сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



P5 - 12484

Хр.Семерджиев

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАНТЫ ПАДЕ И ЭФФЕКТ ГИББСА

1979

P5 - 12484

Хр.Семерджиев

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАНТЫ ПАДЕ И ЭФФЕКТ ГИББСА

Семерджиев Хр. Р5 - 12484

Тригонометрические аппроксиманты Паде и эффект Гиббса

Вводятся аппроксиманты Паде для функций, заданных своим рядом Фурье. Приближение ищется в виде отношения двух тригонометрических полиномов. Построены тригонометрические диагональные аппроксиманты Паде для функции-скачка в аналитическом виде. Показано численно, что эффект Гиббса при этих аппроксимантах порядка 1%.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Semerdzhiev Kh. P5 - 12484

Trigonometric Pade Approximants and Gibbs Effect

Pade approximants are introduced for functions specified by its Fourier series. The approximation is searched for as a relation of two trigonometric polynoms. Trigonometric diagonal Pade approximants are constructed for a step function in analytical form. It was shown numerically that for the given approximants the Gibbs effect is about 1 per cent.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979



В работе /1/ были введены тригонометрические аппроксиманты Паде для функций, заданных своим рядом Фурье. Именно: пусть

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \sin kx + \beta_k \cos kx). \qquad /1/$$

Аппроксиманта $P(N, M;\ x)$ ищется в виде

$$P(N,M;\ x) = \frac{U_N(x)}{T_M(x)} = \frac{\frac{p_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (p_k \cos kx + q_k \sin kx)}{\frac{s_0}{2} + \sum_{k=1}^{M} (s_k \cos kx + t_k \sin kx)}, \qquad /2/$$

где $p_0$, $p_k$, $q_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, и $s_k$, $t_k$, $k = 1, 2, \dots, M$, - неизвестные коэффициенты. Коэффициент $s_0$ можно считать известным параметром - каждому значению $s_0$ соответствует некоторая нормировка остальных коэффициентов аппроксиманты /2/. Другие $2(M+N)+1$ коэффициентов находим из условия

$$\Big[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\Big] T_M(x) - U_N(x) = \qquad /3/$$

$$= \sum_{k=M+N+1}^{\infty} (\alpha'_k \cos kx + \beta'_k \sin kx).$$

Приравнивая к нулю коэффициенты перед $\cos \ell x$, $\sin kx$, $\ell = 0, 1, 2, \dots,$ $k = 1, 2, \dots,$ получаем /1/ систему линейных алгебраических уравнений $2(M+N)+1$ -ого порядка относительно неизвестных $p_0$, $p_k$, $q_k$, $k = 1, 2, \dots, N$; $s_k$, $t_k$, $k = 1, 2, \dots, M$. В /1/ были рассчитаны различные примеры, которые показали, что аппроксиманты Паде лучше приближают рассмотренные функции, чем соответствующие частичные суммы ряда Фурье. Например, для функции $f(x) = e^{5x/2}$ абсолютная погрешность $|f(x) - S_{3k}(x)|$ /через $S_\ell(x)$ обозначена $\ell$-ая частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ / для $k = 2, 4, 6, 10$ в промежутке $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ меняется в пределах, указанных в табл. 1.

В случае же периодических функций $\sin 5x/2$ и $\cos 5x/2$ частичные суммы их рядов Фурье $S_\ell(x)$ лучше аппроксимируют их по сравнению с функцией $e^{5x/2}$. Однако и в этих примерах аппроксиманты Паде намного лучше. Например, для этих функций

Таблица 1

| k | $\lvert f(x)-S_{3k}(x)\rvert$ | $\lvert f(x)-P(k,k;x)\rvert$ |
|---|---|---|
| 2 | 3-15 | $\sim 10^{-2}$ |
| 4 | 1-9 | $\sim 10^{-6}$ |
| 6 | 0,5-5 | $\sim 10^{-9}$ |
| 10 | 0,2-4 | $\sim 10^{-12}$ |

в промежутке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ имеем $\lvert f(x)-S_{2n}\rvert \approx 10^{-3}$, а $\lvert f(x)-P(8,8;x)\rvert \approx 10^{-13}$. Эти расчеты выполнены на ЭВМ CDC-6200.

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi,\pi]$ вместе со своими $r-1$ первыми производными $f^{(m)}(x)$ $(m=0,1,\dots,r-1)$, имеющими ограниченные вариации, удовлетворяет на концах промежутка вместе с этими же производными условиям

$$f^{(m)}(-\pi+0)=f^{(m)}(\pi-0),\quad m=0,1,\dots,r-1,$$

а также имеет производную $f^{(r)}(x)$ с ограниченным изменением, то справедлива следующая оценка /2/:

$$\left|f(x)-\frac{U_N(x)}{T_M(x)}\right| < \frac{V_r}{|T_M(x)|r\cdot N^2}, \qquad /4/$$

где $V_r$ - полная вариация функции $[f(x)T_M(x)]^{(r)}$ в промежутке $[-\pi,\pi]$.

Численные расчеты /1/ показывают, что самые хорошие приближения дают диагональные аппроксиманты, т.е. те, для которых $M=N$. Поэтому в дальнейшем будем исследовать только этот случай. Линейная система, о которой шла речь выше, записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}[(\alpha_{|j-k|}+\alpha_{j+k})s_k+(\beta_{j+k}-\operatorname{sign}(j-k)\beta_{|j-k|}t\ ]+\\
&+\frac{1}{2}s_0\alpha_j-p_j=0,\quad j=1,2,\dots,2N,\\
&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}[(\beta_{j+k}+\operatorname{sign}(j-k)\beta_{|j-k|})s_k+(\alpha_{|j-k|}-\alpha_{j+k})t_k]+\\
&+\frac{1}{2}s_0\beta_j-q_j=0,\quad j=1,2,\dots,2N,\\
&\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k s_k+\beta_k t_k)+\frac{1}{2}s_0\alpha_0-p_0=0,
\end{aligned}\right\}\qquad /5/$$



где обозначили $p_j=q_j=0$, если $j>N$ и $\beta_0=0$,

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ 1, & \text{если } x>0.\end{cases}\qquad /6/$$

Далее, не теряя общности рассуждений, принимаем $s_0=2$. Если ввести обозначения

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)^T,\qquad \bar\alpha=(\alpha_{N+1},\alpha_{N+2},\dots,\alpha_{2N})^T,$$

$$\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_N)^T,\qquad \bar\beta=(\beta_{N+1},\beta_{N+2},\dots,\beta_{2N})^T,$$

$$s=(s_1,s_2,\dots,s_N)^T,\qquad t=(t_1,t_2,\dots,t_N)^T,$$

$$p=(p_1,p_2,\dots,p_N)^T,\qquad q=(q_1,q_2,\dots,q_N)^T,$$

где значок T означает транспонирование, то систему /5/ можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} B & C & -E & 0 & \omega\\ D & F & 0 & -E & \omega\\ G & H & 0 & 0 & \omega\\ K & L & 0 & 0 & \omega\\ \alpha^T & \beta^T & \omega^T & \omega^T & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\\ p\\ q\\ q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\alpha\\ -\beta\\ -\bar\alpha\\ -\bar\beta\\ -\alpha_0\end{bmatrix}. \qquad /7/$$

Матрица системы /7/ имеет блочную структуру. Через E обозначена единичная матрица N-ого порядка. Матрицы B, C, D, F, G, H, K и L имеют также порядок N. Их элементы выражаются следующим образом:

$$b_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_{|i-j|}+\alpha_{i+j}),\qquad c_{ij}=\frac{1}{2}[\beta_{i+j}-\operatorname{sign}(i-j)\beta_{|i-j|}],$$

$$d_{ij}=\frac{1}{2}[\beta_{i+j}+\operatorname{sign}(i-j)\beta_{|i-j|}],\qquad f_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_{|i-j|}-\alpha_{i+j}),$$

$$g_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_{N+i-j}+\alpha_{N+i+j}),\qquad h_{ij}=\frac{1}{2}(\beta_{N+i+j}-\beta_{N+i-j});$$

$$k_{ij}=\frac{1}{2}(\beta_{N+i+j}+\beta_{N+i-j}),\qquad \ell_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_{N+i-j}-\alpha_{N+i-j}).$$

Через O и $\omega$ обозначены нулевая матрица и нулевой вектор-столбец N-ого порядка.

Указанная блочная структура матрицы /7/ позволяет решить систему следующим образом. Сначала решаем систему

$$\begin{vmatrix} G & H \\ K & L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s \\ t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\bar{\alpha} \\ -\bar{\beta} \end{vmatrix} \qquad /8/$$

и находим векторы s и t. Потом из остальных уравнений системы /7/ находим $p_0$,p и q

$$\begin{aligned} p_0 &= \alpha^T s + \beta^T t + \alpha_0 , \\ p &= Bs + Ct + \alpha , \\ q &= Ds + Ft + \beta. \end{aligned} \qquad /9/$$

Оценка /4/ несправедлива, когда функция f(x) разрывная. Дальше будем исследовать поведение функции /6/:

$$f(x) = \operatorname{sign}(x), \quad x \in [-\pi, \pi]. \qquad /10/$$

Эта функция разлагается в ряд Фурье /3/:

$$\frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots), \qquad /11/$$

который сходится к функции /10/. В точке x=0 функция /10/ имеет единичный скачок.

Хорошо известно /3/ поведение ряда /11/ в окрестности точки x=0. В этой точке наблюдается так называемый эффект Гиббса. Именно для того, чтобы получить "предельный геометрический образ" функции $S_n(x)$ /частичная сумма ряда /11// при $n \to \infty$, недостаточно к графику функции /10/ присоединить отрезок от вертикальной прямой x=0, соединяющей точки с ординатами f(-0) и f(0), а надо этот отрезок удлинить на 18% вверх и вниз.

Дальше мы построим диагональные аппроксиманты Паде для функции /10/, используя ее ряд /11/, и будем исследовать, существует ли эффект Гиббса при этих аппроксимантах.



В матрице системы /7/ появляются новые нулевые блоки - G , L , B , F , $\alpha$ , $\bar{\alpha}$ и $\alpha_0$, в результате чего система /8/ расщепляется на две самостоятельные системы:

$$Ht = 0, \qquad /12/$$

$$Ks = -\bar{\beta}, \qquad /13/$$

где элементы матриц H и K в этом случае выражаются следующим образом:

$$h_{ij} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{j[1-(-1)^{N+i-j}]}{(N+i)^2 - j^2}, \quad k_{ij} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(N+i)[1-(-1)^{N+i-j}]}{(N+i)^2 - j^2}.$$

Определитель матрицы H отличен от нуля. Это следует из того, что определитель матрицы H с точностью до знака равен произведению двух определителей порядка N/2, если N - четное, или произведению двух определителей порядка $\frac{N-1}{2}$ и $\frac{N+1}{2}$, если N - нечетное. Эти определители типа Коши вычисляются по формуле

$$\det\left(\frac{1}{x_i - a_j}\right) = \frac{\prod\limits_{1 \le i < k \le n} [(x_i - x_k)(a_k - a_i)]}{\prod\limits_{i,k=1}^{n} (x_i - a_k)} \qquad /14/$$

/n - порядок матрицы/, и видно, что они отличны от нуля. Отсюда следует, что решение системы /12/ нулевое: t = 0. Аналогично можно вычислить det(K).

1. N - четное. Тогда

$$\det(K) = (-1)^{N^2/4} \left(\frac{4}{\pi}\right)^N \frac{(2N)!}{N!} \Delta_1 \Delta_2 ,$$

где

$$\Delta_1 = \det\left(\frac{1}{(N+2i-1)^2 - (2j)^2}\right), \quad i, j = 1,2, \ldots, \frac{N}{2};$$

$$\Delta_2 = \det\left(\frac{1}{(N+2i)^2 - (2j-1)^2}\right), \quad i, j = 1,2, \ldots, \frac{N}{2}.$$

2. N - нечетное. Тогда

$$\det(K) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^N \frac{(2N)!}{N!} \Delta_3 \Delta_4 ,$$

где

$$\Delta_3 = \det\left(\frac{1}{(N+2i-1)^2 - (2j-1)^2}\right), \quad i, j = 1,2, \ldots, \frac{N+1}{2};$$

$$\Delta_4 = \det\left(\frac{1}{(N+2i)^2 - (2j)^2}\right), \quad i, j = 1,2, \ldots, \frac{N-1}{2}.$$

Применяя формулу /14/, находим

$$\Delta_1 = \frac{P}{(N-1)^{N/2}} \prod_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{N/2} \frac{(N+k+i-1)(k+i)(k-i)^2}{(N+2k-2i-1)(N-2k+2i-1)(N+2k+2i-1)^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{P}{(N+1)^{N/2}} \prod_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{N/2} \frac{(N+k+i)(k+i-1)(k-i)^2}{(N+2k-2i+1)(N-2k+2i+1)(N+2k+2i-1)^2},$$

$$\Delta_3 = \frac{(-1)^{(N^2-1)/8}\, 2^{(N^2-1)/8}}{N^{(N+1)/2} \prod\limits_{k=1}^{(N+1)/2} (N+4k-2)} \prod_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{(N+1)/2} \frac{(N+k+i-1)(k+i-1)(k-i)^2}{(N+2k-2i)(N+2i-2k)(N+2k+2i-2)^2},$$

$$\Delta_4 = \frac{(-1)^{\frac{(N-3)(N-1)}{8}}\, 2^{\frac{(N-3)(N-1)}{2}}}{N^{(N-1)/2} \prod\limits_{k=1}^{(N-1)/2} (N+4k)} \prod_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{(N-1)/2} \frac{(N+k+i)(k+i)(k-i)^2}{(N+2k-2i)(N+2i-2k)(N+2k+2i)^2},$$

где положено

$$P = \frac{(-1)^{\frac{N(N-2)}{8}}\, 2^{\frac{N(N-2)}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{N/2} (N+4k-1)}.$$

Решая систему /13/ по методу Крамера, получаем

$$s_{2k+1} = 0, \quad k = 0,1,\dots,[\frac{N-1}{2}],$$

$$s_{2i} = 2(-1)^i \prod_{k=1}^{i} \left(1 - \frac{2k-1}{[\frac{N}{2}]+k}\right) \prod_{k=1}^{[N/2]} \left[1 - \left(\frac{2i}{2N+2k-2[\frac{N}{2}]-1}\right)^2\right],$$

или

$$s_{2i} = 2(-1)^i \frac{(N!)^4 (2N+2i)!(2N-2i)!}{(N-i)!(N+i)!(N-2i)!(N+2i)![(2N)!]^2}.$$

Подставляя полученные значения для s и t в /9/ и учитывая, что в нашем случае

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \, \dfrac{i[1-(-1)^{i-j}]}{i^2-j^2}, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

находим

$$p_k = 0, \quad k = 0,1,\dots,N, \quad q_{2k} = 0, \quad k = 1,2,\dots,[\frac{N}{2}],$$

$$q_{2j+1} = \frac{4}{\pi}(2j+1) \left[\frac{1}{(2j+1)^2} + \sum_{i=1}^{[N/2]} \frac{s_{2i}}{(2j+1)^2-(2i)^2}\right],$$



или

$$q_{2j+1} = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{i=0}^{j} \frac{s_{2j-2i}}{2i+1} + \sum_{i=j+1}^{j+[N/2]} \frac{s_{2i-2j}}{2i+1} - \sum_{i=0}^{[N/2]-j} \frac{s_{2j+2i+2}}{2i+1}\right],$$

где

$$j = 0,1,\dots,[\frac{N-1}{2}], \qquad \text{так как } s_0 = 2.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$P(N,N;x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{[(N-1)/2]} q_{2j+1} \sin(2j+1)x}{1 + \sum\limits_{j=1}^{[N/2]} s_{2j} \cos(2jx)}. \qquad /15/$$

Интересно отметить, что

$$\lim_{N\to\infty} s_{2j} = \lim_{N\to\infty} q_{2j+1} = 2(-1)^j,$$

откуда следует, что

$$P(\infty,\infty;x) = \frac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x + \dots}{\frac{1}{2} - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x + \dots}. \qquad /16/$$

Из /16/ видно, что предельный переход $N \to \infty$ /15/ приводит к отношению двух расходящихся рядов. Это показывает, что стандартными методами очень трудно получить эффективную оценку разницы $R_N(x) = P(N,N;x) - f(x)$. Детальное численное исследование поведения $R_N(x)$ приводится в [4]. Здесь остановимся только на численном исследовании эффекта Гиббса. Так как аппроксиманта /15/ - нечетная функция, ее достаточно исследовать только в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Через $\Omega$ обозначим дискретное множество чисел 0, 0.01, 0.02,...,1.57 и находим численно те элементы $\bar{x}(N) \in \Omega$ и $P(N,N;\bar{x})$, для которых $\max\limits_{x\in\Omega} P(N,N;x) = P(N,N;\bar{x})$. Полученные результаты $\bar{x} \in \Omega$ приводятся в табл. 2 и показывают, что при тригонометрических диагональных аппроксимантах, если есть эффект Гиббса, то он составляет около 1%.

В заключение автор выражает свою благодарность В.Попову за положительное отношение к этой работе.

Таблица 2

| N | $\bar{x}(N)$ | $P(N, N; \bar{x})$ |
|---|---|---|
| 2 | 0,68 | 1,0736 |
| 3 | 0,41 | 1,0419 |
| 4 | 0,28 | 1,0301 |
| 5 | 0,31 | 1,0242 |
| 6 | 0,16 | 1,0208 |
| 7 | 0,13 | 1,0185 |
| 8 | 0,11 | 1,0166 |
| 9 | 0,09 | 1,0152 |
| 10 | 0,08 | 1,0138 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Семерджиев Хр. Научные трудове на Пловд. университет. 1975, т.13, кн.1, с.409-419.
2. Корнеев П.К. В сб.: Цепные дроби и их применения. "Наукова думка", Киев, 1976.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Физматгиз, 1966, т.3.
4. Семерджиев Хр., Неделчев Хр. Научни трудове на Пловд. университет, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая 1979 года.