сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12338

В.М. Лебеденко

ОБ ИЗОМОРФНОСТИ PR -АЛГЕБР И PR -ГРУПП

1979

P5 - 12338

В.М. Лебеденко

ОБ ИЗОМОРФНОСТИ **PR**-АЛГЕБР И **PR**-ГРУПП

Лебеденко В.М. P5 - 12338

Об изоморфности PR -алгебр и PR-групп

В работе рассмотрены PR -алгебры, то есть неабелевы действительные алгебры Ли с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i < j)$. С каждой такой алгеброй связана некоторая матрица / PR -матрица/, составленная из констант r_{ij}. Найдено необходимое и достаточное условие изоморфности двух таких алгебр, формулируемое на языке PR -матриц. Этот результат перенесен на PR -группы, то есть на связные и односвязные группы Ли, алгебры Ли которых являются PR-алгебрами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Lebedenko V.M. P5 - 12338

On Isomorphism of PR-Algebras of PR-Groups

PR -algebras are considered, i.e., nonabelian real Lie algebras with commuting relations of the type $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i < j)$. Each of such algebras is connected with some matrix (PR -matrix) consisting of constants r_{ij}. Necessary and sufficient condition for isomorphism of two such algebras formulated in PR -matrix language has been found. This result is transferred to PR -groups, i.e., to connected and simply connected Lie groups, their Lie algebras being PR-algebras.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах[2,3] изучались PR -группы и соответствующие им PR -алгебры. Алгебру Ли L мы называем PR -алгеброй, если у нее есть такой базис $[H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n]$ /PR-базис/, элементы которого удовлетворяют соотношениям типа

$$[H_i, H_j] = 0 \quad \text{при всех} \quad i, j \le p \ (1 \le p < n) \ \text{и при всех} \ i, j > p,$$

$$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \quad \text{при всех} \quad i \le p, \ j > p \qquad /1/$$

/$r_{ij} \in R$; при фиксированном i $(r_{ij} \neq 0)$ /.

Связную и односвязную группу Ли мы называем PR-группой, если ее алгебра Ли является PR -алгеброй.

Очевидно, что две PR -группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли. В следующем разделе мы дадим критерий изоморфности двух PR -алгебр, формулируемый на языке PR -матриц /см.[3] /. PR -матрицей алгебры Ли L, заданной соотношениями типа /1/, мы называем матрицу, составленную из коэффициентов r_{ij} :

$$\begin{pmatrix} r_{1\,p+1} \dots r_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ r_{p\,p+1} \dots r_{pn} \end{pmatrix}.$$

В частности, такая матрица может состоять из одного столбца /при $n = p+1$ /.

2. *ОБ ИЗОМОРФНОСТИ* PR-*АЛГЕБР*

Пусть L и L' - две PR-алгебры с PR-базисами $[H_1,\dots,H_p,H_{p+1},\dots,H_n]$, $[H'_1,\dots,H'_{p'},H'_{p'+1},\dots,H'_{n'}]$ /соответственно/. Если алгебра L изоморфна алгебре L', то $n=n'$ и $p=p'$, так как $p=\dim([L,L])$. Пусть $[H_1,\dots,H_p,H_{p+1},\dots,H_n]$ – PR-базис алгебры L, $[H_i,H_j]=r_{ij}H_i$ при всех $i\le p$, $j>p$, а $[H'_1,\dots,H'_p,H'_{p+1},\dots,H'_n]$ – PR-базис алгебры L', $[H'_i,H'_j]=r'_{ij}H'_i$ при всех $i\le p$, $j>p$. Через C обозначим PR-матрицу алгебры L, а через C' - PR-матрицу алгебры L'/соответственно указанным базисам/.

Справедлива следующая

Теорема 1. В принятых обозначениях при $r(C)=r(C')=n-p$ алгебры Ли L и L' изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая подстановка $t(i)$, что PR-матрицы C и C'связаны соотношениями

$$r\left(\begin{array}{ccc|c} r_{t(1)\,p+1} & \dots & r_{t(1)\,n} & r'_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \\ r_{t(p)\,p+1} & \dots & r_{t(p)\,n} & r'_{pj} \end{array}\right)=r(C) \qquad /2/$$

для любых j, $p<j\le n$ /здесь $r(C)$ - ранг матрицы C /.

Доказательство. Легко показать, что алгебры Ли L и L' изоморфны тогда и только тогда, когда в алгебре L есть такие элементы

$$H''_i=\sum_{s=1}^{p}a_{is}H_s,\qquad i=1,\dots,p,$$

$$H''_j=\sum_{s=p+1}^{n}a_{js}H_s,\qquad j=p+1,\dots,n,$$

что

$$[H''_i,H''_j]=r'_{ij}H''_i$$

и

$$\det\|a_{is}\|_{1\le i,\, s\le p}\ne 0\ne\det\|a_{js}\|_{p+1\le j,\, s\le n}.$$

Эти условия равносильны разрешимости системы

$$\left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots \\ a_{it}\left(\sum_{s=p+1}^{n}r_{ts}a_{js}-r'_{ij}\right)=0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (i=1,\dots,p,\quad j=p+1,\dots,n,\quad t=1,\dots,p, \\ \det\|a_{is}\|_{1\le i,\, s\le p}\ne 0\ne\det\|a_{js}\|_{p+1\le j,\, s\le n} \end{array}\right. \qquad /3/$$

относительно неизвестных a_{it} и a_{js} $(a_{it},a_{js}\in R)$. Если эта система разрешима, то хотя бы для одной подстановки $t(i)$ $a_{i\,t(i)}\ne 0$ $(i=1,\dots,p,\ 1\le t(i)\le p)$. Следовательно, матрицы C и C'удовлетворяют условиям /2/.

Наоборот, пусть PR-матрицы C и C'удовлетворяют условиям /2/. Тогда есть такие числа $a_{js}\in R$, $j,s=p+1,\dots,n$, что для всех i и j, $i=1,\dots,p$, $j=p+1,\dots,n$

$$r'_{ij}=\sum_{s=p+1}^{n}r_{t(i)s}a_{js}.$$

Так как столбцы матрицы C'_j линейно независимы, то $\det\|a_{js}\|_{p+1\le j,\, s\le n}$. Положим $a_{it(i)}=1$, а $a_{is}=0$ при $s\ne t(i)$. Таким образом, мы нашли решение системы /3/. Теорема доказана.

Примечание. При $n-p=p$ алгебры L и L' всегда изоморфны /см. [3] /.

Центры PR-алгебр, соответствующих PR-матрицам, рассмотренным в теореме 1, равны нулю. Если PR-алгебра L обладает ненулевым центром $Z(L)$, то в некотором базисе ее PR-матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} r_{1p+1} & \dots & r_{1p+\pi} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ r_{p\,p+1} & & r_{p\,p+\pi} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

/см. [3] /.

Здесь ширина нулевого блока равна $\dim(Z(L))$, ранг матрицы

$$C = \begin{pmatrix} r_{1p+1} \dots r_{1p+\pi} \\ \dots\dots \\ r_{pp+1} \dots r_{p\,p+\pi} \end{pmatrix}$$

равен π, $\pi \le p$, а сама C является PR-матрицей прямого слагаемого L, дополнительного к $Z(L)$. Из теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 2. Две PR-алгебры L и L' с ненулевыми центрами изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim(Z(L)) = \dim(Z(L'))$ и PR-матрицы для дополнительных к их центрам подалгебр связаны соотношениями типа /2/.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОМОРФИЗМОВ ДЛЯ PR-ГРУПП

Пусть PR-алгебры L и L' изоморфны, а G и G' – PR-группы, алгебрами Ли которых являются L и L'. Будем считать, что в G и G' установлены глобальные координаты, для которых соответственно

$$[g(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)]_{x_i \in R} \to H_i \in L, \quad i=1,\dots,n,$$

$$[g'(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)]_{x_i \in R} \to H'_i \in L', \quad i=1,\dots,n.$$

/см.[2] /. Если столбцы соответствующих PR-матриц связаны соотношениями

$$\sum_{s=p+1}^{p+\pi} r_{t(i)s}\,\alpha_{js} = r'_{ij} = 0 \qquad (j = p+1, \dots, p+\pi)$$

/см. теоремы 1 и 2/, то можно определить изоморфизм $\phi: G' \to G$ на образующих элементах $b_i(x_i) = g'(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)$, $a_i(x_i) = g(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)$, так:

$$b_i(x_i)\phi = a_{t(i)}(x_i) \quad \text{для всех} \quad i \le p,$$

$$b_j(x_j)\phi = a_{p+1}(\alpha_{jp+1}x_j)\dots a_{p+\pi}(\alpha_{jp+\pi}x_j)$$

для всех j, $p+1 \le j \le p+\pi$, $b_j(x_j)\phi = a_j(x_j)$

для всех j, $p+\pi < j \le n$ /если только $Z(L) \neq 0$ /.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, Г.И.Колерову и А.В.Матвеенко за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А.Г. Теория групп. "Наука", М., 1967.*
2. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.*
3. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11708, Дубна, 1978.*
4. *Понтрягин А.С. Непрерывные группы. "Наука", М., 1973.*
5. *Шевалле К. Теория групп Ли, т. I, ИЛ, М., 1948.*

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1979 года.