сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12337

В.М.Лебеденко

О ПОДГРУППАХ **PR** -ГРУПП

1979

P5 - 12337

В.М.Лебеденко

О ПОДГРУППАХ **PR** -ГРУПП

Лебеденко В.М.

P5 - 12337

О подгруппах PR-групп

В работе изучаются подгруппы PR-групп, т.е. связных и односвязных неабелевых групп Ли, алгебры Ли которых задаются коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ ($i<j$, $r_{ij} \in R$). Показано, что всякая аналитическая подгруппа PR-группы или абелева, или является PR-группой. Описаны аналитические нормальные делители PR-групп. Найдена оценка размерности абелевых подгрупп PR-группы. Описаны центры PR-групп. Показано, что для всякого собственного аналитического нормального делителя G_1 PR-группы G есть такая дополнительная подгруппа G_2, что группа G разлагается в полупрямое произведение $G = G_1 \times G_2$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Lebedenko V.M.

P5 - 12337

On the Subgroups of PR-Groups

The subgroups of PR-groups are being studied, i.e., the subgroups of connected and simply connected nonabelian Lie groups, their Lie algebras being defined by the commuting relations of the type $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ ($i<j$, $r_{ij} \in R$). It has been shown that every analytical subgroup of PR-group is either abelian or PR-group. The analytical normal divisors of PR-group are described. Dimension of the abelian subgroups of PR-group is estimated, and the centres of PR-groups are described. It has been shown that for every proper analytical normal divisor G_1 of PR-group G there exists such complementary subgroup G_2 and that group G is expanded in semidirect product $G = G_1 \times G_2$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В работах [3-5] нами изучались свойства PR-групп и соответствующих им PR-алгебр. Алгебру Ли L мы называем PR-алгеброй, если у нее есть такой базис $\{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n\}$, PR-базис, элементы которого удовлетворяют соотношениям типа

$$[H_i, H_j] = 0 \quad \text{при всех} \quad i, j \le p \ (1 \le p < n) \ \text{и при всех} \ i, j > p,$$

$$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \quad \text{при всех} \quad i \le p, \ j > p$$

$$(r_{ij} \in R; \quad \text{при фиксированном} \ i \quad r_{ij} \ne 0). \qquad /1/$$

Связную и односвязную группу Ли G мы называем PR-группой, если ее алгебра Ли является PR-алгеброй.

В работе [3] показано, что во всякой PR-группе можно ввести глобальные координаты $(g \leftrightarrow g(t_1, \ldots, t_n),\ [g(0,\ldots,0,t_i,0,\ldots,0)]_{t_i \in R} \to H_i)$. В этих координатах групповая операция умножения задается так:

$$g(t_1, \ldots, t_n) g(t'_1, \ldots, t'_n) =$$

$$= g(t_1 + e^{-(r_{1,p+1}t_{p+1} + \ldots + r_{1n}t_n)} t'_1, \ldots, \qquad /2/$$

$$t_p + e^{-(r_{p\,p+1}t_{p+1} + \ldots + r_{pn}t_n)} t'_p,\ t_{p+1} + t'_{p+1}, \ldots, t_n + t'_n)$$

/$g(0, \ldots, 0)$ - единица группы/.

Мы считаем, что в каждой такой группе введена естественная топология евклидова пространства.

В работах [4,5] исследуются подалгебры PR-алгебр. В настоящем сообщении мы применяем результаты этих работ для изучения подгрупп PR-групп.

1. *НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПОДГРУПП* PR-*ГРУПП*

Если умножение в PR-группе G задается с помощью соотношений типа /2/, то подгруппами в ней будут, например, подмножества

$$A = [g(t_1, ..., t_p, 0, ..., 0)]_{t_1, ..., t_p \in R},$$

$$B = [g(0, ..., 0, t_{p+1}, ..., t_n)]_{t_{p+1}, ..., t_n \in R},$$

$$A_i = [g(0, ..., 0, t_i, 0, ..., 0)]_{t_i \in R}.$$

Это абелевы подгруппы группы G /см. /2//. Причем группа G разлагается в полупрямое произведение нормального делителя A и подгруппы B. Подгруппа $A = [G, G]$ /коммутант G /. Фактор-группа $G/A \cong B$, так как $A \cap B$ - единичная подгруппа. Кроме того, группа G разлагается в произведение однопараметрических подгрупп A_i:

$$G = A_1, ..., A_n.$$

Приведем примеры неабелевых подгрупп. Такими подгруппами являются любые подмножества вида

$$[g(0, ..., 0, t_k, 0, ..., 0) \cdot g(0, ..., 0, t_\ell, 0, ..., 0)]_{t_k, t_\ell \in R}$$

при $r_{k\ell} \neq 0$, $k \leq p$, $\ell \geq p+1$.

2. *НЕАБЕЛЕВЫ ПОДГРУППЫ* PR-*ГРУПП*

В работе [4] показано, что всякая неабелева подалгебра PR-алгебры сама является PR-алгеброй.

Покажем, что всякая неабелева аналитическая /связная/ подгруппа PR-группы сама является PR-группой. Пусть G -PR-группа и G′- ее неабелева аналитическая подгруппа, L - алгебра Ли группы G, L′-подалгебра L, соответствующая G′. Из вышесказанного следует, что L′-PR- алгебра. Пусть A - связная и односвязная группа Ли, алгеброй Ли которой является L′. Тогда /см. [3] / группа A -PR-группа /операцию в ней можно задать с помощью соотношений типа /2//. Группа G, как связная группа, изоморфна A/B, где B - некоторая дискретная подгруппа A, содержащаяся в ее центре. Так как центр группы или тривиален, или изоморфен евклидову пространству по сложению /см. пункт 4/, то либо подгруппа B единичная, либо A/B содержит элементы конечного порядка /см. [2] /. Вторая возможность отпадает, так как легко заметить, что группа G не содержит элементов конечного порядка /см. /2//. Теперь мы заключаем, что G′ действительно, является PR-группой.

3. *ОБ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУППАХ* PR-*ГРУПП*

В пункте 1 приведены примеры абелевых подгрупп PR-групп. Можно привести и много других примеров /см. [3] /. Легко видеть, что максимум размерности аналитических абелевых подгрупп PR-группы G с алгеброй Ли L равен A(L)-максимуму размерности абелевых подалгебр PR-алгебры L. В работе [5] показано, что

$$A(L) = \dim([L, L]) + \dim(Z(L))$$

/здесь Z(L)- центр L /.

4. *ЦЕНТРЫ* PR-*ГРУПП*

Известно, что центр связной группы Ли G - это аналитическая подгруппа G, соответствующая центру ее алгебры Ли. В работе [4] описаны центры PR-алгебр. Если $[H_1, ..., H_n]$ - PR-базис алгебры Ли L, , соответствующий PR-группе G $/[g(0, ..., 0, t_i, 0, ..., 0)]_{t_i \in R} \to H_i$; мы считаем, что операция умножения в координатах $(t_1, \ldots, t_2)$ задается с помощью соотношений типа /2//, и $\{H_{p+\pi+1},\ldots,H_n\}$ - базис центра, то центр G равен множеству

$$\{g(0, \ldots, 0, t_{p+\pi+1}, \ldots, t_n)\}_{t_{p+\pi+1}, \ldots, t_n \in R}$$

/см. /2/ и /8//.

Заметим, что в этом случае центр группы G изоморфен аддитивной группе $E_{n-p-\pi}$.

5. НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ PR-ГРУПП

Известна связь между связными /аналитическими/ нормальными делителями групп Ли и идеалами их алгебр Ли. В работе /4/ описаны идеалы PR-алгебр*. У каждого такого идеала есть базис, состоящий из элементов, принадлежащих либо $\{H_1,\ldots,H_p\}$, либо $\{H_{p+1},\ldots,H_n\}$ /через $\{M\}$ мы обозначаем подпространство, натянутое на множество M /. Заметим, что все элементы первого типа имеют вид $\sum_{t=1}^{p} \alpha_{it} H_t$, где при $\alpha_{it} \neq 0$ $r_{tj} = k_{ij}$ /см. /1//. Подмножества в соответствующих PR-группах вида

$$\{a_i(s)\}_{s \in R}, \quad \{a_j(s)\}_{s \in R},$$

где

$$a_i(s) = g(\alpha_{i1} s, \ldots, \alpha_{ip} s, 0, \ldots, 0),$$

$$a_j(s) = g(0, \ldots, 0, \alpha_{j\,p+1} s, \ldots, \alpha_{jn} s)$$

/см. /1/ и /2//, являются однопараметрическими подгруппами с касательными векторами $\sum_{t=1}^{p} \alpha_{it} H_t$ и $\sum_{t=p+1}^{n} \alpha_{jt} H_t$. Легко проверить, что при любых действительных s и s'

$$a_j(s') a_i(s) = a_i(e^{m_{ij} s'} s) a_j(s'),$$

где m_{ij} - некоторые постоянные /см. /2//. Отсюда вытекает

---

*В этой работе не указаны идеалы вида $\{H_1, \ldots, H_p, \ldots b_i, \ldots\}$, где $b_i \in \{H_{p+1}, \ldots, H_n\}$.

/см. /3//, что соответствующие подгруппы, являющиеся произведениями таких подмножеств, - группы Ли. Их размерности совпадают с мощностями указанных базисов. Это аналитические подгруппы, соответствующие идеалам, описанным в работе /4/. Каждый такой нормальный делитель замкнут в своей группе Ли /как подпространство евклидова пространства/.

6. О ФАКТОР-ГРУППАХ И ГОМОМОРФНЫХ ОБРАЗЦАХ PR-ГРУПП

Пусть связная группа G' с алгеброй Ли L' является аналитическим гомоморфным образом PR-группы G с алгеброй Ли L. Тогда алгебра L' изоморфна некоторой фактор-алгебре алгебры L /см. /7//. То есть L'-PR-алгебра или абелева алгебра Ли /см. п.7/. Поэтому G', как связная группа с такой алгеброй Ли, - или PR-группа, или абелева группа, или прямое произведение тора на PR-группу.

7. О РАСЩЕПЛЕНИИ PR-АЛГЕБР И PR-ГРУПП

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть A – собственная подалгебра PR-алгебры L с PR-базисом $\{H_1,\ldots,H_n\}$ и M - максимальное среди подмножеств $N \subset \{H_1,\ldots,H_n\}$, для которых $\{N\} \cap A = 0$. Тогда алгебра L разлагается в следующую прямую сумму подпространств: $L = A + \{M\}$. Множество $\{M\}$ является подалгеброй L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как среди элементов $\{H_1,\ldots,H_n\}$ есть хоть один, не принадлежащий A, то $M \neq \emptyset$. Требуемое разложение получается в силу максимальности M.

Множество $\{M\}$ является подалгеброй L в силу соотношений /1/. Легко заметить, что $\{M\}$ - PR - алгебра или абелева алгебра Ли.

П р е д л о ж е н и е 2. Всякая фактор-алгебра PR-алгебры является либо абелевой алгеброй Ли, либо PR-алгеброй. Точнее, пусть A - собственный идеал PR-алгебры L и выполняются условия предложения 1. Тогда $L/A \cong \{M\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение вытекает из предложения 1 и теоремы об изоморфизмах, так как $A \cap \{M\} = 0$.

Предложение 3. Пусть G-PR - группа с алгеброй Ли L; $[H_1, \dots, H_n]$ - PR - базис L; $(t_1,\dots,t_n)$ - глобальные координаты группы G $([g(0, \dots, 0, t_i, 0,\dots, 0)]_{t_i \in R} \to H_i)$, в которых умножение задается с помощью соотношений типа /2/; A - собственный идеал L и $M = [H_{i_1}, \dots, H_{i_q}]$ - дополнительное подмножество из $[H_1, \dots, H_n]$, соответствующее A в силу условия предложения 1. Пусть, кроме того, G_1 - нормальный делитель группы G, соответствующий идеалу A /в силу построений пункта 5/, а G_2 - подгруппа G, разлагающаяся в произведение

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_q}, \text{ где } A_{i_\rho} = [g(0,\dots,0, t_{i_\rho}, 0,\dots,0)]_{t_{i_\rho} \in R}.$$

Тогда группа G разлагается в полупрямое произведение - $G = G_1 \times G_2$.

Утверждение вытекает из теоремы, доказанной в главе XI работы /6/.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, Г.И.Колерову и А.В.Матвеенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А.Г. Теория групп. М., "Наука", 1967.*
2. *Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. "Наука", М., 1970.*
3. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.*
4. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11708, Дубна, 1978.*
5. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-12242, Дубна, 1979.*
6. *Наймарк М.А. Теория представлений групп. "Наука", М., 1976.*
7. *Понтрягин А.С. Непрерывные группы. "Наука", М., 1973.*
8. *Шевалле К. Теория групп Ли, т. 1, ИЛ, М., 1948.*

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1979 года.