t), y(t), t) \quad , \tag{1}$$

где $\Phi(x,y,t)$ - действительная функция своих аргументов x, y, t;

$$y(t) = \lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + C\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x(\tau)}{\tau + t}\,d\tau \; ; \tag{2}$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ - искомая вектор-функция; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ - известный вектор вещественных параметров; C - заданная $N\times N$ матрица.

К этому классу систем относится, например, система уравнений Лоу, рассмотренная в /4-7/.

В первом параграфе изучаются вопросы существования и единственности решений системы (I)-(2).

Во втором параграфе система (I)-(2) решается приближенным методом по общей схеме, предложенной в /7/ по аналогии с /8,9/. Здесь рассматривается некоторое применение полученных результатов к итерационным процессам приближенного решения системы уравнений Лоу, рассмотренным в /7/, где сходимость была исследована, а устойчивость еще не рассмотрена.

§ I. Существование и единственность

Систему (I)-(2) будем рассматривать в следующих пространствах L_2^N, C^N, H_α^N и $H_{\alpha,0}^N$ известных, например, в /6/. Предположим, что функция $\Phi(x,y,t)$ удовлетворяет условиям:

I. $\Phi(x^1, y^1, t^1) - \Phi(x^2, y^2, t^2) =$

$$= \varphi_1(x^1, x^2; y^1, y^2; t^1, t^2)(t^1 - t^2) +$$
$$+ \varphi_2(x^1, x^2; y^1, y^2; t^1, t^2)(x^1 - x^2) + \varphi_3(x^1, x^2; y^1, y^2; t^1, t^2)(y^1 - y^2);$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - линейные операторы относительно разностей $t^1 - t^2$, $x^1 - x^2$, $y^1 - y^2$ соответственно,

2. Для всех x^1, x^2 таких, что $\|x^i\|_\alpha \le R$ $(i=1,2)$; $R < \infty$,
а $y^i = \lambda - Sx^i + CS_+x^i$; где

$$Sx^i = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^i(\tau)\,d\tau}{\tau - t}; \quad S_+x^i = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^i(\tau)\,d\tau}{\tau + t},$$

имеют место неравенства:

$$\|\varphi_1\|_C \le R_1(R); \quad \|\varphi_2\|_C \le R_2(R); \quad \|\varphi_3\|_C \le R_3(R);$$
$$\|\varphi_2\|_\alpha \le R_2^\alpha(R); \quad \|\varphi_3\|_\alpha \le R_3^\alpha(R);$$

где $R_i(R)$ $(i=1,2,3)$ и $R_j^\alpha(R)$ $(j=2,3)$ непрерывные функции от R, причем

$$R_1(R) < R,$$

а также $R_i(0) = 0$ и $R_j^\alpha(0) = 0$.

При этих предположениях справедлива следующая лемма.

Лемма I. Пусть $\mathcal{A}$ - оператор, определенный системой (I)-(2). Тогда $\mathcal{A}$ отображает пространство H_α^N в себя, и как оператор из H_α^N в C^N, является вполне непрерывным.

Эта лемма есть непосредственное следствие условий I)-2) и следующих известных неравенств /6/:

$$\|S\|_\alpha \le \frac{2}{(1-\alpha)\pi} + \frac{1 + 2^{\alpha+1} + 3^\alpha}{\pi\alpha} \equiv M_\alpha, \qquad (3)$$

$$\|S_+ \cdot\|_\alpha \le \frac{1}{\pi}. \qquad (4)$$

Пусть $M_R = (x(t) \in C^N \mid \|x(t)\|_\alpha \le R)$;

$\|C\| = \max \sum_{j=1}^{N} |c_{ij}|$;

$a = \max |a_\ell|$, a_ℓ - собственные значения матрицы CC^*, где C^* - сопряженная C-матрица.

Теорема I.

I. Пусть $R > 0$ таково, что

$$R_1(R) + [R_2(R) + R_3(R)(M_\alpha + \|C\|\tfrac{1}{\pi})]R \le R, \qquad (5)$$

тогда во множестве M_R система (I)-(2) имеет хотя бы одно решение.

2. Если же выполняется неравенство

$$R_2(R) + R_3(R)(1 + \tfrac{a}{\pi}) < 1, \qquad (6)$$

то система (I)-(2) имеет в M_R не более одного решения.

3. При выполнении неравенства (5) и следующего неравенства

$$R_2^\alpha(R) + R_3^\alpha(R)(M_\alpha + \|C\|\tfrac{1}{\pi}) < 1 \qquad (7)$$

система (I)-(2) имеет во множестве M_R единственное решение $x^*(t)$, которое может быть получено методом простой итерации.

Доказательство.

I. Пусть выполнено неравенство (5). Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что оператор $\mathcal{A}$ переводит множество M_R в себя. Действительно, если имеет место $\mathcal{A}M_R \subseteq M_R$, то из леммы I, а также теоремы о неподвижной точке, следует, что существует такой элемент $x^*(t)$ множества M_R, что $x^*(t) = \mathcal{A}x^*(t)$.

Пусть $\|x(t)\|_\alpha \le R$, тогда из условий I)-2), а также неравенств (3) и (4) нетрудно получить следующую оценку:

$$\|\mathcal{A}x(t)\|_\alpha \le \|\varphi_1\|_C + \|\varphi_2\|_C R + \|\varphi_3\|_C \|y\|_\alpha$$
$$\le R_1(R) + R_2(R)R + R_3(R)(M_\alpha + \|C\|\tfrac{1}{\pi})R.$$

Отсюда,

$$\|\mathcal{A}x(t)\|_\alpha \le R,$$

т.е. $\mathcal{A}M_R \subseteq M_R$. Первое утверждение доказано.

2. Допустим, что система (I)-(2) имеет два решения $x^1(t) \ne x^2(t)$ во множестве M_R, где R удовлетворяет неравенству (6).

Пусть $u(t) = x^1(t) - x^2(t)$, тогда из условий I) нетрудно видеть, что вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет следующей линейной системе:

$$u(t) = \varphi_2(\dots)\,u(t) + \varphi_3(\dots)(Su(t) + CS_+u(t)) \equiv Bu(t). \qquad (8)$$

Здесь для простоты мы не писали аргументов функций φ_2 и φ_3.

В отличие от (I)-(2), эта система (8) рассматривается в L_2^N. Известно, что если

$$\|B\cdot\|_{L_2} < 1, \qquad (9)$$

то (8) имеет единственное решение, которое тождественно равно нулю. Это означает, что выполнение (9) обеспечивает единственность решения системы (I)-(2).

Из /10/ следует, что

$$\|S\cdot\|_{L_2} \le 1; \quad \|CS_+\|_{L_2} \le \frac{a}{\pi},$$

отсюда и из неравенства (6) получим:

$$\|Bu(t)\|_{L_2} \le \left[\|\varphi_2\|_C + \|\varphi_3\|_C (\|S.\|_{L_2} + \|CS_+\|_{L_2})\right] \|u(t)\|_{L_2}$$
$$\le \left[R_2(R) + R_3(R)(1 + \tfrac{a}{\pi}) \|u(t)\|_{L_2}\right.$$
$$\le \|u(t)\|_{L_2} .$$

Таким образом, неравенство (9) выполнено, т.е. второе утверждение теоремы доказано.

3. Для доказательства третьего утверждения введем следующую метрику:
$$\rho(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|_\alpha , \quad x^1, x^2 \in H_\alpha^N .$$

Пусть выполнены неравенства (5) и (7). Для любых двух элементов $x^1, x^2 \in M_R$ имеем
$$\|Ax^1 - Ax^2\|_\alpha \le \|\varphi_2(x^1 - x^2)\|_\alpha + \|\varphi_3(y^1 - y^2)\|_\alpha$$
$$\le \left[\|\varphi_2\|_\alpha + \|\varphi_3\|_\alpha (\|S.\|_\alpha + \|CS_+\cdot\|_\alpha\right] \|x^1 - x^2\|_\alpha$$
$$\equiv q \|x^1 - x^2\|_\alpha ,$$
где
$$q \equiv \|\varphi_2\|_\alpha + \|\varphi_3\|_\alpha (\|S.\|_\alpha + \|CS_+\cdot\|_\alpha) \le$$
$$\le R_2^\alpha(R) + R_3^\alpha(R)(M_\alpha + \|C\| \tfrac{1}{\pi}) < 1$$
в силу неравенства (7).

Итак, показали, что A осуществляет сжатое отображение M_R в себя и, следовательно, существует единственная неподвижная точка $x^*(t) \in M_R$, такая, что $x^*(t) = Ax^*(t)$, и которая может быть найдена методом простой итерации. Третье утверждение доказано, а значит, и теорема полностью доказана.

Замечание: Неравенства (5),(6), (7) есть неявные ограничения на величины R и $\|\lambda\| = \max_i |\lambda_i|$. Это значит, что решение системы (I)-(2) существует и единственно только при достаточно малых значениях параметров λ_i и R . Однако, как показывают численные расчеты [6], решение системы (I)-(2) существует и единственно в более широкой области, чем область, установленная теоремой I.

Перейдем теперь к вопросам приближенного решения системы (I)-(2).

§ 2. Разностная схема приближенного решения системы (I)-(2)

Пусть задано следующее операторное уравнение
$$x = \mathcal{A} x , \qquad (10)$$
где x - элемент некоторого метрического пространства X , $\mathcal{A}$ - оператор, переводящий каждый элемент $x \in X$ в некоторый элемент этого же пространства. Алгоритм решения этого уравнения (I0) был рассмотрен в [7]. Он разбивается на два этапа. На первом рассматривается системе
$$x_n = \mathcal{A}_n x_n , \qquad (11)$$
где $\mathcal{A}_n$ - оператор, аппроксимирующий оператор $\mathcal{A}$ в некоторой метрике; x_n - элемент пространства X_n, получающегося из X отображением φ_n .

На втором этапе вычисляются приближенные решения уравнения (I0) по формуле
$$x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x^* , \qquad (12)$$
где x_n^* - решение системы (II), которое называется каркасом приближенного решения уравнения (I0), а $\bar{\varphi}_n$-некоторый оператор, переводящий каждый элемент x_n пространства X_n в элемент $x(t)$ пространства X . Этот оператор называется оператором восполнения.

Напомним некоторые определения, которые использованы в [7].

Процесс нахождения каркасов приближенных решений будем называть сходящимся, если
$$\lim_{n\to\infty} \rho_{X_n}(x_n^*, \varphi_n x^*) = 0 ,$$
где x^* - решение уравнения (I0), а процесс нахождения приближенных решений $x^{(n)}$ сходится, если
$$\lim_{n\to\infty} \rho_X (x^*, \bar{\varphi}_n x_n^*) = 0 .$$

В работе [7] было показано, что если оператор $\mathcal{A}_n$ является сжимающим, а φ_n - линейный и ограниченный оператор, то сходимость этих итерационных процессов определяется мерой аппроксимации
$$\gamma_n(x) = \rho_{X_n}(\mathcal{A}_n \varphi_n x , \varphi_n \mathcal{A} x)$$
оператора $\mathcal{A}$ операторами $\mathcal{A}_n$, при этом имеют место следующие неравенства:

$$\sigma_n \equiv \rho_{X_n}(x_n^*, \varphi_n x^*) \le \frac{1}{1-q}\gamma_n(x^*),$$

$$\tau_n \equiv \rho_X(x^*, \bar{\varphi}_n x_n^*) \le \rho_X(\bar{\varphi}_n \varphi_n x^*, \bar{\varphi}_n x_n^*) + \rho_X(\bar{\varphi}_n \bar{\varphi}_n x^*, x^*). \qquad (I3)$$

Обратимся теперь к вопросу устойчивости итерационных процессов (II) и (I2).

Как известно, каждый этап приближенного решения уравнения (I0) связан с погрешностями вычислений. Особенно это относится к первому этапу, так как здесь приходится иметь дело с решением уравнений. В самом деле, решается не система (II), а следующая, "возмущенная":

$$x_n^\delta = Ax_n^\delta + y_n, \quad y_n \ne 0.$$

Пусть X и X_n – банаховы пространства. Введем по аналогии с /8/ следующее определение.

Определение I. Процесс нахождения каркасов приближенных решений системы (II) называется устойчивым (или разностная схема (II) называется устойчивой), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε и такое, что для всех $y_n \in X_n$, норма которых меньше, чем $\delta(\varepsilon)$: $\|y_n\| < \delta(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\|x_n^* - x_n^\delta\| < \varepsilon,$$

по крайней мере для достаточно больших значений n.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если A_n, действующий в банаховом пространстве X_n, является сжимающим

$$\|Ax_n^1 - Ax_n^2\| \le q\|x_n^1 - x_n^2\|,$$
$$0 < q < 1,$$

то процесс нахождения каркасов (II) устойчив.

Доказательство: пусть $\varepsilon > 0$, тогда, положив $\delta(\varepsilon) = \varepsilon(1-q)$ и для всех y_n, $\|y_n\| < \delta(\varepsilon)$, имеем

$$\|x_n^* - x_n^\delta\| = \|Ax_n^* - Ax_n^\delta - y_n\| \le \|Ax_n^* - Ax_n^\delta\| + \|y_n\| \le q\|x_n^* - x_n^\delta\| + \varepsilon(1-q).$$

Отсюда получим

$$\|x_n^* - x_n^\delta\| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

На втором этапе приближенного решения уравнения (I0) помимо погрешностей вычисления каркасов приближенных решений допускается искажение в операторе выполнения $\bar{\varphi}_n$, так что фактически применяется не этот оператор $\bar{\varphi}_n$, а оператор $\bar{\varphi}_n + \Delta\bar{\varphi}_n$. Таким образом, вместо $x^{(n)}$, вычисляемого по формуле (I2), будет элемент $x_\delta^{(n)}$:

$$x_\delta^{(n)} = (\bar{\varphi}_n + \Delta\bar{\varphi}_n)x_n^\delta.$$

Введем следующее определение.

Определение 2. Процесс нахождения приближенных решений системы (I0) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$, существуют числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\omega(\varepsilon) > 0$ такие, что при условии

$$\|y_n\| < \delta(\varepsilon), \quad \|\Delta\bar{\varphi}_n\| < \omega(\varepsilon)$$

выполняется следующее неравенство:

$$\|x^* - x_\delta^*\| < \varepsilon,$$

где $x_\delta^* = \lim_{n\to\infty} x_\delta^{(n)}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. Если процесс нахождения каркасов приближенных решений устойчив, а оператор восполнения $\bar{\varphi}_n$ ограничен, то и процесс нахождения приближенных решений устойчив.

Доказательство этой простой леммы автоматически получается из следующих очевидных неравенств:

$$\|x^* - x_\delta^*\| \le \|x^* - x^{(n)}\| + \|x^{(n)} - x_\delta^*\|,$$
$$\|x^{(n)} - x_\delta^*\| \le \|x^{(n)} - x_\delta^{(n)}\| + \|x_\delta^{(n)} - x_\delta^*\|,$$
$$\|x^{(n)} - x_\delta^{(n)}\| \le \|\bar{\varphi}_n\|\|x_n^* - x_n^\delta\| + \|\Delta\bar{\varphi}_n\|\|x_n^\delta\|.$$

Следствие: итерационные процессы приближенного решения уравнения Лоу, рассмотренные в /7/, являются устойчивыми.

Вернемся к рассмотрению вопросов, связанных с приближенным решением системы (I)-(2). Для этого сначала отрезок [0,I] разобьем на $n-1$ частей точками

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1. \qquad (I4)$$

Эти точки уточняются в соответствии с аппроксимацией операторов S_x и S_+x.

Пусть $H_\alpha^{N,n}$ – пространство элементов x_n, которые получаются из $x(t) \in H_\alpha^N$ сужением на множество точек типа (I4), т.е. x_n имеет вид:

$$x_n = \begin{pmatrix} x_1(t_1), & \dots, & x_1(t_n) \\ x_2(t_2), & \dots, & x_2(t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_N(t_1), & \dots, & x_N(t_n) \end{pmatrix}.$$

$H_\alpha^{N,n}$ будет банаховым, если введена норма [7]:

$$\|x_n\|_C = \max_{1\le i\le N} \max_{1\le j\le n} |x_i(t_j)| < +\infty ;$$

или норма

$$\|x_n\|_\alpha = \max_{1\le i\le N} \left[\max_{1\le j\le n} |x_i(t_j)| + \sup \frac{|x_i(t_j) - x_i(t_{j+1})|}{|t_j - t_{j+1}|_\alpha}\right] < +\infty .$$

Пусть вместо операторов Sx и S_+x рассматриваются линейные конечномерные операторы соответственно B^1x_n и B^2x_n, которые действуют в $H_\alpha^{N,n}$, а $x(t)$ заменяется элементом x_n, тогда вместо A получается оператор A_n, а вместо системы (I)-(2) получается следующая конечномерная система уравнений:

$$x_n = Ax_n . \tag{I5}$$

Как и в [7], мерой аппроксимации оператора A оператором A_n берется величина

$$\gamma_n(x) = \|A_n \varphi_n x - \varphi_n Ax\|_C .$$

Пусть $\gamma_n^1(x)$ –мера аппроксимации оператора Sx оператором B^1x_n, а $\gamma_n^2(x)$– мера аппроксимации оператора S_+x оператором B^2x_n. Тогда, аналогично [7], а также из условий I)-2), можно получить следующее неравенство

$$\gamma_n(x) \le \mathcal{L}\left[\gamma_n^1(x) + \|c\|\, \gamma_n^2(x)\right], \quad 0 < \mathcal{L} < +\infty . \tag{I6}$$

Пусть, далее, M_R^n – множество, получающееся из M_R заменой $x(t)$ на x_n, тогда совершенно аналогичным [7] образом можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. Пусть справедливы неравенства (5) и (7), и пусть B^1x_n и B^2x_n таковы, что

$$\|B^1x_n^1 + B^2x_n^1 - B^1x_n^2 - B^2x_n^2\|_\alpha \le \mathcal{L}_1 \|x_n^1 - x_n^2\|_\alpha , \tag{I7}$$

$$0 < \mathcal{L}_1 < +\infty .$$

Тогда во множестве $M_R^n \subseteq H_\alpha^{N,n}$ система (I5) имеет единственное решение x_n^*, которое может быть получено методом простой итерации.

Таким образом, из результатов [7] для сходимости итерационных процессов, из неравенств (I3),(I6), а также из лемм 2,3,4 получается следующий окончательный результат.

Теорема 2. Пусть выполнены неравенства (5) и (7), а B^1x_n и B^2x_n таковы, что выполняется (I7) и

$$\gamma_n^1(x^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 , \quad \gamma_n^2(x^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Тогда система (I)-(2) имеет единственное решение $x^*(t)$, которое может быть получено методом последовательных приближений, при этом:

I) процесс нахождения каркасов приближенных решений сходится и устойчив, причем

$$\sigma_n \equiv \rho_{X_n}(x_n^*, \varphi_n x^*) \le \frac{\mathcal{L}}{1-q}\left[\gamma_n^1(x^*) + \|c\|\gamma_n^2(x^*)\right] ;$$

2) процесс нахождения приближенных решений сходится и устойчив и

$$\tau_n \equiv \rho_X(x^*, \bar\varphi_n x_n^*) \le \|\bar\varphi_n\| \frac{\mathcal{L}}{1-q}\left[\gamma_n^1(x^*) + \|c\|\gamma_n^2(x^*)\right] + \|\bar\varphi_n \varphi_n x^* - x^*\|_\alpha ;$$

если $\bar\varphi_n$ линейный и ограниченный оператор из $H_\alpha^{N,n}$ в H_α^N и $\|\bar\varphi_n \varphi_n x^* - x^*\|_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (Последнее выражение имеет место, если в качестве $\bar\varphi_n$ берется некоторый сплайн, как это было проделано в [7]).

В заключение отметим, что теорема 2 носит более общий характер, нежели аналогичная в [7]. Она дает широкий выбор операторов B^1x_n, B^2x_n и $\bar\varphi_n x_n$.

Данная работа – естественное обобщение работ [6,7]. Особенно это относится к той части, где рассматривается устойчивость итерационных процессов. Она является существенным дополнением к работе [7], где этот вопрос не был рассмотрен.

Литература

1. Гусейнов А.И. Математ. сб., 20(62), № 2, 1947.
2. Гусейнов А.И. Изв.АН СССР, сер.математ.,т.12, № 2, 1948.
3. Наталевич В.К. Уч.зап. Казанск.ун-та, т.112, № 10, 1952.
4. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ Р5-11470, Дубна, 1978.
5. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ Р5-11471, Дубна, 1978.
6. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ Р5-11912, Дубна, 1978.
7. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ Р11-12247, Дубна, 1979.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1977.
9. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений."Наука", М., 1971.
10. Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. "Наука", М., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 июня 1979 года.