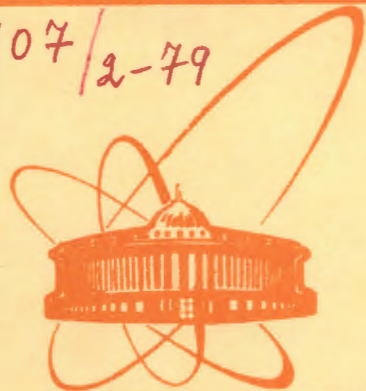


5107/2-79



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

12/12-79

---

A-394

P5 - 12569

П.Г.Акишин, С.Б.Ворожцов, Е.П.Жидков

ГЕНЕРИРОВАНИЕ  
ТРЕХМЕРНОЙ ТЕТРАЗДРАЛЬНОЙ СЕТКИ  
В ПРИЛОЖЕНИИ К МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1979

P5 - 12569

П.Г.Акишин, С.Б.Ворожцов, Е.П.Жидков

ГЕНЕРИРОВАНИЕ  
ТРЕХМЕРНОЙ ТЕТРАЗДРАЛЬНОЙ СЕТКИ  
В ПРИЛОЖЕНИИ К МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Институт математики  
и механики  
Уральского государственного  
университета

Акишин П.Г., Ворожцов С.Б., Жидков Е.П.

P5 - 12569

Генерирование трехмерной тетраэдральной сетки в приложении к методу конечных элементов

Предложен метод генерации тетраэдральной сетки для областей сложных конфигураций. Тетраэдральная сетка может быть использована для расчетов методом конечных элементов. Максимальный размер тетраэдров регулируется входными данными.

Проведены расчеты по простым модельным задачам с использованием предложенного алгоритма генерации сетки.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Akishin P.G., Vorozhtsov S.B., Zhidkov E.P.

P5 - 12569

Three-Dimensional Tetrahedral Grid Generation  
Applicable to the Finite Element Method

One method of tetrahedral grid generation for partition of complex region configurations is proposed. The tetrahedral grid could be used for the finite element method calculations. Maximum size of tetrahedral is given in the input data.

A simple model finite element problems are solved using the obtained grids.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Расчет трехмерных магнитных полей сложных конфигураций требует в настоящее время значительной подготовительной работы для представления входных данных конкретной задачи. Этой цели служат специальные системы программ или даже отдельные мини-ЭВМ с соответствующим математическим обеспечением<sup>/1,2/</sup>.

Этапами в подготовке данных являются:

- 1) Задание конфигурации области изменения параметров задачи на ЭВМ.
- 2) Генерация сетки.
- 3) Адаптация данных задачи к конкретному алгоритму численного расчета.

Рассмотрим существующие методы генерации сетки, обращая особое внимание на трехмерный случай. Общим в программах, генерирующих сетки, является разбиение всей области задачи на подобласти (макроблоки), в каждой из которых генерация производится или отдельно<sup>/3/</sup>, или при этом устанавливается согласование между сетками подобластей.

Для построения сетки в подобластях существует несколько классов алгоритмов, и среди них следующие:

1) Отображения макроблока на объект простой геометрической формы с единичными размерами. После построения регулярной сетки на этом объекте осуществляется обратное преобразование, позволяющее получить координаты узлов в макроблоке. Например, в работе<sup>/2/</sup> при построении сетки из шестигранников используется полиномиальное отображение на единичный куб. Отображение при помощи полиномов используется также в<sup>/4/</sup>. Подробно алгоритмы отображения и тексты фортранных подпрограмм приведены в<sup>/5/</sup>.

В работе<sup>/6/</sup> предложено осуществить построение треугольной сетки при помощи отображения на простую область, причем линии

сетки являются в этом случае эквипотенциальными решениями уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Аналогичный метод описан в<sup>/7/</sup> для тетраэдральной сетки в трех измерениях. Для метода отображений возникают трудности при повторном генерировании сетки с целью уменьшения шага в отдельных районах<sup>/8/</sup>, что связано с фиксированной топологией сетки.

2) Большую свободу представляют методы, основанные на переборе всевозможных вариантов построения элементов сетки из постепенно увеличивающегося по определенным законам набора точек, принадлежащих области задачи. При этом происходит отбор точек и элементов для получения максимально однородной сетки. Различные алгоритмы этого класса отличаются методом генерации вершин и критериями отбора элементов. Примеры таких генераторов для построения тетраэдральной сетки приведены в<sup>/9/</sup>. Размножение элементов проводилось путем нанесения дополнительных точек на ребрах первоначальной крупной сетки, задаваемой пользователем. Эффективный алгоритм подобного типа с использованием генератора случайных чисел приведен в<sup>/10/</sup>. В этом случае для двумерных задач были получены более однородные треугольные сетки, чем в<sup>/9/</sup>. Генерация сквозной сетки в пределах трехмерной области со сложными внешними и внутренними границами все еще остается трудной задачей<sup>/11/</sup>, и поэтому усилия в этом направлении предпринимаются многими авторами.

В предлагаемой работе рассмотрен метод генерации тетраэдральной сетки, в котором применен алгоритм второго типа. Математически задача формулируется следующим образом.

Пусть имеется некоторая односвязная область  $\Omega \subset R^3$ . Пусть  $\tilde{\Omega}$  есть некий многогранник, аппроксимирующий  $\Omega$ .

Требуется представить  $\tilde{\Omega}$  в виде объединения конечного числа  $N_0$  тетраэдров  $S_i$ .

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_0} S_i.$$

Тетраэдры  $S_i$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\mu(S_i \cap S_j) = 0$  при  $i \neq j$ , т.е. мера пересечения различных тетраэдров равна нулю.
- 2) Вершины одного тетраэдра не могут быть внутренними точками грани или ребра другого тетраэдра, т.е. если два тетраэдра касаются, то они касаются или только по целому ребру, или только по целой грани, или только по одной вершине.

- 3) Диаметр тетраэдра  $S_i$  (наибольшее ребро) не больше заданного значения  $H_{max}$ . В общем случае значение  $H_{max}$  может изменяться в зависимости от того, какой подобласти области  $\tilde{\Omega}$  принадлежит тетраэдр.

Для того, чтобы использовать предлагаемый алгоритм разбиения, необходимо представить  $\tilde{\Omega}$  в виде объединения выпуклых многогранников  $\Omega_i$ :  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_0} \Omega_i$ .

$\Omega_i$  должны удовлетворять условиям а) и б), сходным с условиями 1) и 2).

$$a) \mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j$$

б) Если  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  касаются, то они касаются или только по одной вершине, или только по одному ребру, или только по целой грани. В каждом  $\Omega_i$  задается максимальный диаметр тетраэдров  $H_i$ . Каждый выпуклый многогранник  $\Omega_i$  задается набором координат его вершины  $\{P_{ij}\}$ .

На первый взгляд уже само это представление области  $\tilde{\Omega}$  в таком виде - достаточно сложная задача. Однако большинство трудностей можно обойти введением дополнительных вершин. Проиллюстрируем это на примере области  $\tilde{\Omega}$ , изображаемой на рис.1.

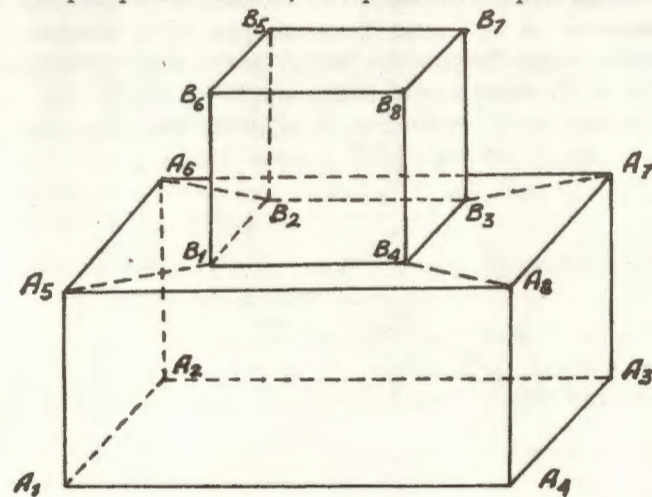


Рис.1.

$\{A_i\}$  и  $\{B_i\}$  - вершинами двух параллелепипедов и  $A_1, B_1, A_2, B_2$  лежат в плоскости  $A_6 A_6 A_7 A_8$ . Тогда, если в нижнем параллелепипеде ввести дополнительные вершины  $B_1, B_2, B_3, B_4$  и соединить их с соответствующими вершинами нижнего параллелепипеда, то представить область в виде объединения двух многогранников, удовлетворяющих условиям а) и б), достаточно просто.

Процесс разбиения состоит из двух этапов. На первом этапе многогранник  $\Omega_i$  разбивается на невырожденные тетраэдры с общими

$\Omega_i$  вершинами. В процессе построения каждого нового тетраэдра проводится проверка выполнения условий 1) и 2) по отношению к уже построенным тетраэдрам, так что в итоге все полученные тетраэдры удовлетворяют этим условиям. При переходе к последующему многограннику проверка условий 1) и 2) проводится с учетом уже построенных к данному моменту тетраэдров. Каждому тетраэдру  $S_j$  присписывается значение  $H_i$  подобласти  $\Omega_i$ , которому принадлежит данный тетраэдр. Если диаметр каждого  $S_i$  не больше  $H_i$ , то на этом процедура разбиения заканчивается. Количество проверок условий 1) и 2) существенно сокращается, если задается информация о том, какие из многогранников  $\Omega_j$  касаются по целой грани.

На втором этапе для каждого ребра находится среднеарифметическое значение  $\tilde{H}$  по всем  $H_i$  тетраэдров  $S_i$ , которым принадлежит данное ребро. Выбирается ребро, для которого отношение длины ребра  $L$  и  $\tilde{H}$  максимально (например,  $AB$  на рис.2). Затем производится деление всех тетраэдров, содержащих это ребро так, как показано на рис.2, причем  $AM$  равно  $MB$ .

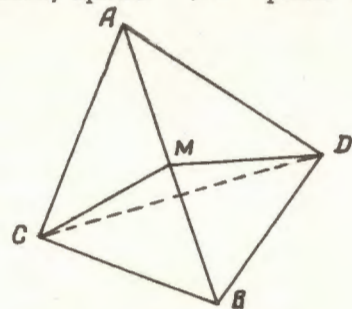


Рис.2.

Значение  $H$  для новых тетраэдров  $AMDC$  и  $CMDB$  присписывается то же, что и для тетраэдра  $ABCD$ . Процесс заканчивается, когда для всех ребер  $L \geq \tilde{H}$ , либо число тетраэдров превысит заданное.

На рис.3,4 изображены две проекции области сложной конфигурации, разбитой после первого этапа на 29 элементов. После второго этапа область была разбита на 295 тетраэдров. Счетное время на ЭВМ СС-6500 составило около двух минут. Память, занимаемая при реализации алгоритма, составила около 49000 слов.

Изложенный алгоритм генерации трехмерной тетраэдральной сетки применялся для решения неоднородной задачи Дирихле

$$\Delta u(\vec{P}) = f(P) \quad P(x, y, z) \in \Omega \subset R^3,$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$u(P)/\partial\Omega = g(P).$$

Бралась заранее известная функция

$$u(x, y, z) = (x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3$$

и по ее значениям вычислялись  $g(x, y, z)$  и  $f(x, y, z)$ . Задача рассматривалась в параллелепипеде  $\Omega \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$ .

Метод конечных элементов применялся для данной задачи с элементами первого порядка  $^{1/12}$ . В таблице приведены заданные значения  $u(x, y, z)$  и полученные численно для двух различных разбиений  $\Omega$  на тетраэдры с максимальным диаметром  $H_1$ , равным 1.2 и 0.9 в общих точках.

В заключение необходимо отметить, что предложенный метод генерации сетки близок к изложенному в  $^{1/9}$ , однако обладает рядом отличительных черт. В частности:

а) анализ качества тетраэдров производится в процессе их генерации, а не после создания "черновой" сетки, что позволяет экономить память и время ЭВМ;

б) до начала генерации не требуется производить построения треугольной сетки на гранях микроблока;

в) так же как в  $^{1/10}$ , в каждом макроблоке имеется возможность для регулирования размеров сетки, что делает его, с нашей точки зрения, более привлекательным в применении к методу конечных элементов.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Б.Нэргую за существенную помощь при отлаживании алгоритма.

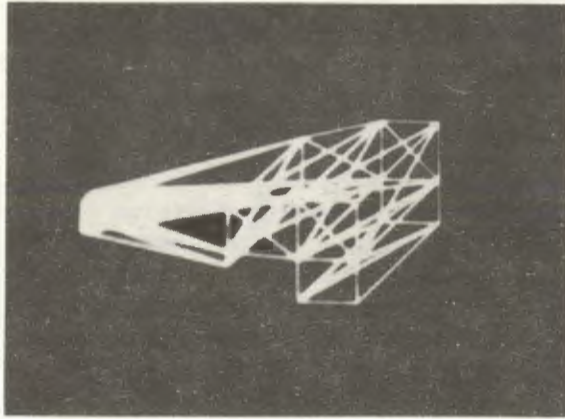


Рис.3

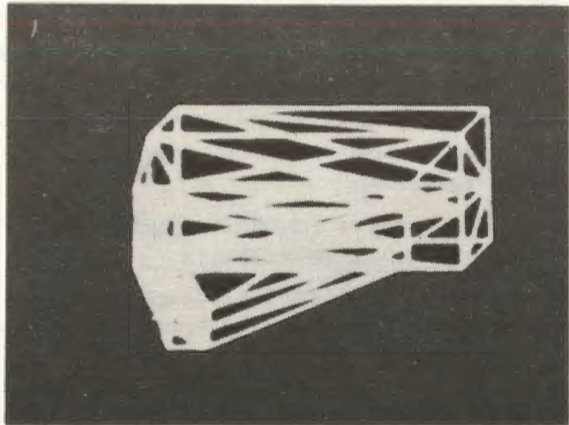


Рис.4

Таблица

$\omega$ точное	$\omega$ численное $H=0.9$	$\omega$ численное $H=1.2$
26,15	26,50	26,75
34,62	34,57	34,26
44,96	45,38	45,67
57,21	57,66	58,03
39,25	38,84	39,88
38,40	38,78	39,16
46,87	46,85	46,48

Литература

1. S.J.Polak et. al. MAGGY2 and PADDY, Program Packages for 2 and 3 Dimensional Magnetostatic Problems Compomag 78, Grenoble, 2,5.
2. M.J.Newman Experience with a Distributed Computing System for Magnetic Field Analysis. Compomag 78, Grenoble, 4,2.
3. F.Melkes. Automatic Mesh Generation in Magnetic Field Calculations. Compomag 78, Grenoble, 11,2.
4. G.Massini, E.Zolti. CNEN, RT/ING (74) 35.
5. W.A.Cook, Int. Journ. Num. Meth. Eng V. 8,27-43 (1974),
6. A.M.Winslow. Journ. Comp. Phys. V.1, 149-172 (1966).
7. Дойников Н.И., Смаков А.С. Препринт Б-0155 НИИЭфа, Л.(1972).
8. G.F.Carey Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 7(1976) 93-105.
9. H.A.Kamel, H.K.Eisenstein. Proc. Symp. Int. Union Theor. Appl. Mech. Liege, 1970, T.2, P.454
10. J.Suhara, J.Fukuda, Advances in Comp. Meth. in Struct. Mech.and Design. UAN Press, 1972.
11. A.G.Armstrong , "The solution of 3D Magnetostatic Problem Using Scalar Potential". Compomag 78, Grenoble, 1,2.
12. Стрэнг Г., Фикс Дж."Теория метода конечных элементов", "Мир", 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел  
20 июня 1979 года.