сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12523

Е.П.Жидков, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \pm(u-u^3)$

1979

P5 - 12523

Е.П.Жидков, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \pm (u - u^3)$

P5 - 12523

Жидков Е.П., Кирчев К.П.

Устойчивость уединенной волны для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \pm(u - u^3)$

Метод Бенжамина применен к исследованию устойчивости уединенной волны некоторого нелинейного уравнения. С использованием нелинейных функционалов, инвариантных относительно времени и удовлетворяющих некоторым ограничениям, показана устойчивость "формы".

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P5 - 12523

Zhidkov E.P., Kyrchev K.P.

The Stability of Solitary Wave of $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \pm(u-u^3)$ Equation

We proved the stability of the shape of the solitary wave of the listed equation by the method of Benjamin, which is based on the investigation of some nonlinear functionals invariant with respect to time.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Джефрей и Какутани в работе [1] рассмотрели вопрос об устойчивости уединенной волны для уравнения Кортевега де Фриза в рамках линейного приближения. Бенжамин в работе [2] отмечает, что работа Джефрея и Какутани не дает удовлетворительного решения вопроса, так как нет гарантий, что из устойчивости в рамках линейного приближения вытекает устойчивость уединенной волны для полного нелинейного уравнения. В этой же работе Бенжамин, остроумным образом используя спектральную теорию, дал полное решение вопроса об устойчивости уединенной волны для уравнения Кортевега де Фриза. Отметим, что для применения метода Бенжамина достаточно наличия двух нелинейных функционалов, инвариантных относительно времени. Таким образом можно исследовать и уравнения, неинтегрируемые методом обратной задачи рассеяния.

1. Предварительные рассмотрения

Настоящая работа посвящена применению метода Бенжамина к исследованию устойчивости уединенной волны для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \epsilon (u - u^3), \qquad \text{где} \quad \epsilon = \pm 1 . \qquad /1/$$

Уравнение /1/ имеет решение вида уединенной волны $\Phi(y) =$

$$\mathrm{th}(2^{-1/2} C y), \qquad \text{где} \quad 0 < C < \infty , \; y = x - C^{-2} \epsilon t . \qquad /2/$$

Следуя методу Бенжамина, будем исследовать устойчивость "формы" решения /2/.

Определение устойчивости. Φ устойчиво относительно метрик d_1 и d_{11}, если для каждого $\epsilon > 0$ существует δ_ϵ, так что из $[d_1(u,\Phi)]_{t=0} \leq \delta$ следует $d_{11}(u,\Phi) \leq \epsilon$, $t \geq 0$. Здесь u - решение уравнения /1/, которое удовлетворяет некоторым естественным дополнительным требованиям.

Пусть $I(u,\Phi)$ - функционал, инвариантный относительно t, когда u является решением /1/. Тогда устойчивость будет показана, если существуют константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $A > 0$, такие, что когда $d_1 \leq A$ при $t = 0$, то

$$\alpha[d_1(u,\Phi)]^2 \geq I(u,\Phi) \quad \text{при} \quad t=0, \tag{3}$$

$$\beta[d_{11}(u,\Phi)]^2 \leq I(u,\Phi) \quad \text{при} \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Пусть $u = \Phi + h$ является решением /1/, удовлетворяющим следующим условиям:

а/ $h(x,t)$ для любого $t \geq 0$, являясь функцией от x, принадлежит $W_2^1(R)$ /пространство Соболева с нормой $\|h\| = \{\int_{-\infty}^{\infty} (h^2+h'^2)dx\}^{1/2}$/;

б/ $\lim u_x = 0$ при $x \to \pm\infty$;

в/ $\lim u_t = 0$ при $x \to \pm\infty$.

Пусть τ - группа сдвигов на оси x, $\tau f(x) = f(x-\zeta)$. Зафиксируем ζ и покажем, что из условия "а" вытекает, что

$$\tau u(x,t) - \Phi \subseteq W_2^1(R). \tag{5}$$

Действительно:

$$\tau u(x,t) - \Phi(y) = h(x-\zeta,t) + \Phi(y-\zeta) - \Phi(y),$$

где $y = x - C^{-2}\epsilon t$. Очевидно, из "а" следует, что $h(x-\zeta,t) \subseteq W_2^1(R)$. А для второго члена имеем

$$\Phi(y-\zeta) - \Phi(y) = -\frac{\operatorname{sh}(2^{-1/2}C\zeta)}{\operatorname{ch}(2^{-1/2}C(y-\zeta))\operatorname{ch}(2^{-1/2}Cy)} \subseteq W_2^1(R).$$

В дальнейшем

$$d_1(u,\Phi) = \|u-\Phi\| = \|h\| = \{\int_{-\infty}^{\infty}(h^2+h'^2)dx\}^{1/2}. \tag{6}$$

Метрику d_{11} зададим формулой

$$d_{11}(u,\Phi) = \inf_{\tau} \|\tau u - \Phi\|. \tag{7}$$

Это имеет смысл в силу /5/. Отметим известный факт, что W_2^1 вкладывается непрерывно в C_0 /пространство непрерывных функций, исчезающих при $x \to \pm\infty$ /. При этом выполняется оценка

$$\sup_{x\in R} |f(x)| \leq 2^{-1/2}\|f\|, \quad f \in W_2^1(R). \tag{8}$$

Введем нелинейные функционалы

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx, \tag{9}$$

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2-1)^2 dx. \tag{10}$$

Условие "а" гарантирует существование $E(u)$ и $M(u)$.

Используя /1/ и условия "а", "б" и "в", нетрудно показать, что $E(u)$ и $M(u)$ инвариантны относительно времени t.

Докажем устойчивость в форме /3/, /4/, где в качестве $I(u,\Phi)$ будем использовать $\Delta M = M(u) - M(\Phi)$. Сначала потребуем дополнительно

$$\Delta E = E(u) - E(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi_x h_x + h_x^2)dx = 0. \tag{11}$$

Интегрируя по частям и используя /11/, нетрудно получить

$$\Delta M = \frac{2}{C^2}\int_{-\infty}^{\infty}(h_x^2 + C^2(3\Phi^2-1)h^2)dx + 4\int_{-\infty}^{\infty}\Phi h^3 dx + \int_{-\infty}^{\infty} h^4 dx.$$

$$= \qquad \delta^2 M \qquad + \qquad \delta^3 M \qquad + \qquad \delta^4 M \tag{12}$$

Так как $\Phi^2 \leq 1$, то, используя /8/, получим

$$\Delta M \leq 2m\|h\|^2 + 2\sqrt{2}\|h\|^3 + 2^{-1}\|h\|^4, \tag{13}$$

где $m = \max(C^{-2}, 3)$.

Пусть $\|h\| \leq A$. Тогда

$$\Delta M < a\|h\|^2, \quad \text{где} \quad a = 2m + 2\sqrt{2}\,A + 2^{-1}A^2. \qquad /14/$$

Таким образом, мы имеем неравенство /3/.

Для того чтобы получить оценки снизу, рассмотрим

$$\delta^2 M = \frac{2}{C^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(h_x^2 + C^2(3\Phi^2 - 1)h^2\right)dx =$$

$$= \frac{2}{C^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(h_y^2 + C^2\left(2 - \frac{3}{\operatorname{ch}^2(2^{-1/2}Cy)}\right)h^2\right)dy, \qquad /15/$$

где $y = x - C^{-2}\epsilon t$, t - фиксировано. Разложим h на четную и нечетную части

$$h(y) = f(y) + g(y), \quad h(-y) = f(y) - g(y).$$

Так как $\operatorname{ch}^{-2}(\frac{C}{\sqrt{2}}y)$ является четной функцией, имеем

$$\delta^2 M(h) = \delta^2 M(f) + \delta^2 M(g). \qquad /16/$$

2. Оценка снизу для $\delta^2 M(g)$:

$$\delta^2 M(g) = \frac{4}{C^2}\int_0^{\infty}\left\{ g_y^2 + C^2\left(2 - \frac{3}{\operatorname{ch}^2(2^{-1/2}Cy)}\right)g^2\right\}dy. \qquad /17/$$

Положим $z = \frac{C}{\sqrt{2}}y$ и введем интеграл

$$K = \int_0^{\infty}\left\{ g'^2 - \frac{12}{\operatorname{ch}^2 z}g^2\right\}dz \quad \left\{ \frac{dg}{dz} = g' \right\},$$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{C}\int_0^{\infty}\left\{ g_y'^2 - \frac{6C^2}{\operatorname{ch}^2(2^{-1/2}Cy)}\right\}dy. \qquad /18/$$

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\psi'' + (12\operatorname{ch}^{-2} z + \lambda)\psi = 0, \qquad \psi(0) = 0. \qquad /19/$$

λ - действительное, $\psi(z;\lambda)$ определена на $[0,\infty)$ и ограничена при $z \to \infty$. Поведение $12\operatorname{ch}^{-2} z$ при $z \to \infty$ показывает, что имеет

место случай "предельной точки" /3/. Таким образом, существуют конечное число отрицательных собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r < \infty$, а $[0,\infty)$ является непрерывным спектром.

Если $g \in L_2(0,\infty)$, то существует преобразование

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty}\psi(z;\lambda)g(z)dz,$$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(z;\lambda)G(\lambda)d\rho(\lambda), \qquad /20/$$

где $\rho(\lambda)$ - неубывающая функция.

Запишем равенство Парсеваля для функций g и $\tilde{g} \in L_2(0,\infty)$:

$$\int_0^{\infty} g(z)\tilde{g}(z)dz = \int G(\lambda)\tilde{G}(\lambda)d\rho(\lambda). \qquad /21/$$

Если $g \in W_2^1(0,\infty)$ и g' стремится к нулю при $z \to \infty$, можно показать, что

$$\int_0^{\infty}(g'^2 - 12\operatorname{ch}^{-2} z\, g^2)dz = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda G^2(\lambda)d\rho(\lambda). \qquad /22/$$

/Это следует из /21/ и /19//.

Задача /19/ имеет ровно одно собственное значение /3/ /4.19/ $\lambda_1 = -4$ с соответствующей собственной функцией $\psi_1(z) = (\frac{15}{2})^{1/2}\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z}$. Тогда из /22/ имеем

$$K = -4G_1^2 + \int_0^{\infty}\lambda G^2(\lambda)d\rho(\lambda), \qquad /23/$$

где $G_1 = \int_0^{\infty}\psi_1(z)g(z)dz$.

Используя условие /11/, нетрудно показать, что

$$G_1 = -\frac{(15)^{1/2}}{8C}p^2, \qquad p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_x^2 dx \le \|h\|^2, \qquad /24/$$

$$K = -\frac{15}{16}\frac{p^4}{C^2} + \int_0^{\infty}\lambda G^2(\lambda)d\rho(\lambda) \ge -\frac{15}{16C^2}\|h\|^4. \qquad /25/$$

Теперь, сравнивая $\delta^2 M(g)$ с K, получаем оценку -

$$\delta^2 M(g) \ge -\frac{15}{8\sqrt{2}C^3}\|h\|^4 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{g_x^2}{C^2} + 4g^2\right)dx. \qquad /26/$$

3. Оценка снизу для $\delta^2 M(f)$.

Покажем, что существует такое конечное a, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{u(x-a)-\Phi(x)\}^2 = \inf_{\xi\in R} \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x-\xi)-\Phi(x)\}^2 dx = \Lambda . \qquad /27/$$

Обозначим

$u(x-\xi)-\Phi(x) = r_\xi(x) \in W_2^1(R)$ /из условия /5//;

$u(x-\xi)-\operatorname{sgn} x = W_\xi(x), \quad \Phi(x)-\operatorname{sgn} x = \theta(x);$

$W_\xi(x) = r_\xi(x)+\theta(x).$

Так как

$$r_\xi(x)\in W_2^1(R) \text{ и } \theta(x) = -2\operatorname{sgn} x \frac{e^{-|x|2^{-1/2}C}}{\operatorname{ch} x\frac{C}{\sqrt{2}}} \in L_2(-\infty,+\infty),$$

то $W_\xi(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$.

Выберем последовательность $\{\xi_n\}$, такую, что

$$\Delta = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty}\{u(x-\xi_n)-\Phi(x)\}^2 dx = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty}\{W_{\xi_n}-\theta\}^2 dx .$$

Отсюда, так как $W_{\xi_n}\in L_2$, следует, что существует $W_0\in L_2(-\infty,\infty)$ и

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty}\{W_{\xi_n}-W_0\}^2 dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\{W_0-\theta\}^2 dx = \Delta .$$

Из условия "a" имеем

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \pm 1 . \qquad /28/$$

Допустим, что $\{\xi_n\}$ не содержит конечных точек сгущения. Тогда существует подпоследовательность $\xi_{n_k}\to+\infty$ /или $\xi_{n_k}\to-\infty$ /. Отсюда, используя /28/, получаем

$$W_0(x) = \begin{cases} -2 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad (\lim_{k\to\infty}\xi_{n_k} = +\infty);$$

$$W_0(x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ 2 & x<0 \end{cases} \qquad (\lim_{k\to\infty}\xi_{n_k} = -\infty). \qquad /29/$$

Но /29/ противоречит тому, что $W_0 \in L_2(-\infty,\infty)$. Следовательно, $\{\xi_n\}$ имеет конечную точку сгущения a и $W_0 = u(x-a) - \operatorname{sgn} x$. Тогда

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\{W_0-\theta\}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\{u(x-a)-\operatorname{sgn} x-(\Phi(x)-\operatorname{sgn} x)\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\{u(x-a)-\Phi(x)\}^2 dx .$$

Теперь используя тот факт, что интеграл в правой стороне в /27/ стационарен относительно ξ в т. $\xi = a$, из /28/ получаем

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x-a)\{u(x-a)-\Phi(x)\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-a)\Phi'(x)dx . \qquad /30/$$

Так как мы хотим получить оценку снизу через метрику d_{11}, которая задается формулой /7/, то можем считать, не уменьшая общности, что $u(x-a) = \Phi(x)+h(x)$. Такой выбор h будет достаточен, так как

$$\|h\| \ge d_{11}(u,\Phi). \qquad /31/$$

Тогда /30/ запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\,\Phi'(x)dx = 2\int_0^{\infty} f\,\Phi'(y)dy . \qquad /32/$$

Нижнюю оценку для

$$\delta^2 M(f) = \frac{4}{C^2}\int_0^{\infty}\{f_y^2 + C^2(2-\frac{3}{\operatorname{ch}^2(2^{-1/2}Cy)})f^2\}dy \qquad /33/$$

мы получим, опять используя спектральную теорию, рассматривая интеграл

$$J = \int_0^{\infty}(f'^2-\frac{6}{\operatorname{ch}^2 z}f^2)dz = \frac{\sqrt{2}}{C}\int_0^{\infty}(f'^2-\frac{3C^2}{\operatorname{ch}^2(2^{-1/2}Cy)})dy \qquad /34/$$

и задачу на собственные значения

$$\phi'' + (6\operatorname{ch}^{-2} z+\lambda)\phi = 0, \qquad \phi'(0) = 0. \qquad /35/$$

Задача /35/ имеет ровно одно собственное число $\lambda_1 = -4$ с соответствующей собственной функцией $\phi_1(z) = (\frac{3}{2})^{1/2} \frac{1}{ch^2 z}$. Так как из /32/ вытекает, что $\int_0^\infty f(z)\phi_1(z)dz = 0$, то

$$\int_0^\infty f(z)\phi_1(z)dz = 0,$$

$$J = \int_0^\infty (f'^2 - \frac{6}{ch^2 z} f^2)dz = \int_0^\infty \lambda \mathfrak{F}^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) \ge 0;$$

$$\delta^2 M(f) = \frac{\sqrt{2}}{C} J + \frac{1}{C^2}\int_{-\infty}^{\infty} f_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx + 6\int_0^\infty (1 - \frac{1}{ch^2(2^{-1/2} C y)})\, dy;$$

$$\delta^2 M(f) \ge \frac{1}{C^2}\int_{-\infty}^{\infty} f_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx. \qquad /36/$$

Объединяя /26/ и /36/, получаем оценку для $\delta^2 M(h)$:

$$\delta^2 M(h) \ge \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{C^2} h_x^2 + h^2)dx - \frac{15}{8C^3\sqrt{2}} ||h||^4. \qquad /37/$$

4. Доказательство условной устойчивости

Используя опять /8/, имеем

$$\delta^3 M \ge -4 \sup|h| \int_{-\infty}^{\infty} h^2 dx \ge -2\sqrt{2}\, ||h||^3. \qquad /38/$$

Объединяя оценки /37/ и /38/, получим

$$\Delta M \ge \ell\, ||h||^2 - 2\sqrt{2}\, ||h||^3 - \frac{15}{8C^3\sqrt{2}} ||h||^4, \qquad /39/$$

где $\ell = \min(\frac{1}{C^2}, 1)$.

Обозначим

$$\eta(y) = \ell y^2 - 2\sqrt{2} y^3 - \frac{15}{8C^3\sqrt{2}} y^4;$$

$$\eta'(y) = y(2\ell - 3\cdot 2\sqrt{2} y - \frac{15}{2C^3\sqrt{2}} y^2). \qquad /40/$$

Функция $\eta'(y)$ имеет три корня: отрицательный, ноль и положительный. Обозначим положительный корень через y_0, $\eta'(y_0)=0$. При этом функция $\eta(y)$ на интервале $[0, y_0]$ растет от нуля до $\eta(y_0) > 0$ и в т. $y = y_0$ имеет максимум.

Выберем A как положительный корень уравнения

$$2mA^2 + 2\sqrt{2} A^3 + \frac{1}{2} A^4 = \eta(\frac{y_0}{2}). \qquad /41/$$

Тогда, сравнивая неравенства /13/ и /39/, получаем

$$[d_1(u, \Phi)]_{t=0} \le A < \frac{y_0}{2}, \qquad /42/$$

$$\Delta M > \beta\, ||h||^2, \text{ где } \beta = \frac{4}{y_0^2}\eta(\frac{y_0}{2}). \qquad /43/$$

Возвращаясь теперь к определению метрики d_{11} и объединяя неравенства /13/, /42/ и /43/, получаем окончательно

$$\alpha [d_1(u, \Phi)]^2_{t=0} \ge \Delta M,$$

$$\Delta M \ge \beta [d_{11}(u, \Phi)]^2, \quad \forall t \ge 0. \qquad /44/$$

ΔM не зависит от t. Таким образом, мы доказали устойчивость Φ при дополнительном условии $E(u) = E(\Phi)$.

5. Доказательство устойчивости

Теперь освободимся от ограничения $E(u) = E(\Phi)$:

$$E(\Phi) = \int \Phi'^2 dx = \frac{C^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ch^4(2^{-1/2} C x)} = \frac{2C\sqrt{2}}{3}. \qquad /45/$$

Полагая $u = \Phi + h$, определим такое Φ_E с соответствующей C_E, чтобы $E(\Phi_E) = E(u)$. Положим $a = \frac{C}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{C_E}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$\frac{4}{3} b = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_x + h_x)^2 dx = \frac{4}{3} a + \int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi_x h_x + h_x^2)dx;$$

$$\frac{4}{3}|a - b| = |\int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi_x h_x + h_x^2)dx| \le 4(\frac{a}{3})^{1/2} ||h|| + ||h||^2. \qquad /46/$$

Нетрудно подсчитать, что имеют место оценки

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi-\Phi_E)^2 dx \leq \frac{8(\ln 4-1)}{ab} |a-b| , \qquad /47/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi'-\Phi'_E)^2 dx \leq \frac{4}{3} |a-b| . \qquad /48/$$

Из определения /7/ метрики d_{11} вытекает

$$[d_1(\Phi,\Phi_E)]_{t=0} = \|\Phi-\Phi_E\|_{t=0} = d_{11}(\Phi,\Phi_E). \qquad /49/$$

Используя результаты п.4, запишем

$$\alpha_E [d_1(u,\Phi_E)]^2_{t=0} \geq \Delta M,$$

$$\Delta M \geq \beta_E [d_{11}(u,\Phi_E)], \qquad t \geq 0 . \qquad /50/$$

Из /46/ вытекает, что $C_E \to C$, когда $[d_1(u,\Phi)]_{t=0} = \|h\| \to 0$, и так как константы α_E и β_E зависят непрерывно от C_E, то $\alpha_E \to \alpha$, $\beta_E \to \beta$ при $\|h\| \to 0$

С другой стороны, мы имеем

$$d_1(u,\Phi_E) \leq d_1(u,\Phi) + d_1(\Phi,\Phi_E), \qquad /51/$$

$$d_{11}(u,\Phi) \leq d_{11}(u,\Phi_E) + d_{11}(\Phi,\Phi_E). \qquad /52/$$

Когда зададим $\|h\| = d_1(u,\Phi)$ достаточно малым, то из /47/, /48/ и /51/ получаем, что достаточно малым будет и $d_1(u,\Phi_E)$. Наконец, с учетом непрерывной зависимости α_E и β_E от C_E, нетрудно получить устойчивость как следствие из /49/, /50/ и /52/.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jeffrey A., Kakutani T. 1970, Stability of the Burgers shock wave and the Korteweg – de Vries soliton. Indiana Univ. Math. J. 20, 463.*
2. *Benjamin T.B. 1972 The stability of solitary waves. Proc. R.Soc.Lond. A 328, 153.*
3. *Titchmarsh E.C. 1962 Eigenfunction expansions (2nd ed.). Oxford University Press.*

Рукопись поступила в издательский отдел 7 июня 1979 года.