объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12464

Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков,
А.Б.Швачка

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ

3.Исследование устойчивости частных решений

1979

P5 - 12464

Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков,
А.Б.Швачка

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ

3.Исследование устойчивости частных решений

Направлено в "Physics Letters" A

Катышев Ю.В. и др. **P5 - 12464**

Динамика системы вихрей.
3. Исследование устойчивости частных решений

Показано, что имеет место полное согласие между численным экспериментом и линейной теорией возмущений при исследовании устойчивости частных решений, описывающих динамику системы вихрей в идеальной жидкости.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Katyshev Yu.V. et al. **P5 - 12464**

The Vortex System Dynamics.
3. Investigation of the Stability of Particular Solutions

It is shown that a numerical calculations are in good accordance with the linear perturbation theory when investigating the stability of particular solutions which describe the vortex system dynamics in an ideal liquid.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В работе [1] было предложено частное решение системы уравнений

$$\dot{Z}_n = i \sum_{m \neq n}^{N} \frac{\Gamma_m}{Z_n^* - Z_m^*}, \qquad (1)$$

описывающих динамику точечных вихрей в идеальной двумерной неограниченной жидкости [2]. Это решение имеет вид

$$Z_n = \rho e^{i\omega t + i\phi_n}, \qquad (2)$$

где

$$\omega = \frac{\Gamma(N-1)}{2\rho^2},$$

$$\phi_n = \frac{2\pi}{N} n, \qquad 0 \leq n \leq N-1.$$

В работе [1] приведены также результаты численных экспериментов на ЭВМ. Эксперименты показали, что решения (2) уравнений (1) при $2 \leq N \leq 8$ являются устойчивыми. При $9 \leq N \leq 15$ наблюдалась неустойчивость, инкремент которой увеличивался с ростом N [1].

В работе [3] исследована устойчивость решения (2) в линейном приближении теории возмущений. Для малых возмущений решения (2) получена [3] система уравнений

$$\dot{f}_n + i\omega f_n = \frac{i\Gamma}{2\rho^2} A f_n^* - \frac{i\Gamma}{2\rho^2} B_{nm} f_m^*,$$

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\cos\phi_n}{1 - \cos\phi_n}, \qquad (3)$$

$$B_{nm} = \frac{1}{1 - \cos\phi_{nm}},$$

$$\phi_{nm} = \frac{2\pi}{N}(n-m).$$

Возмущение f_n ищем в виде

$$f_n = u_n e^{i\Omega t} + v_n e^{-i\Omega t} \quad . \tag{4}$$

Необходимым условием устойчивости решений (2) является вещественность значений Ω.

Система (3) с учетом подстановки (4) принимает вид

$$\begin{aligned} (\bar\omega + \bar\Omega) u &= Av, \\ (\bar\omega - \bar\Omega) v &= Au, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$u = (u_1, \dots, u_N)$,

$v = (v_1, \dots, v_N)$,

$A_{nn} = A$,

$A_{nm} = -B_{nm}$, $n \neq m$,

$\bar\omega = N - 1$,

$\bar\Omega = \dfrac{2\rho^2}{\Gamma}\Omega$.

Из системы уравнений (5) следует

$$\begin{aligned} (\bar\omega^2 - \bar\Omega^2) u &= A^2 u, \\ (\bar\omega^2 - \bar\Omega^2) v &= A^2 v. \end{aligned} \tag{6}$$

Решив систему уравнений (6), найдем собственные значения частот* $\bar\Omega$. При этом оказывается, что все собственные значения матрицы A^2 равны нулю, кроме одного. Соответствующие значения $\bar\Omega^2$ при $2 \le N \le 8$ являются положительными и приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	2	3	4	5	6	7	8
$\bar\Omega^2$	1	2,7	6,5	11,2	15,2	16	10,5

*Собственные значения найдены с помощью ЭВМ.

При $9 \le N \le 20$ $\bar\Omega^2$ принимает отрицательные значения и растет по абсолютной величине с ростом N (см. табл. 2).

Таблица 2

N	9	10	11	12	13	14
$\bar\Omega^2$	-5,3	-36,3	-88	-166,8	-280	-435,5
N	15	16	17	18	19	20
$\bar\Omega^2$	-642	-909,5	-1248	-1668,8	-2184	-2806

Следовательно, при $2 \le N \le 8$ $\bar\Omega$ принимает вещественные значения и решения (2) являются устойчивыми. При $9 \le N \le 15$ $\bar\Omega$ принимает мнимые значения, решения (2) являются неустойчивыми, причем инкремент неустойчивости нарастает с увеличением N. Эти результаты находятся в полном соответствии с данными, полученными в численных экспериментах на ЭВМ /1/. Решения (2) при $16 \le N \le 20$ являются также неустойчивыми, но численные эксперименты для такого числа вихрей не проводились. Наличие устойчивых решений (2) при $4 \le N \le 8$ указывает на близость таких систем к вполне интегрируемым /1/*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р5-12141, Дубна, 1979.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. "Мир", М., 1973.
3. Катышев Ю.В. и др. ОИЯИ, Р5-12142, Дубна, 1979.
4. Новиков Е.А. ЖЭТФ, 1975, 68, с.1868.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 1979 года.

*Интегрируемость системы уравнений (2) при N=2 является хорошо известным фактом /2/. Интегрируемость для N=3 доказана в работе /4/.