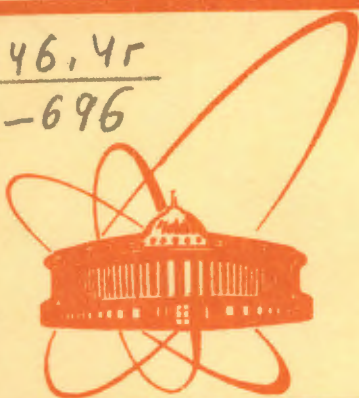


С 346.4г
ме-696



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1926/2-79

3/12-79

P5 - 12574

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

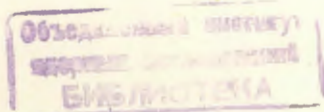
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
 $\pi\pi$ -РАССЕЯНИЯ С ОДНИМ ВЫЧИТАНИЕМ

1979

P5 - 12574

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ПЛАЗМЕННОГО РАССЕЯНИЯ С ОДНИМ ВЫЧИТАНИЕМ**



Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н.

P5 - 12574

Численное решение системы уравнений $\pi\pi$ -рассеяния с одним вычитанием

Система сингулярных интегральных уравнений $\pi\pi$ -рассеяния с одним вычитанием приводится к виду, удобному для применения принципа сжатых отображений. Результаты численных расчетов, проведенных для этой системы, сравниваются с приближенными решениями, полученными из теории возмущений, и, таким образом, определяются пределы применимости формул теории возмущений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zhidkov E.P., Nguyen M., Khoromsky B.N.

P5 - 12574

Numerical Solution of Equation System of $\pi\pi$ -Scattering with One Subtraction

A system of singular integral equation of $\pi\pi$ -scattering with one subtraction is reduced to a form convenient for the application of a principle of contractive mappings. Results of numerical calculations performed for this system are compared with approximated solutions obtained from the perturbation theory and, thus, limits of applicability of formulae of perturbation theory are determined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

© 1979 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

I⁰. В настоящей заметке рассматривается следующая задача из теории $\pi\pi$ -рассеяния.

Пусть требуется найти в z -плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ три аналитические функции $h_1(z)$, $h_2(z)$, $h_3(z)$, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$h_3(z) = \gamma_3 \lambda + 3h_2(0) + \frac{z}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\Im h_1(x)}{x-z} - \sum_{k=1}^3 b_{3k} \frac{\Im h_k(x)}{x+z} \right] \frac{dx}{x}, \quad (I)$$

($s=1, 3$);

$$h_2(z) = \frac{z-1}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\Im h_2(x)}{(x-z)(x-1)} - \sum_{k=1}^3 b_{2k} \frac{\Im h_k(x)}{(x+z)(x+1)} \right] dx; \quad (2)$$

где $\gamma_1=5$, $\gamma_3=2$; λ - заданный вещественный параметр,

$$\Im h_s(x) = k(x)/h_s(x)^2, \quad x \geq 1; \quad (3)$$

$$k(x) = (x-1)^{1/2} (x+1)^{-1/2};$$

b_{sk} ($s, k=1, 2, 3$) - элементы следующей матрицы B :

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & -3 & 5/3 \\ -1/9 & 1/2 & 5/18 \\ 1/3 & 3/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (I)-(3) есть так называемые уравнения $\pi\pi$ -рассеяния с одним вычитанием, рассмотренные в [1], где установлено, что решение (I)-(3) допускает при $z \rightarrow +\infty$ следующие асимптотики:

$$\operatorname{Re} h_s(z) \sim d_s / \ln z; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{Re} h_s(z) \sim \ell_s / z, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{Re} h_s(z) \sim f_s / z^2; \quad (4.3)$$

где d_s, ℓ_s, f_s ($s=1,2,3$) — вполне определенные вещественные числа. Там же для первого приближения решения (I)–(3) по параметру λ берутся следующие формулы:

$$h_s(z) \approx \lambda \left[\frac{1}{f_s} - \lambda \beta_s - \lambda I(z) - \lambda I_s(z) \right]^{-1}; \quad (5)$$

$$s = 1, 3; \quad (6)$$

$$h_2(z) \approx \lambda^2 [\beta_1 + I_2(z)],$$

где

$$I(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \ln \left[\sqrt{\frac{z-1}{2}} + \sqrt{\frac{z+1}{2}} \right] \right\} + i k(z);$$

$$I_s(z) = a_s I(-z), \quad s = 1, 2, 3;$$

$$\beta_1 = -\frac{2}{25} \beta_2, \quad \beta_3 = -\frac{3}{4} \beta_2, \quad \beta_2 = -0.215$$

при

$$|\lambda \ln z| \ll 1$$

$$\text{и } h_1(z) \approx \lambda \left[\frac{1}{f_1} - \lambda I(z) \right]^{-1}, \quad (7)$$

при достаточно больших z .

2°. Заметим, что для решения (I)–(3) достаточно найти $\text{Im } h_s(x)$, $x \geq 1$, ($s=1,2,3$). Для этого, как и в работе^{/2/}, систему (I)–(3) приведем к виду:

$$v(t) = k(t) [v^2(t) + u^2(t)], \quad (8)$$

где

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t)); \quad v_s(t) = \text{Im } h_s(t);$$

$$t \in [0, 1]; \quad x^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2); \quad (9)$$

$$u(t) = \bar{\lambda} + \Phi(t, v) - \alpha \Phi_2(1, v);$$

$$\bar{\lambda} = (5, 0, 2) \lambda; \quad \alpha = (3, 1, 3);$$

$$\Phi = (t, v) = S v - B S_+ v;$$

$$S v = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau - t} d\tau;$$

$$S_+ v = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau + t} d\tau;$$

$$k(t) = (1-t)^{1/2} (1+t)^{-1/2},$$

а $\Phi_2(1, v)$ — вторая компонента вектора $\Phi(t, v)$ при $t = 1$.

Будем искать решение (8)–(9) аналогично^{/2/} в пространстве $H_{\alpha, 0}^3 [0, 1]$. Пусть \mathcal{K} — конус неотрицательных вектор-функций $v(t) \in H_{\alpha, 0}^3 [0, 1]$. Тогда из (8)–(9), (4), а также^{/2/} следует, что решение (8)–(9), если оно существует, принадлежит \mathcal{K} .

Пусть A — оператор, определенный правой частью (8)–(9). Тогда нетрудно видеть, что A переводит \mathcal{K} в себя. Кроме того, оператор A имеет следующие свойства^{/2/}:

$$1) Ax - Ay = \varphi_1(\cdot) * (x - y) + \varphi_2(\cdot) * (u(x) - u(y)),$$

$$\text{где } \varphi_1(\cdot) = k(t)(x + y); \quad \varphi_2(\cdot) = k(t)(u(x) + u(y));$$

$$u(v) = \bar{\lambda} + \Phi(t, v) - \alpha \Phi_2(1, v);$$

$$x, y \in \mathcal{K}.$$

$$2) \text{ Пусть } \|x\|_{\alpha} \leq R, \quad \|y\|_{\alpha} \leq R, \quad x, y \in \mathcal{K}$$

тогда

$$\|\varphi_1(\cdot)\|_{\alpha} \leq 2R \|k(t)\|_{\alpha};$$

$$\|\varphi_2(\cdot)\|_{\alpha} \leq 2R \|k(t)\|_{\alpha} (M_{\alpha} + \|B\| \frac{1}{\alpha}),$$

где

$$M_{\alpha} = \frac{2}{\pi(1-\alpha)} + \frac{3^{\alpha} + 2^{\alpha+1} + 1}{\pi \alpha};$$

$$\|B\| = \max_{j=1}^3 |b_{ij}| = 5,$$

а под $\|\cdot\|_{\alpha}$ подразумевается норма в $H_{\alpha, 0}^3 [0, 1]$. Здесь и далее $\alpha = 1/2$ в силу свойств функции $k(t)$.

Таким образом, систему уравнений (8)–(9) со свойствами I)–2) можно отнести к тому классу интегральных уравнений, который был исследован в^{/3/}. Прямым применением полученных результатов в^{/3/} к системе (8)–(9) является следующая теорема.

Теорема. Пусть λ — достаточно малое число. Тогда на некотором отрезке

$$0 \leq \|v\|_{\alpha} \leq R$$

конуса \mathcal{K} система (8)–(9) имеет единственное решение $v^*(t)$, которое может быть получено методом простой итерации. При этом приближенные решения (8)–(9) для разностной схемы точности $O(\Delta t^{\alpha})$ сходятся и устойчивы (Δt — шаг сетки).

Алгоритм приближенного решения (8)–(9) аналогичен тому, который был подробно обсужден в^{/3,4/}, поэтому здесь его не приводим. Численные решения (8)–(9) при различных значениях параметра λ приводятся в табл. I для всего промежутка изменения независимой переменной $t \in [0, 1]$.

3°. С целью сравнения приведенных результатов с результатами, полученными методом теории возмущений в^{/1/}, приводим расчеты значений $v_i^*(t) = \text{Im } h_i(t)$, $t \in [0, 1]$, по формулам (5)–(7).

Из (5)–(7) нетрудно видеть, что при $z \in [1, \infty)$ имеют место следующие выражения:

1. $\mathcal{I}_m h_2(z) = 0$,
2. $\mathcal{I}_m h_3(z) = \mathcal{I}_m [I(z) + I_3(z)] / \left| \frac{1}{\delta_s \lambda} - \beta_s - I(z) - I_3(z) \right|^2$,
3. $\mathcal{I}_m I(z) = k(z)$,
4. $\mathcal{I}_m I_3(z) = 0$.

Пусть $t = \frac{1}{z}$, тогда в области $|\lambda \ln t| \ll 1$.

Значения $v'_i(t)$ можно приближенно вычислить по формулам:

$$v'_i(t) = \begin{cases} k(t) / M_i(t), & i = 1, 3, \\ 0, & i = 2, \end{cases} \quad (\text{IO})$$

где

$$M_i(t) = k^2(t) + \left[b_i + \frac{2}{\lambda} (a_i k(t) + k^{-1}(t)) \ln \left(\sqrt{\frac{1+t}{2t}} + \sqrt{\frac{1-t}{2t}} \right) \right]^2;$$

$$b_i = \frac{1}{\delta_i \lambda} - \beta_i - \frac{a_i + 1}{2}.$$

В области достаточно малых t значения $v'_i(t)$ можно вычислить по формуле:

$$v'_1(t) = k(t) / N(t), \quad (\text{II})$$

где

$$N(t) = k^2(t) + \left\{ \frac{2}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{4} - k(t) \ln \left(\sqrt{\frac{1+t}{2t}} + \sqrt{\frac{1-t}{2t}} \right) \right] - \frac{1}{5\lambda} \right\}^2.$$

Сравнение решения $v(t)$ системы (8)–(9) со значениями $v'_i(t)$, вычисленными по формулам (IO)–(II), приводится в таблицах 2 и 3.

Отметим, что значения $v'_i(t)$, вычисленные по формулам (IO)–(II), отличаются от точных на величину $o(\lambda)$. В то же время приближенные решения системы (8)–(9) могут быть сколько угодно близкими к точным. В этом заключается одно из преимуществ предлагаемого метода по сравнению с методом теории возмущений. Более того, формулы (IO)–(II) дают значения $v'_i(t)$ только в окрестностях концов отрезка $[0, 1]$. Решения же системы (8)–(9) вычисляются сразу на всем отрезке при различных допустимых значениях параметра λ . В [1] показано, что допустимые значения параметра λ значительно меньше, чем $\lambda_{\max} = 0,4$ ($\lambda \ll 0,4$).

Численные расчеты показывают, что решение (8)–(9) существует при всех значениях λ , не превосходящих 0,3. При $\lambda > 0,3$ итерационные процессы расходятся. При $\lambda \leq 0,3$ эти процессы доста-

точно быстро сходятся и устойчивы. Это, вероятно, объясняется тем, что при $\lambda \in [0, 0,3]$ оператор \mathcal{A} , определенный правой частью (8)–(9), осуществляет сжатое отображение отрезка $0 \leq \|v\|_\infty \leq R$ конуса \mathcal{K} в себя, а это, в свою очередь, обеспечивает сходимость и устойчивость итерационных процессов^{3,4/}; при $\lambda > 0,3$ сжатие не имеет места.

Результат сравнения показывает, что приближенные решения для асимптотических формул (IO)–(II) дают удовлетворительную точность в окрестности концов отрезка $[0, 1]$. Таким образом, с помощью приближенного решения системы (8)–(9) можно определить области применимости формул (IO)–(II).

В заключение авторы выражают благодарность В.И. Муравлеву за полезные обсуждения при постановке задачи.

Таблица I

Приближенные решения системы (5) при различных значениях параметра λ .

λ	T	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$
$\lambda = 0,1$	0.1	.9070E - 01	.2113E - 04	.1030E - 01
	0.2	.9387E - 01	.1251E - 04	.1572E - 01
	0.3	.1142E + 00	.5647E - 05	.1524E - 01
	0.4	.1164E + 00	.2725E - 05	.1418E - 01
	0.5	.1164E + 00	.1046E - 05	.1231E - 01
	0.6	.1116E + 00	.6812E - 06	.1135E - 01
	0.7	.1027E + 00	.2884E - 06	.9666E - 02
	0.8	.8870E - 01	.1649E - 06	.7770E - 02
	0.9	.6640E - 01	.1023E - 07	.5347E - 02
$\lambda = 0,3$	0.1	.4659E + 00	.1100E - 02	.9548E - 01
	0.2	.4209E + 00	.5293E - 03	.1226E + 00
	0.3	.7413E + 00	.2585E - 03	.1224E + 00
	0.4	.6872E + 00	.1287E - 03	.1161E + 00
	0.5	.1069E + 01	.6047E - 04	.1064E + 00
	0.6	.9588E + 00	.2880E - 04	.9484E - 01
	0.7	.1376E + 01	.1146E - 04	.8130E - 01
	0.8	.1208E + 01	.3854E - 05	.6551E - 01
	0.9	.9540E + 00	.2472E - 06	.4547E - 01

Таблица 2.

Сравнение значений $v'_i(t)$, вычисленных по формулам (10) с приближенными решениями системы (8)-(9) при t , близких к 1 и $\lambda = 0,05$

t	0.925	0.950	0.975
$v'_1(t)$.1892E - 01	.1541E - 01	.1087E - 01
$v_1(t)$.1808E - 01	.1479E - 01	.1054E - 01
$v'_2(t)$	0	0	0
$v_2(t)$.2632E - 09	.1379E - 09	.4742E - 09
$v'_3(t)$.1760E - 02	.1434E - 02	.1022E - 02
$v_3(t)$.1790E - 02	.1442E - 02	.1017E - 02

Таблица 3.

Сравнение значений $v'_1(t)$, вычисленных по формуле (11) с приближенным решением $v_1(t)$ системы (8)-(9) при t , близких к нулю и $\lambda = 0,05$

t	0.025	0.050	0.075
$v'_1(t)$.1984E - 01	.2141E - 01	.2226E - 01
$v_1(t)$.1438E - 01	.2863E - 01	.3024E - 01

Литература

1. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., Наука, 1967.
2. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р5-11912, Дубна, 1978.
3. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р5-12602, Дубна, 1979.
4. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р11-12247, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1979 года.