сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12491

В.М.Лебеденко

О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ СУПЕРАЛГЕБР И КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

1979

P5 - 12491

В.М.Лебеденко

О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ СУПЕРАЛГЕБР И КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

Лебеденко В.М. P5 - 12491

О расщепляемости супералгебр и конечномерных алгебр

В работе рассматривается вопрос о разложении конечномерной алгебры /в частности, супералгебры Ли/ в прямую сумму заданного идеала и некоторой подалгебры. Он сводится к разрешимости некоторой системы алгебраических уравнений, коэффициентами которой являются структурные константы алгебры. Эта система становится линейной, если заданный идеал абелев. Результат проиллюстрирован на примере алгебры минимального спинорного расширения группы Пуанкаре.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Lebedenko V.M. P5 - 12491

On the Splitting of Subalgebras and Finite-Dimensional Algebras

The splitting of finite-dimensional algebra(in particular, of Lie subalgebra) to a direct sum of a given ideal and a certain subalgebra is considered. It is reduced to solvability of a certain system of algebraic equations, whose coefficients are algebra structure constants. This system becomes linear, if the given ideal is Abelian. The result is illustrated by an example of the algebra of minimum spinor expansion of Poincare's group.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

При изучении конечномерных алгебр, например алгебр Ли и супералгебр Ли, часто возникает вопрос об отщеплении идеала, то есть о разложении алгебры в прямую сумму идеала и некоторой подалгебры. Важным примером этого является проблема расщепления супералгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры. В настоящей работе мы дадим ответ на этот вопрос на языке алгебраических уравнений /см. предложение 1/. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть G - конечномерная алгебра и A -ее двусторонний идеал. $G=\{A, b_1,\dots,b_n\}$ /здесь и ниже $\{M\}$ означает пространство, натянутое на множество M /, и элементы $b_1,\dots,b_n$ линейно независимы по модулю A. Пусть, кроме того,

$$[b_i, b_j] = \sum_{t=1}^{n} a_{ijt} b_t + c_{ij}, \quad i,j=1,\dots,n, \quad c_{ij} \subseteq A^*.$$

Алгебра G разлагается в прямую сумму $G=B\dot{+}A$, где B - некоторая подалгебра, тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $b_i' = b_i + e_i$, $i=1,\dots,n$, $e_i \subseteq A$, что

$$[b_i', b_j'] = \sum_{t=1}^{n} a_{ijt} b_t', \quad i,j=1,\dots,n. \qquad /1/$$

Доказательство. Если выполняются соотношения /1/, то $B=\{b_1',\dots,b_n'\}$ - подалгебра G и в силу выбора $b_1,\dots,b_n$ $G=B\dot{+}A$. Пусть $G=B\dot{+}A$ и B-подалгебра G.Тогда

$b_i = b_i' - e_i$, $b_i' \subseteq B$, $e_i \subseteq A$, $i=1,\dots,n$ и $b_i' = b_i + e_i$. Далее,

$$[b_i', b_j'] = [b_i + e_i, b_j + e_j] = [b_i, b_j] +$$

$$+ [e_i, b_j] + [b_i, e_j] + [e_i, e_j] =$$

$$= [b_i, b_j] + x = \sum_{t=1}^{n} a_{ijt} b_t + c_{ij} + x,$$

* $[x,y]$ означает произведение элементов x и y.

$x \subseteq A, \quad i,j = 1,\dots,n.$

Последнее выражение в силу линейности первого члена равно $\sum_{t=1}^{n} \alpha_{ijt} b'_t + x' \subseteq B, \quad x' \subseteq A$. Следовательно, $x' = 0$, иначе $A \cap B \neq 0$. Поэтому выполняются соотношения /1/. Лемма доказана.

Предложение 1. Пусть G - конечномерная алгебра, A - ее двусторонний идеал, $G = \{A, b_1, \dots, b_n\}$, где элементы b_i линейно независимы по модулю A, $[a_1, \dots, a_m]$ - базис A. Пусть, кроме того,

$$[b_i, b_j] = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{ijt} b_t + \sum_{t=1}^{m} \beta_{ijt} a_t, \quad i,j = 1,\dots,n;$$

$$[b_i, a_s] = \sum_{t=1}^{m} \gamma_{ist} a_t, \quad i = 1,\dots,n; \quad s = 1,\dots,m;$$

$$[a_s, b_j] = \sum_{t=1}^{m} \gamma'_{sjt} a_t, \quad j = 1,\dots,n; \quad s = 1,\dots,m;$$

$$[a_s, a_t] = \sum_{q=1}^{m} \delta_{stq} a_q, \quad s,t = 1,\dots,m.$$

Алгебра G разлагается в прямую сумму $G = B \dot{+} A$, где B - некоторая подалгебра, тогда и только тогда, когда разрешима система алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{t=1}^{n} \alpha_{ijt} x_{tq} - \sum_{s=1}^{m} \gamma_{isq} x_{js} - \\ - \sum_{s=1}^{m} \gamma'_{sjq} x_{is} - \sum_{1 \le s,t \le m} \delta_{s+q} x_{is} x_{jt} = \beta_{ijq}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \qquad /2/$$

$$i,j = 1,\dots,n; \qquad q = 1,\dots,m.$$

Доказательство. Разрешимость системы /2/ равносильна существованию таких элементов $b'_i = b_i + \sum_{s=1}^{m} x_{is} a_s \, (i = 1,\dots,n)$, что $[b'_i, b'_j] = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{ijt} b'_t$. Остается применить лемму. Утверждение доказано.

Следствие 1. Если конечномерная алгебра G имеет абелев двусторонний идеал $A \, ([x,y] = 0)$ и удовлетворяет соответствующим условиям предложения 1, то ее разложимость в прямую сумму $G = B \dot{+} A$, где B - подалгебра G, равносильна разрешимости линейной системы

$$\left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{t=1}^{n} \alpha_{ijt} x_{tq} - \sum_{s=1}^{m} \gamma_{isq} x_{js} - \sum_{s=1}^{m} \gamma'_{sjq} x_{is} = \beta_{ijq}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \qquad /3/$$

$$i,j = 1,\dots,n; \quad q = 1,\dots,m.$$

Следствие 2. Если G - супералгебра Ли с полупростой четной частью, то разложимость G в прямую сумму радикала и некоторой подалгебры G равносильна разрешимости соответствующей линейной системы типа /3/. Утверждение справедливо, поскольку радикал в этом случае абелев.

Замечание. Для конкретного построения дополнительной подалгебры в случае разрешимости системы типа /2/ или /3/ достаточно найти какое-то ее решение и построить соответствующий базис $[b'_1, \dots, b'_n]$.

Коснемся вопроса о разложении алгебр в прямую сумму двух идеалов.

Предложение 2. Пусть алгебра G удовлетворяет условию предложения 1. Для того, чтобы алгебра G разлагалась в прямую сумму идеала A и дополнительного двустороннего идеала B, необходима и достаточна разрешимость системы, составленной из подсистемы типа /2/ и подсистемы типа

$$\left\{\begin{array}{l} \dots\dots \\ \sum_{s=1}^{m} \delta_{sjq} x_{is} = -\gamma_{ijq}, \\ \dots\dots \\ \sum_{s=1}^{m} \delta_{jsq} x_{is} = -\gamma'_{jiq}, \\ \dots\dots \end{array}\right. \quad i,j = 1,\dots,n, \quad q = 1,\dots,m. \qquad /4/$$

Доказательство. Соотношения типа /4/ равносильны соотношениям типа $[b'_i, a_j] = 0, [a_j, b'_i] = 0, \begin{pmatrix} i = 1,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{pmatrix}$, где $b'_i = b_i + \sum_{s=1}^{m} x_{is} a_s$.

А это, в свою очередь, равносильно тому, что $BA = AB = 0$, где $B = \{b'_1, \dots, b'_n\}$. То есть B - дополнительный к A идеал G. Утверждение доказано.

Пример. Рассмотрим супералгебру G, являющуюся алгеброй минимального спинорного расширения группы Пуанкаре /см. [3] /. Алгебра G задается соотношениями

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] = -i(\eta_{\mu\lambda} L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} L_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho} L_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} L_{\mu\rho}),$$

$$[L_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(\eta_{\mu\lambda} P_\nu - \eta_{\nu\lambda} P_\mu), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[L_{\mu\nu}, Q_\alpha] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta ,$$

$$[L_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot\alpha}] = \frac{1}{2}(\tilde\sigma_{\mu\nu})_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta} \bar{Q}_{\dot\beta},$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} P^\mu ,$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0,$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0.$$

Через A обозначим идеал этой алгебры, натянутый на элементы P_0, P_1, P_2 и P_3. Покажем, что для этого идеала нет такой дополнительной подалгебры $B \subset G$, что $G = B + A$. Для этого воспользуемся следствием 1, так как A - абелев идеал алгебры G. Пусть

$$L_{01} = b_1, \quad L_{02} = b_2, \quad L_{03} = b_3, \quad L_{12} = b_4 ,$$

$$L_{13} = b_5, \quad L_{23} = b_6, \quad Q_1 = b_7, \quad Q_2 = b_8,$$

$$\bar{Q}_{\dot 1} = b_9, \quad \bar{Q}_{\dot 2} = b_{10}, \quad P_0 = a_1, \quad P_1 = a_2,$$

$$P_2 = a_3, \quad P_3 = a_4.$$

Расщепляемость супер態 алгебры G для данного случая равносильна разрешимости системы уравнений типа /3/:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{t=1}^{10} \alpha_{ijt} x_{tq} - \sum_{s=1}^{4} \gamma_{isq} x_{js} - \sum_{s=1}^{4} \gamma'_{sjq} x_{ij} = \beta_{ijq}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ i,j = 1,2,\dots,10, \quad q = 1,2,3,4, \end{cases}$$

где

$$[b_i, b_j] = \sum_{t=1}^{10} \alpha_{ijt} b_t + \sum_{t=1}^{4} \beta_{ijt} a_t ,$$

$$[b_i, a_s] = \sum_{t=1}^{4} \gamma_{ist} a_t ,$$

$$[a_s, b_j] = \sum_{t=1}^{4} \gamma'_{sjt} a_t$$

/операцию в алгебре G мы обозначаем квадратными скобками/.

Если бы эта система была разрешима, то была бы разрешима и ее подсистема, определяемая условиями

$$i = 7,8, \quad j = 9,10, \quad q = 1,2,3,4.$$

Так как

$$[b_7, b_9] = 2a_1 + 2a_4, \quad [b_7, b_{10}] = 2a_2 - 2i a_3,$$

$$[b_8, b_9] = 2a_2 + 2i a_3, \quad [b_8, b_{10}] = 2a_1 - 2a_4,$$

то ($\alpha_{ijq} = 0$) подсистема неоднородна и имеет вид

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{s=1}^{4} \gamma_{isq} x_{js} + \sum_{s=1}^{4} \gamma'_{sjq} x_{is} = -\beta_{ijq}, \\ i = 7,8, \quad j = 9,10, \quad q = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Из соотношений

$$[b_i, a_s] = [a_s, b_i] = 0, \quad 7 \le i \le 10, \quad 1 \le s \le 4$$

вытекает, что для этой подсистемы все константы γ_{isq} и γ'_{sjq} равны нулю. Следовательно, она не разрешима, как неоднородная линейная система с нулевыми коэффициентами при неизвестных.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, В.И.Огиевецкому и Д.А.Лейтесу за внимание к работе, Е.А.Иванову, А.С.Сорину и А.В.Матвеенко за ценную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. "Наука", М., 1966.
2. Кас V.G. Lie Superalgebras. Advances in Mathematics, 1977, 26, pp.8–96.
3. Огиевецкий В.И., Мезинческу Л. УФН, 1975, т.117, вып.4, с.637-683.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1979 года.