ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 12410

К.П.Кирчев, Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ РЕШЕНИЙ ДВУХ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

1979

P5 - 12410

К.П.Кирчев, Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ РЕШЕНИЙ ДВУХ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

Направлено в журнал "Теория функций, функциональный анализ и их приложения"

Кирчев К.П., Христов Е.Х. Р5 - 12410

О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных операторов Дирака

Для любой вектор-функции $f(x)=(f_1(x), f_2(x)) \in C^1[0, \pi]$ получена формула разложения по произведениям $y^{(1)} \circ y^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ y_1^{(1)} y_2^{(2)} + y_2^{(1)} y_1^{(2)} \end{pmatrix}$ решений $y^{(j)}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{pmatrix}$ $(j=1,2)$ двух самосопряженных краевых задач, определяемых системами Дирака

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy^{(j)}}{dx} + \begin{pmatrix} p_j(x) & q_j(x) \\ q_j(x) & -p_j(x) \end{pmatrix} y^{(j)} = \lambda y^{(j)} \quad (0 \le x \le \pi)$$

и граничными условиями $y_2^{(j)}(0) = 0$, $y_1^{(j)}(\pi) \sin\alpha_j + y_2^{(j)}(\pi)\cos\alpha_j = 0$, где $p_j(x), q_j(x) \in C^1[0, \pi]$, $\alpha_j \in [0, \pi)$ $(j = 1, 2)$. Как следствие, предложено простое доказательство некоторых, в основном известных, утверждений из обратной задачи для оператора Дирака.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Khristov K.P., Kirchev K.P. P5 - 12410

On Expansions, Associated with Products of Solutions of Two Regular Dirac Operators

We obtained for every vector-function $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in C^1[0, \pi]$ an expansion formulae over products $y^{(1)} \circ y^{(2)}(x, \lambda) = (y_1^{(1)} y_1^{(2)} - y_2^{(1)} y_2^{(2)}, y_1^{(1)} y_2^{(2)} + y_2^{(1)} y_1^{(2)})^T$ of solutions $y^{(j)}(x, \lambda) = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)})^T$, $(j=1,2)$ of two self-adjoint boundary value problems, determined by Dirac systems of equation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy^{(j)}}{dx} + \begin{pmatrix} p_j(x) & q_j(x) \\ q_j(x) & p_j(x) \end{pmatrix} y^{(j)} = \lambda y^{(j)}, \quad (0 \le x \le \pi)$$

and boundary conditions

where $y_2^{(j)}(0) = 0$, $y_1^{(j)}(\pi)\sin\alpha_j + y_2^{(j)}(\pi)\cos\alpha_j = 0$,

$p_j(x), q_j(x) \in C^1[0, \pi]$, $\alpha_j \in [0, \pi)$, $(j = 1,2)$.

As a corollary we suggest a simple proof of some, in generally known, theorems in the universe problem for Dirac operator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

ВВЕДЕНИЕ

1. Обозначим через $\{Q(x), \alpha\}$ краевую задачу, определяемую системой уравнений Дирака

$$By' + Q(x)y = \lambda y \quad (0 \le x \le \pi), \quad (' = d/dx) \qquad /0.1/$$

и граничными условиями

$$y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi)\sin\alpha + y_2(\pi)\cos\alpha = 0, \qquad /0.2/$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

вещественные функции $p(x)$, $q(x) \in C^1[0, \pi]$, число $\alpha \in [0, \pi)$. Пусть $\phi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ - решения уравнений /0.1/, такие, что

$$\phi(0, \lambda) = (1, 0)^T, \; \psi(\pi, \lambda) = (\cos\alpha, -\sin\alpha)^T \qquad /0.3/$$

/ T - транспонирование/ и

$$\omega(\lambda) = \phi_1(\pi, \lambda)\sin\alpha + \phi_2(\pi, \lambda)\cos\alpha \equiv -\psi_2(0, \lambda) \quad - \qquad /0.4/$$

характеристическая функция задачи $\{Q(x), \alpha\}$. Как известно /см., например, [1] гл. 1/, нули λ_n $(n \in Z = (0, \pm 1, \ldots))$ функции $\omega(\lambda)$ /определяющие спектр $\sigma\{Q(x), \alpha\}$ задачи /0.1/, 0.2// - простые, т.е. $\dot\omega(\lambda_n) \ne 0$ $(\dot{} = \partial/\partial\lambda)$, и при $n \to \pm\infty$

$$\lambda_n = n - \alpha/\pi + O(n^{-1}). \qquad /0.5/$$

2. Пусть теперь заданы две краевые задачи: $\{Q_j(x),\ \alpha_j\}$ $(j = 1,2)$. Построим по их спектрам $\sigma_j = \{\lambda_n^{(j)}, (n \in Z)\}$ множества $\Lambda = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\Lambda'' = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\Lambda' = \Lambda \setminus \lambda''$, где вследствие /O.5/, без ограничения общности, предполагаем, что $\lambda_n^{(j)}$ занумерованы так, что $n=m$, если $\lambda_n^{(1)} = \lambda_m^{(2)}$. Для краткости обозначений положим

$$\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j} \quad (n \in Z;\ j = 1,2). \qquad /O.6/$$

Определим произведение $y^{(1)} \circ y^{(2)}$ решений $y^{(j)}(x,\lambda) = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)})^T$ уравнений

$$By^{(j)\prime} + Q_j(x)y^{(j)} = \lambda y^{(j)} \quad (j = 1,2) \qquad /O.7/$$

по формуле

$$Y(x, \lambda) = y^{(1)} \circ y^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ y_1^{(1)} y_2^{(2)} + y_2^{(1)} y_1^{(2)} \end{pmatrix}. \qquad /O.8/$$

Обозначим через

$$[f, g] = \int_0^\pi (f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x))dx$$

кососкалярное произведение в пространстве L_2 комплекснозначных функций $f(x) = (f_1, f_2)$ $(f_1(x), f_2(x) \in L_2(0, \pi))$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2} = \int_0^\pi (f_1(x)\overline{g_1(x)} + f_2(x)\overline{g_2(x)})dx, \quad (\|f\|^2_{L_2} = (f, f)_{L_2}).$$

Построим по решениям $\phi^{(j)}(x, \lambda)$ и $\psi^{(j)}(x, \lambda)$, удовлетворяющим уравнениям /O.7/ и начальным условиям /O.3/ с $\alpha = \alpha_j$, функции $\Phi(x, \lambda) = \phi^{(1)} \circ \phi^{(2)}(x, \lambda)$, $\Psi(x,\lambda) = \psi^{(1)} \circ \psi^{(2)}(x, \lambda)$ и пусть $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)$, где $\omega_j(\lambda) = \omega(Q_j(x), \alpha_j; \lambda)$. Введем системы $\{U_n(x) = (U_{n,1}, U_{n,2})\}$ и $\{V_n(x) = (V_{n,1}, V_{n,2})\}$, положив при $\lambda \in \Lambda'$

$$U_n(x) = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_n)\Phi(x, \lambda_n), \quad V_n(x) = \Psi(x, \lambda_n), \qquad /O.9/$$

а при $\lambda = \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} \in \Lambda''$

$$U_{2n+1}(x) = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\Phi(x, \lambda), \quad U_{2n+2}(x) = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\dot{\Phi}(x, \lambda), \qquad /O.10/$$

$$V_{2n+1}(x) = \dot{\Psi}(x, \lambda) - \dddot{\Omega}(\lambda)(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1}\Psi(x, \lambda), \quad V_{2n+1}(x) = \Psi(x, \lambda). \qquad /O.11/$$

С помощью вытекающего из /O.4/ и /O.7/ тождества

$$[\Psi(x, \mu), \Phi(x, \lambda)] = (\mu - \lambda)^{-1}(\Omega(\mu) - \Omega(\lambda))$$

нетрудно проверить, что система $\{V_n(x)\}$ биортогонально сопряжена системе $\{BU_n(x)\}$, т.е.

$$[V_n, U_m] = (V_n, BU_m)_{L_2} = \delta_{n,m} \quad (n, m \in Z). \qquad /O.12/$$

Для каждой комплекснозначной функции $f(x) = (f_1, f_2) \in L_1$ $(f_1(x), f_2(x) \in L_1(0, \pi))$ построим частичную сумму биортогонального ряда

$$S(M, N, f;\ x) = \sum_{n=M}^{N} V_n(x)[f, U_n]. \qquad /O.13/$$

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В §1 основным результатом является

Теорема 1. Для любой комплекснозначной функции $f(x) = (f_1, f_2) \in C^1$ $(f_1(x), f_2(x) \in C^1[0, \pi])$ справедлива следующая формула разложения:

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(f; x) \quad (0 < x < \pi), \qquad /O.14/$$

где при $\alpha_1 > \alpha_2$ $S_N(f; x) = S(-N+4, N, f; x)$, а при $\alpha_1 = \alpha_2$ $S_N(f; x) = S(-2N+3, 2N, f; x)$; $S(M, N, f; x)$ определяется /O.13/. Сходимость в /O.14/ равномерна по x в любом интервале $\Delta \subset (0, \pi)$.

Эту теорему мы получим как следствие доказанной в §1 методом контурного интегрирования теоремы 2 о равносходимости разложения $S_N(f \in L_1; x)$ с разложением, отвечающим случаю $Q_1(x) = Q_2(x) \equiv 0$. При некоторых ограничениях на α_j из теоремы 2 вытекает /см. §1, теорема 3/, что формула /O.14/ справедлива для $f \in L_2$. В §2 приведены некоторые примеры применения теоремы 1 в обратной задаче для регулярного оператора Дирака.

Отметим, что аналогичный излагаемому здесь круг задач для операторов Дирака на всей оси $-\infty < x < \infty$ рассматривался в /2/, а для задач Штурма-Лиувилля на конечном интервале - в /3/. Всюду в дальнейшем мы пользуемся введенными выше обозначениями.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛ РАЗЛОЖЕНИЯ

1. Приведем сначала две вспомогательные леммы, доказательство которых хорошо известно /см., например /1/, гл. 1; /4/, гл. 1/.

Лемма 1. При каждом фиксированном x решения $\phi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ являются целыми функциями от λ, для которых равномерно по $0 \le x \le \pi$ при $|\lambda| \to \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= f(x, \lambda) + O(\lambda^{-1} e^{|\mathrm{Im}\lambda| x}), \\ \psi(x, \lambda) &= g(x, \lambda) + O(\lambda^{-1} e^{|\mathrm{Im}\lambda|(\pi - x)}), \end{aligned} \qquad /1.1/$$

где $f(x, \lambda) = (\cos\lambda x, \ \sin\lambda x)^T$, $g(x, \lambda) = (\cos(\lambda(x - \pi) - \alpha), \sin(\lambda(x - \pi) - \alpha))^T$,

а также более точные

$$\phi(x, \lambda) = f(x, \lambda) + (2\lambda)^{-1} K(x) f(x, \lambda) + o(\lambda^{-1} \exp(|\mathrm{Im}\lambda| x)), \qquad /1.2/$$

$$\psi(x, \lambda) = g(x, \lambda) + (2\lambda)^{-1} L(x) g(x, \lambda) + o(\lambda^{-1} \exp(|\mathrm{Im}\lambda|(\pi - x))). \qquad /1.3/$$

Здесь матрицы $K(x)$ и $L(x)$ определяются формулами

$$K(x) = \begin{pmatrix} p(x) - p(0) & s^+(x) + q(0) \\ s^-(x) - q(0) & -p(x) - p(0) \end{pmatrix},$$

$$L(x) = \begin{pmatrix} p(x) & t^+(x) \\ t^-(x) & -p(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(\pi) & q(\pi) \\ q(\pi) & -p(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

где

$$s^{\pm}(x) = q(x) \pm \int_0^x (p^2(y) + q^2(y))\,dy, \quad t^{\pm}(x) = q(x) \mp \int_x^{\pi} (p^2(y) + q^2(y))\,dy.$$

Из /1.1/ получаем

Следствие. При $|\lambda| \to \infty$ функция

$$\Omega(\lambda) = \chi(\lambda) + O(\lambda^{-1} \exp(2|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi)), \qquad /1.4/$$

где

$$\chi(\lambda) = \sin(\lambda\pi + \alpha_1) \sin(\lambda\pi + \alpha_2). \qquad /1.5/$$

Лемма 2. Построим в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ область

$$\mathbf{C}_\rho = \mathbf{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - \lambda_n^{(0)}| \le \rho\}, \qquad /1.6/$$

где $\lambda^{(0)}_{2n+j} = n - \alpha_j/\pi$ $(n \in Z;\ j = 1,2)$ - нули функции $\chi(\lambda)$ /1.5/. Тогда для любого достаточно малого $\rho > 0$

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{C}_\rho} |\chi(\lambda)|^{-1} \exp(2|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi) = M_\rho < \infty. \qquad /1.7/$$

2. Введем основную в наших построениях матрицу

$$\begin{aligned} G(x, y, \lambda) = \Omega^{-1}(\lambda)\{&\Psi(x, \lambda)\Phi(y, \lambda)\theta(x - y) + \\ &+ [\sum_{j=1,2} S^{(j)}(x, \lambda)\tilde{S}^{(3-j)}(y, \lambda) - \Phi(x, \lambda)\tilde{\Psi}(y, \lambda)]\theta(y - x)\}, \end{aligned} \qquad /1.8/$$

где

$$S^{(j)}(x, \lambda) = \psi^{(j)} - \phi^{(3-j)}(x, \lambda), \quad \tilde{Y} = (BY)^T, \quad \theta(x) = 1$$

при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Очевидно, если $Q_1(x) = Q_2(x) \equiv 0$, матрица G равна

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, \lambda) = \chi^{-1}(\lambda)\{&\eta(x, \lambda)\tilde{\xi}(y, \lambda)\theta(x - y) + \\ &+ [\sum_{j=1,2} \zeta^{(j)}(x, \lambda)\tilde{\zeta}^{(3-j)}(y, \lambda) - \xi(x, \lambda)\tilde{\eta}(y, \lambda)]\theta(y - x)\}, \end{aligned} \qquad /1.9/$$

где $\chi(\lambda)$ определяется /1.5/, $\xi(x,\lambda) = (\cos 2\lambda x,\ \sin 2\lambda x)^T$,

$$\eta(x,\lambda) = (\cos(2\lambda(x-\pi) - a_1 - a_2),\ \sin(2\lambda(x-\pi) - a_1 - a_2))^T,$$

$$\zeta^{(j)}(x,\lambda) = (\cos(\lambda(2x-\pi) - a_j),\ \sin(\lambda(2x-\pi) - a_j))^T.$$

Лемма 3. Равномерно по $0 \le x, y \le \pi$ при $|\pi| \to \infty$ и $\lambda \in C_\rho$ /1.6/ имеет место оценка

$$G(x,y,\lambda) = \Gamma(x,y,\lambda) + O(\lambda^{-1}\exp(-2|\mathrm{Im}\lambda|\,|x-y|)E +$$
$$+ \theta(y-x)\{O(\lambda^{-1}\exp(-|\mathrm{Im}\lambda|(\pi - |2x-\pi|)) + o(\lambda^{-1})\}E,\ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /1.10/$$

и, в частности, /1.10/ выполняется при $N \to \infty$ и $a_1 > a_2$ на окружностях

$$c_N: \lambda = (4\pi)^{-1}(\pi - 2(a_1 + a_2)) + 4^{-1}(2N-3)\exp(i\phi),\ (0 \le \phi \le 2\pi), \qquad /1.11/$$

а при $a_1 = a_2 = a$ – на окружностях

$$c_N: \lambda = -a\pi^{-1} + 2^{-1}(2N-1)\exp(i\phi),\ (0 \le \phi \le 2\pi). \qquad /1.12/$$

Доказательство получается стандартным образом с помощью лемм 1 и 2, так как из /1.4/ и /1.9/ следует $\Omega^{-1}(\lambda) = \chi^{-1}(\lambda)(1 + O(\lambda^{-1}))$ ($|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in C_\rho$). Отметим лишь, что для оценки слагаемых $S^{(j)}(x,\lambda)\tilde{S}^{(3-j)}(y,\lambda)$ в /1.8/ необходимо воспользоваться /1.2/ и /1.3/.

Замечание 1. При всех достаточно больших N из /1.4/, /1.9/ и теоремы Руше следует, что внутренность окружности /1.11/ содержит / с учетом нумерации /0,6// собственные числа λ_n $(n = N, N-1, \dots, -N+4)$, а внутренность окружности /1.12/ - числа λ_n $(n = 2N, 2N-1, \dots, -2N+3)$.

Определим теперь с $\mu_{2n+j} = 2n - 2a_j/\pi$ $(n \in Z;\ j = 1,2)$, где $a_1 \ne a_2$, функции

$$u_{2n+j}(x) = (-1)^j\,\pi^{-1}\sin^{-1}(a_1 - a_2)(\cos\mu_{2n+j}x,\ \sin\mu_{2n+j}x), \qquad /1.13/$$

$$v_{2n+j}(x) = (\cos(\mu_{2n+j}x + (-1)^j(a_2 - a_1)),\ \sin(\mu_{2n+j}x + (-1)^j(a_2 - a_1))), \qquad /1.14/$$

а при $a_1 = a_2 = a$ и $\mu_n = 2n - 2a/\pi$ – функции

$$\left.\begin{aligned} u_{2n+1}(x) &= \pi^{-2}(\cos\mu_n x,\ \sin\mu_n x), \\ u_{2n+2}(x) &= \pi^{-2}(-2x\sin\mu_n x,\ 2x\cos\mu_n x), \end{aligned}\right\} \qquad /1.15/$$

$$v_{2n+1}(x) = (-2(x-\pi)\sin(\mu_n(x-\pi) - 2a),\ 2(x-\pi)\cos(\mu_n(x-\pi) - 2a)), \qquad /1.16/$$

$$v_{2n+2}(x) = (\cos\mu_n x,\ \sin\mu_n x),\ (n \in Z). \qquad /1.17/$$

Замечание 2. Так как $u_n(x)$ и $v_n(x)$ получаются из $U_n(x)$ и $V_n(x)$ при $Q_1(x) = Q_2(x) \equiv 0$, то из /0.12/ следует сразу, что $(v_n, Bu_m)_{L_2} = \delta_{n,m}$. Более того, нетрудно проверить, что матрица $2^{-1}\Gamma(x, y, \lambda = \mu/2)$ является матрицей Грина краевой задачи:

$$By' = \mu y\ (0 < x < \pi),\ y_1(\pi)\sin(a_1 + a_2) + y_2(\pi)\cos(a_1 + a_2) = 0,$$
$$y_1(\pi)\cos 2a_2 - y_2(\pi)\sin 2a_2 - y_1(0) = 0, \qquad /1.18/$$

и далее показать, как в /5/, гл. 1, что при $a_1 \ne a_2$ система $\{v_{2n+j}(x)\}$ /1.14/ является полной в L_1 и минимальной системой собственных функций, отвечающих собственным числам μ_{2n+j} задачи /1.18/, а при $a_1 = a_2$ система $\{v_n(x)\}$ /1.16/, /1.17/ является полной и минимальной системой собственных $v_{2n+2}(x)$ $(n \in Z)$ и присоединенных функций $v_{2n+1}(x)$ $(n \in Z)$, отвечающих собственным числам μ_n задачи /1.18/ с $a_1 = a_2$.

Теорема 2. Составим для функций $f \in L_1$ при $a_1 > a_2$ частичную сумму $s_N(f;x) = \sum_{n=-N+4}^{N} v_n(x)[f, u_n]$, где $u_n(x)$ и $v_n(x)$ определяются /1.13/, /1.14/, а при $a_1 = a_2$ – $S_N(f;x) = \sum_{n=-2N+3}^{2N} v_n(x)[f, u_n]$, где $u_n(x)$ и $v_n(x)$ определяются /1.15/-/1.17/. Тогда для любой $f \in L_1$

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{x \in \Delta \subset (0,\pi)} |s_N(f;x) - S_N(f;x)| = 0 \qquad /1.19/$$

и

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\le x\le\pi} |s_N(f;x) - S_N(f;x)| < \infty. \qquad /1.2O/$$

Ввиду замечания 2 эта теорема допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 2'. В обозначениях теоремы 2 для каждой функции $f \in L_1$ разложение $S_N(f;x)$ равносходится в смысле /1.19/, /1.2O/ с разложением $s_N(f;x)$ по собственным при $a_1 \ne a_2$ /либо по собственным и присоединенным при $a_1 = a_2$ / функциям краевой задачи /1.18/.

Доказательство. Построим функцию $F(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,y,\lambda) f(y)dx$ $(f = (f_1, f_2)^T \in L_1)$ и рассмотрим контурный интеграл $I_N(x) = \oint F(x,\lambda)d\lambda$, где интегрирование при $a_1 \ne a_2$ ведется по окружности c_N /1.11/ против часовой стрелки, а при $a_1 = a_2$ - по окружности c_N /1.12/. Так как вследствие леммы 1 и $\dot\omega_j(\lambda_{2n+j}) \ne 0$ при любом $x \in (0,\pi)$ $F(x,\lambda)$ является аналитической функцией от λ, имеющей полюса не более второго порядка в точках λ_{2n+j}, то по теореме о вычетах получаем в силу равенств

$$\phi^{(j)}(x, \lambda_{2n+j}) = C_{2n+j}\,\psi^{(j)}(x, \lambda_{2n+j}) \quad (n \in Z;\ j = 1,2) \qquad /1.21/$$

и замечания 1 к лемме 3, что при всех достаточно больших N $I_N(x) = S_N(f;x)$. Отсюда и из леммы 3 выводится, как обычно /см., например,[5] гл. 12/, что

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\Lambda(0,\pi)} \left|S_N(f;x) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} \left\{ \int_0^\pi \Gamma(x,y,\lambda) f(y)dy \right\} d\lambda\right| = 0. \qquad /1.22/$$

Для того чтобы получить /1.19/, остается заметить, что по теореме о вычетах $(2\pi i)^{-1} \oint_{C_N} \{ \int_0^\pi \Gamma(x,y,\lambda) f(y)dy\} d\lambda = s_N(f;x)$. Оценка /1.2O/ является прямым следствием /1.1O/. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу /1.22/ формула разложения /O.14/ получается непосредственно из равенства

$$\int_0^\pi \Gamma(x,y,\lambda) f(y)dy = \frac{1}{\lambda} f(x) - \frac{1}{2\lambda}\int_0^\pi \Gamma(x,y,\lambda) B f'(y)\,dy +$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\{\Gamma(x,0,\lambda) B f(0) - \Gamma(x,\pi,\lambda) B f(\pi)\}, \quad (0 < x < \pi),$$

где $f(x) \in C^1$, как, например, в[5], гл. 12. Теорема доказана.

Теорема 3. Для любой функции $f(x) \in L_2$

$$\lim_{N\to\infty} \| f(x) - S_N(f;x)\|_{L_2} = 0, \qquad /1.23/$$

где сумма $S(f;x)$ определяется, как в теореме 1 с $a_1 = \pi/2$, $a_2 = 0$ и $a_1 = a_2 = 0$ соответственно.

Доказательство в силу теоремы 2 сводится к установлению сходимости $\lim_{N\to\infty} \| f(x) - s_N(f;x)\|_{L_2} = 0$, что для $s_N(f;x)$ с $a_1 = \pi/2$, $a_2 = 0$, т.е. для

$$s_N(f;x) = \left(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-2} \sin nx \int_0^\pi f_1(y)\sin ny\,dy,\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_2(y)dy + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-2} \cos nx \int_0^\pi f_2(y)\cos ny\,dy\right),$$

является хорошо известным фактом для рядов Фурье; а для $s_N(f;x)$ с $a_1 = a_2 = 0$, т.е. для

$$s_N(f;x) = \frac{2}{\pi^2}\left(\int_0^\pi f_1(y)\,y\,dy + 2\sum_{n=1}^{N}\{(\pi - x)\sin 2nx \int_0^\pi f_1(y)\sin 2ny\,dy + \right.$$
$$+ \cos 2nx \int_0^\pi f_1(y)y\cos 2ny\,dy\},$$
$$(\pi - x)\int_0^\pi f_2(y)\,dy + 2\sum_{n=1}^{N}\{(\pi - x)\cos 2nx \int_0^\pi f_2(y)\cos 2ny\,dy +$$
$$\left. + \sin 2nx \int_0^\pi f_2(y)y\sin 2ny\,dy\}\right)$$

устанавливается легко с помощью полученного В.А.Ильиным критерия базисности[6]. Теорема доказана.

§2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим через $\beta^{-1}_{2n+j} = \|\psi^{(j)}(x,\lambda_{2n+j})\|^2_{L_2}$ $(n\in Z)$ квадрат нормы собственных функций краевой задачи $\{Q_j(x), \alpha_j\}$.

Хорошо известно, что

$$\beta^{-1}_{2n+j} = \psi_1^{(j)}(0,\lambda)\dot\omega_j(\lambda) = \frac{\dot\omega_j(\lambda)\cos\alpha_j}{\phi_1^{(j)}(\pi,\lambda)} = -\frac{\dot\omega_j(\lambda)\sin\alpha_j}{\phi_2^{(j)}(\pi,\lambda)}\Big|_{\lambda=\lambda_{2n+j}}. \qquad /2.1/$$

Положим теперь в /0.14/ $f(x) = (q_2(x) - q_1(x),\ p_1(x) - p_2(x))$ / p_j, q_j - элементы матриц Q_j в уравнении /0.7// и вычислим коэффициенты разложения $[f, U_{2n+j}]$ с помощью тождества

$$[f(x), \Phi(x,\lambda)] = \phi_1^{(2)}(\pi,\lambda)\phi_2^{(1)}(\pi,\lambda) - \phi_2^{(2)}(\pi,\lambda)\phi_1^{(1)}(\pi,\lambda),$$

принимая во внимание /2.1/ и равенства $\omega_j(\lambda_{2n+j}) = 0$ $(n\in Z;\ j=1,2)$. В результате этой выкладки и с учетом асимптотики /0.5/ получаем следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть для собственных чисел краевых задач $\{Q_j(x),\alpha_j\}$ и $\{Q_j(x),\tilde\alpha_j\}$ $(j=1,2)$, где $\alpha_2\ne\tilde\alpha_2$, выполняются равенства $\lambda_{2n+1} \equiv \lambda_n(Q_1(x),\alpha_1) = \lambda_n(Q_2(x),\tilde\alpha_2)$ $(n\in Z)$ и $\lambda_n(Q_1(x),\tilde\alpha_1) = \lambda_n(Q_2(x),\alpha_2) \equiv \lambda_{2n+2}$ $(n\in Z\setminus Z_0)$, где Z_0 - конечное множество индексов n. Тогда $\alpha_1=\tilde\alpha_2$, $\tilde\alpha_1=\alpha_1$ и

$$Q_2(x)-Q_1(x) = \sum_{n\in Z_0} \tilde V_{2n+2}(x)\beta_{2n+2}\frac{\tilde\omega_1(\lambda_{2n+2})}{\omega_1(\lambda_{2n+2})},$$

где матричные функции

$$\tilde V_{2n+j}(x) = \begin{pmatrix} -V_{2n+j,2}(x) & V_{2n+j,1}(x)\\ V_{2n+j,1}(x) & V_{2n+j,2}(x)\end{pmatrix},$$

β_{2n+j} определяются /2.1/, $\tilde\omega_1(\lambda_{2n+2}) = \omega(Q_1(x),\alpha_2;\lambda_{2n+2})$.
/Из условия $\lambda_{2n+1}=\lambda_n(Q_2(x),\tilde\alpha_2)$ $(n\in Z)$ и перемежаемости чисел $\lambda_n(Q_2(x),\tilde\alpha_2)$ и $\lambda_n(Q_2(x),\alpha_2)$ следует, что $\omega_1(\lambda_{2n+2}) \ne 0$ $(n\in Z)$/.

Следствие 1. Если в теореме 5 $Z_0=\emptyset$, то $Q_1(x)=Q_2(x)$ $(0\le x\le\pi)$.

Теорема 5. Пусть заданы две краевые задачи: $\{Q_j(x), \alpha_j\}$ $(j=1,2)$, для которых собственные числа $\lambda_{2n+1}=\lambda_{2n+2}$ и нормировочные числа $\beta_{2n+1}=\beta_{2n+2}$ при $n\in Z\setminus\bigcup_{\ell=1}^{3} Z_0^{(\ell)}$, где $Z_0^{(\ell)}$ - конечные множества индексов n:

$$Z_0^{(1)} = \{n\in Z \mid \lambda_{2n+1}=\lambda_{2n+2},\ \beta_{2n+1}\ne\beta_{2n+2}\},$$

$$Z_0^{(2)} = \{n\in Z\mid \lambda_{2n+1}\ne\lambda_{2n+2},\ \beta_{2n+1}\ne\beta_{2n+2}\},$$

$$Z_0^{(3)} = \{n\in Z\mid\lambda_{2n+1}\ne\lambda_{2n+2},\ \beta_{2n+1}=\beta_{2n+2}\equiv\beta_n\}.$$

Тогда $\alpha_1=\alpha_2$ и

$$\begin{aligned} Q_2(x)-Q_1(x) = {} & \sum_{n\in Z_0^{(1)}}(\beta_{2n+2}-\beta_{2n+1})\tilde V_{2n+2}(x) + {} \\ & + \sum_{n\in Z_0^{(2)}}\{\beta_{2n+2}\tilde V_{2n+2}(x) - \beta_{2n+1}\tilde V_{2n+1}(x)\} + {} \\ & + \sum_{n\in Z_0^{(3)}}\beta_n\{\tilde V_{2n+2}(x)-V_{2n+1}(x)\}, \quad (0\le x\le\pi), \end{aligned} \qquad /2.3/$$

где $\tilde V_{2n+j}(x)$ определяется, как в теореме 4, а β_{2n+j} - из /2.1/.

Следствие 2. Если в теореме 5 $Z_0^{(\ell)}=\emptyset$ $(\ell=1,2,3)$, то $Q_1(x)=Q_2(x)$ $(0\le x\le\pi)$.

Следствие 3. Пусть заданы краевая задача $\{Q(x),\alpha\}$ и положительное число $\tilde\beta_m$. Тогда единственная краевая задача $\{\tilde Q(x),\alpha\}$, для которой спектр $\sigma\{Q(x),\alpha\}=\sigma\{\tilde Q(x),\alpha\}$, нормировочные числа $\beta_n(Q(x),\alpha)=\beta_n(\tilde Q(x),\alpha)$ $(n\in Z,\ n\ne m)$ и $\beta_m(\tilde Q(x),\alpha)=\tilde\beta_m$, определяется с помощью

$$\tilde Q(x) = Q(x) + \frac{\tilde\beta_m-\beta_m}{I(x)}\begin{pmatrix}-2\psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x)\\ \psi_1^2(x)-\psi_2^2(x) & 2\psi_1(x)\psi_2(x)\end{pmatrix}, \qquad /2.4/$$

где $\psi(x) = \psi(x, \lambda_m)$ - собственная функция задачи $\{Q(x), a\}$, отвечающая собственному числу λ_m, $I(x) = 1 + (\tilde{\beta}_m - \beta_m)\int_x^\pi \{\psi_1^2(y) + \psi_2^2(y)\}dy$.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что решение $\tilde{\psi}(x, \lambda)$: $\tilde{\psi}(\pi, \lambda) = (\cos a, -\sin a)^T$ уравнения $By' + \tilde{Q}(x)y = \lambda y$ дается формулой

$$\tilde{\psi}(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) - \frac{\tilde{\beta}_m - \beta_m}{I(x)} \int_x^\pi \begin{pmatrix} \psi_1(x)\psi_1(y) & \psi_1(x)\psi_2(y) \\ \psi_2(x)\psi_1(y) & \psi_2(x)\psi_2(y) \end{pmatrix} \psi(y, \lambda)dy. \qquad /2.5/$$

Положив здесь $x = 0$, получаем вследствие условия $\psi_2(0) = 0$ и определения $\omega(\lambda)$ /O.4/, что $\omega(Q(x), a; \lambda) = \omega(\tilde{Q}(x), a; \lambda)$, а вследствие равенств $(\psi(x, \lambda_n), \psi(x, \lambda_m))_{L_2} = \delta_{n,m}\beta_m^{-1}$, что $\tilde{\psi}_1(0, \lambda_n) = \psi_1(0, \lambda_n)$ при $n \neq m$ и $\tilde{\psi}_1(0, \lambda_m) = \psi_1(0, \lambda_m)\beta_m \tilde{\beta}_m^{-1}$. Теперь остается учесть /2.1/ и применить следствие 2.

Замечание 1. Теоремы 4 и 5 можно рассматривать как обобщение некоторых из теорем Хохштадта /7/ /см. также работы Левитана /8/ / о структуре разности потенциалов двух задач Штурма-Лиувилля. Следствия 1 и 2 являются для краевой задачи Дирака аналогами известных теорем единственности Борга /9/ и Марченко /10/ в обратной задаче для регулярного оператора Штурма-Лиувилля. Конструкция формул /2.4/ и /2.5/ подсказана работой Гасымова и Левитана /11/, где решена обратная задача для системы Дирака на полуоси. Обратная задача для регулярного оператора Дирака /в постановках соответствующих следствий 1 и 2/ изучена в /12/.

Замечание 2. Результаты настоящей работы без труда переносятся на общий случай двух краевых задач $\{Q_j(x), a_j, \beta_j\}$ $(j = 1,2)$, определяемых уравнениями /O.7/ и граничными условиями

$$y_1^{(j)}(\pi)\sin a_j + y_2^{(j)}(\pi)\cos a_j = 0, \quad y_1^{(j)}(0)\sin\beta_j + y_2^{(j)}(0)\cos\beta_j = 0,$$

если воспользоваться следующей леммой, доказательство которой вытекает непосредственно из /11/.

Лемма 4. Пусть системы функций $\{U_n(x)\}$ и $\{V_n(x)\}$ построены по краевым задачам $\{Q_j(x), a_j, \beta_j\}$ $(j = 1,2)$ указанным во введении способом, путем замены $\phi^{(j)}(x,\lambda)$: $\phi^{(j)}(0,\lambda) = (1, 0)^T$ на: $\phi^{(j)}(x, \lambda)$: $\phi^{(j)}(0, \lambda) = (\cos\beta_j, -\sin\beta_j)^T$ и $U_n^{(0)}(x)$, $V_n^{(0)}(x)$ - функции /O.9/-/O.11/, отвечающие краевым задачам

$$\{A(\beta_j)Q_j(x)A^{-1}(\beta_j), \beta_j - a_j\} \qquad (j = 1,2),$$

где $A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$. Тогда $U_n(x) = A(\beta_1 + \beta_2)U_n^{(0)}(x)$,

$$V_n(x) = A(\beta_1 + \beta_2)V_n^{(0)}(x), \quad [V_n, U_m] = [V_n^{(0)}, U_m^{(0)}] \quad (n, m \in Z) \text{ и}$$

$$[f, U_n^{(0)}] = [A(\beta_1 + \beta_2)f, U_n] \quad (f \in L_1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. "Наука", М., 1970, 671 с.*
2. *Герджиков В.С., Христов Е.Х. ОИЯИ, Е5-11668, Дубна, 1978.*
3. *Кирчев К.П., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-12227, Дубна, 1979.*
4. *Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. "Наукова Думка", Киев, 1977, 329 с.*
5. *Коддингтон Э.А., Левинсон А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1958, 474 с.*
6. *Ильин В.А. ДАН СССР, 1976, 227, №4, с.796-799.*
7. *Hochstadt H. Comm. on Pure and Appl. Mathem., 1973, v.26, No. 56, p.715-730.*
8. *Левитан Б.М. Изв. АН СССР, сер. мат., 1978, 42, №1, с.185-199.*
9. *Borg G. Acta. Math., 1945, 78, No. 2, p.1-96.*
10. *Марченко В.А. ДАН СССР, 1950, 72, №3, с.457-460.*
11. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М. ДАН СССР, 1966, 167, №5, с.967, 970.*
12. *Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т. Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам. Труды летней школы по спектральной теории операторов и теории представления групп. Изд. ЭЛМ, Баку, 1975, с.46-71.*

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1979 года.