сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12485

Хр.Семерджиев

МЕТОДЫ ОДНОВРЕМЕННОГО ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕЙ ДАННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1979

P5 - 12485

Хр.Семерджиев

МЕТОДЫ ОДНОВРЕМЕННОГО ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕЙ ДАННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Семерджиев Хр. P5 - 12485

Методы одновременного приближенного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения

Дается краткий обзор известных методов для одновременного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения. Выводится также новая итерационная формула, являющаяся аналогом метода Чебышева. Доказано, что полученный итерационный процесс сходится к корням уравнения и что скорость сходимости кубическая. Приводится численный пример.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Semerdzhiev Kh. P5 - 12485

Methods of Simultaneous Deriving All Roots of a Given Algebraic Equation

The known methods are briefly reviewed for simultaneous deriving all roots of a given algebraic equation. A new iterational formula is also derived analogous to Chebyshev's method. It proved that the obtained iterational process converges to equation roots and the convergence velocity is cubical. A numerical example is given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Рассмотрим уравнение

$$f(z)=0, \qquad /1/$$

где $f(z)$- алгебраический полином степени m с действительными коэффициентами /старший коэффициент считаем единицей/. Предполагаем, что корни $z_1, z_2, \ldots, z_m$ уравнения /1/ различные /действительные или комплексные/. Тогда имеет место представление

$$f(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - z_i). \qquad /2/$$

Пусть $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}$ - заданные начальные приближения к корням $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Рассмотрим полином

$$Q_0(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - z_i^{(0)}) \qquad /3/$$

и однопараметрическое множество полиномов

$$P(z) = f(z) + (1-t) Q_0(z), \qquad /4/$$

где $t \in [0,1]$. Очевидно, что нули $P(z)$ являются функциями от t – $z_i(t)$. При $t=0$ имеем

$$z_i(0) = z_i^{(0)}, \quad i=1,2,\ldots,m, \qquad /5/$$

а при $t=1$ – $z_i(1) = z_i$. Дифференцируя тождества $P(z_i(t)) \equiv 0$, $i=1,2,\ldots,m$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$z_i' = \frac{Q_0(z_i) - f(z_i)}{t f'(z_i) - (1-t) Q_0'(z_i)}, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad /6/$$

Систему /6/ надо решать при начальных условиях /5/. Если найдем приближенно $z_i(1)$, $i=1,2,\ldots,m$, делая один шаг по методу Эйлера, и обозначим $z_i(1)$ через $z_i^{(1)}$, получаем формулу

$$z_i^{(1)} = z_i^{(0)} - f(z_i^{(0)}) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (z_i^{(0)} - z_j^{(0)}), \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Таким образом, можно составить итерационную формулу для одновременного уточнения всех корней уравнения /1/:

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - f(z_i^{(k)}) / \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (z_i^{(k)} - z_j^{(k)}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 0, 1, 2, \dots . \qquad /7/$$

Итерационный метод /7/ принадлежит К.Дочеву[1,2]. Этот метод является модификацией метода Ньютона, так как его можно записать в виде $z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - f(z_i^{(k)}) / Q_k'(z_i^{(k)})$. Доказано, что скорость сходимости квадратичная. Вычислительный процесс /7/ приведен в[3].

Для случая, когда $f(z) = \det(A - zI)$, т.е. $f(z)$ является характеристическим уравнением матрицы A, в[4] предложена модификация метода /7/.

Исходя из других соображений, в[5] предлагается следующий метод с кубической скоростью сходимости:

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - f(z_i^{(k)}) / [f'(z_i^{(k)}) - f(z_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (z_i^{(k)} - z_j^{(k)})^{-1}],$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Можно продолжить исследования Дочева следующим образом. Проинтегрируем систему /6/, применяя метод Тейлора:

$$z_i(1) \approx z_i(0) + z_i'(0) + \frac{1}{2} z_i''(0). \qquad /8/$$

Естественно получить метод с ускоренной сходимостью, который будет аналогом метода Чебышева. Применяя /8/ к системе /6/ и обозначая $z_i(1)$ через $z_i^{(1)}$, находим

$$z_i^{(1)} = z_i^{(0)} - f(z_i^{(0)})[4Q_0'^2(z_i^{(0)}) - 2f'(z_i^{(0)})Q_0'(z_i^{(0)}) + Q_0''(z_i^{(0)}) \cdot f(z_i^{(0)})] / 2Q_0'^3(z_i^{(0)}). \qquad /9/$$

Эта формула приводится и в[4]. Преобразуем[6] эту формулу к виду, удобному для конкретных вычислений и для доказательства теоремы о сходимости метода. Используя /3/ после некоторых преобразований, формулу /9/ можно записать в виде

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - f(z_i^{(k)})[2y_i^{(k)} - f'(z_i^{(k)}) + f(z_i^{(k)}) x_i^{(k)}] / (y_i^{(k)})^2, \qquad /10/$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

где

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{m} (z_i^{(k)} - z_j^{(k)})^{-1}, \quad y_i^{(k)} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (z_i^{(k)} - z_j^{(k)}).$$

Для применения этого метода необходимо, чтобы $z_i^{(k)} \neq z_j^{(k)}$ при $i \neq j$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Имеет место следующая

Теорема. Пусть q - некоторое фиксированное число, $0 < q < 1$ и $d = \min_{i\neq j} |z_i - z_j|$. Пусть c - достаточно малое, так что выполнены неравенства $d - 2c > 0$ и $2^{3m} c^2 / (d - 2c)^2 < 1$. Если начальные приближения $z_i^{(0)}$ к корням z_i уравнения /1/ удовлетворяют неравенствам

$$|z_i^{(0)} - z_i| < cq, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad /11/$$

то выполняются неравенства

$$|z_i^{(k)} - z_i| \le cq^{3^k}, \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad /12/$$

для каждого $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Неравенства /12/ докажем методом математической индукции. Если из обеих частей /10/ вычесть z_i и воспользоваться представлением /2/, то находим

$$z_i^{(k+1)} - z_i = (z_i^{(k)} - z_i)\{1 - 2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{z_i^{(k)} - z_j}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}} + \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{z_i^{(k)} - z_j}{(z_i^{(k)} - z_j^{(k)})^2} \times$$

$$\prod_{\nu=1}^{m} (z_i^{(k)} - z_\nu)[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{z_i^{(k)} - z_j} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{1}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}}]\}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \qquad /13/$$

После некоторых преобразований из /13/ получаем

$$z_i^{(k+1)} - z_i = (z_i^{(k)} - z_i)\{[1 - \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (1 + \frac{z_j^{(k)} - z_j}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}})] +$$

$$+ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (1 + \frac{z_j^{(k)} - z_j}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}})^2 \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{m} \frac{(z_i^{(k)} - z_i)(z_\nu - z_\nu^{(k)})}{(z_i^{(k)} - z_\nu)(z_i^{(k)} - z_\nu^{(k)})}\}. \qquad /14/$$

При $k=0$ неравенства /12/ совпадают с /11/.

Допустим, что /12/ выполнены для $k = s$, и покажем, что они выполняются и при $k = s + 1$. Используя неравенства

$$|z_i^{(s)} - z_j^{(s)}| \ge |z_i - z_j| - |z_i^{(s)} - z_i| - |z_j^{(s)} - z_j| > d - 2c,$$

$$|z_i^{(s)} - z_j| \ge |z_i - z_j| - |z_i^{(s)} - z_i| > d - cq^{3^s} > d - c > d - 2c,$$

$$|1-\prod_{j=1}^{m}(1+a_j)| \le |1-\prod_{j=1}^{m}(1+|a_j|)|,$$

$$(1-\prod_{j=1}^{m}(1+|a_j|))^2 \le \prod_{j=1}^{m}(1+|a_j|)^2,$$

$$(1+|a_j|)^{2m} \ge (1+|a_j|^2)^m > 1+ma_j^2,$$

из /14/ находим

$$|z_i^{(s+1)}-z_i| \le |z_i^{(s)}-z_i|\{[1-\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m}(1+\frac{|z_i^{(s)}-z_j|}{|z_i^{(s)}-z_j^{(s)}|})]^2 +$$

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m}(1+\frac{|z_i^{(s)}-z_j|}{|z_i^{(s)}-z_j^{(s)}|})^2 \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne i}}^{m} \frac{|z_i^{(s)}-z_i||z_\nu-z_\nu^{(s)}|}{|z_i^{(s)}-z_\nu||z_i^{(s)}-z_\nu^{(s)}|}\} \le$$

$$|z_i^{(s)}-z_i| \prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m}(1+\frac{|z_j^{(s)}-z_j|}{|z_i^{(s)}-z_j^{(s)}|})^2 (1+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne i}}^{m} \frac{|z_i^{(s)}-z_i||z_\nu-z_\nu^{(s)}|}{|z_i^{(s)}-z_\nu||z_i^{(s)}-z_\nu^{(s)}|}) \le$$

$$cq^{3^s}(1+\frac{cq^{3^s}}{d-2c})^{2m}[1+m(\frac{cq^{3^s}}{d-2c})^2] \le$$

$$cq^{3^s}\cdot 2^{2m}[1+(\frac{cq^{3^s}}{d-2c})^2]^m =$$

$$cq^{3^s}\cdot 2^{2m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(\frac{cq^{3^s}}{d-2c})^{2n} \le$$

$$cq^{3^s}\cdot 2^{2m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(\frac{cq^{3^s}}{d-2c})^2 =$$

$$cq^{3^s}\cdot 2^{3m}(\frac{cq^{3^s}}{d-2c})^2 \le \frac{2^{3m}c^2}{(d-2c)^2}cq^{3^{s+1}} \le cq^{3^{s+1}}.$$

Этим доказана кубическая сходимость метода /10/.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = z^3-8z^2-23z+30=0.$$

Корни этого уравнения $z_1=-3$, $z_2=1$, $z_3=10$. В таблице приведены значения трех последовательных приближений, полученных методом Чебышева и методом /10/. В качестве начальных приближений выбрано $z_1^{(0)}=-4$, $z_2^{(0)}=0$, $z_3^{(0)}=9$. Если цифра k последовательно повторяется в записи данного числа n раз, то в таблице это записывается как $(n*k)$. Все вычисления выполнены на ЭВМ ЕС-1020 с двойной точностью.

Таблица

$z_i^{(k)}$	Метод Чебышева	Метод /10/
$z_1^{(1)}$	-3,07	-3,01
$z_2^{(1)}$	0,71	1,03
$z_3^{(1)}$	9,86	9,98
$z_1^{(2)}$	-3./4*0/7	-3./5*0/2
$z_2^{(2)}$	0,997	1./5*0/2
$z_3^{(2)}$	9,9998	9./6*9/7
$z_1^{(3)}$	-3./13*9/7	-3./17*0/
$z_2^{(3)}$	0./9*9/3	1./17*0/
$z_3^{(3)}$	9./12*9/6	10/16*0/

Численные эксперименты, проведенные для других примеров, показывают, что метод /10/ сходится и тогда, когда начальные приближения выбраны далеко от корней уравнения /1/.

При программировании метода /10/ необходимо пользоваться обобщенными схемами Горнера /7/ для одновременного вычисления значений полинома и его производных.

Можно получить многошаговые итерационные методы для одновременного уточнения всех корней уравнений путем изменения вспомогательного однопараметрического множества полиномов типа /4/, а полученную при этом дифференциальную систему, соответствующую системе /6/, интегрировать методом Адамса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дочев К. Физ.-мат.сп., 1962, 5, №2, с.136-139.
2. Dočev K. C.R.Acad.Bulg.Sci., 1962,15, N7, p.695-701.
3. Kerner I.O. Numer. Math., 1966, 8, p.290-294.
4. Дочев К., Бырнев П. ЖВММФ, 1964, т.4, вып.5,с.915-920.

5. Ehrlich L.W. Comm. ACM, 1967, 10, N2, p.107-108.
6. Семерджиев Хр., Патева С. Научн. труды Пловдивского университета, 1978.
7. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Получисленные алгоритмы. "Мир"., М., 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая 1979 года.