сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5 - 12242

В.М.Лебеденко

О МАКСИМУМЕ РАЗМЕРНОСТИ АБЕЛЕВОЙ ПОДАЛГЕБРЫ **PR** -АЛГЕБРЫ

1979

Р5 - 12242

В.М.Лебеденко

О МАКСИМУМЕ РАЗМЕРНОСТИ АБЕЛЕВОЙ ПОДАЛГЕБРЫ **PR** -АЛГЕБРЫ

Лебеденко В.М. Р5 - 12242

О максимуме размерности абелевой подалгебры PR-алгебры

Изучаются свойства абелевых подалгебр PR-алгебр, то есть неабелевых алгебр Ли с коммутационными соотношениями типа

$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \quad (i < j, \ r_{ij} \in R).$

Для каждой такой алгебры L найдено выражение A(L) - максимума размерности абелевой подалгебры L:

$A(L) = \dim([L,L]) + \dim(Z(L)).$

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Lebedenko V.M. P5 - 12242

On Dimension of Abelian Subalgebra of PR-Algebra

Properties of Abelian subalgebras of PR-algebras which are nonAbelian Lie algebras with commutation relations of the type:

$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \quad (i < j, \ r_{ij} \in R)$

are studied. For each algebra L an expression for A(L) dimension maximum of Abelian subalgebra L has been found:

$A(L) = \dim([L,L]) + \dim(Z(L)).$

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [3-9] нами изучались PR-группы и соответствующие им PR-алгебры. Алгебру Ли L /над полем действительных чисел/ мы называем PR-алгеброй, если у нее есть базис / PR-базис/ $\{H_1, ..., H_p, H_{p+1}, ..., H_n\}$, $(n \geq 2)$, элементы которого удовлетворяют соотношениям вида

$$[H_i, H_j] = 0 \quad \text{при всех} \quad i,j \leq p \quad \text{и всех} \quad i,j > p, \qquad /1/$$

$$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \quad \text{при всех} \quad i,j, \ i \leq p, \ j > p$$

/при любом фиксированном i $r_{ij} \neq 0$/.

Настоящая работа посвящена нахождению A(L) - максимума размерностей абелевых подалгебр для каждой PR-алгебры L.

Ниже будет доказана следующая

Теорема. Для всякой PR-алгебры L

$$A(L) = \dim([L,L]) + \dim(Z(L)). \qquad /2/$$

Заметим, что согласно соотношениям /1/ $[L,L] = \{H_1, ..., H_p\}$ /здесь и ниже для множества $M \neq \emptyset$ $\{M\}$ будет означать подпространство, натянутое на M/. В работе [8] приведены некоторые примеры абелевых подалгебр PR-алгебр*. Алгебры вида $[L,L] + Z(L)$ тоже являются абелевыми.

---

* Существуют абелевы подалгебры, не содержащиеся ни в $\{H_1, ..., H_p\}$, ни в $\{H_{p+1}, ..., H_n\}$, ни в $[Z,Z] + Z(L)$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся матрицы /см. [5] /, составленные из констант r_{ij} /см. /1//,

$$\begin{pmatrix} r_{1,p+1} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{p,p+1} & \dots & r_{pn} \end{pmatrix} -$$

PR -матрицы. С помощью столбцовых преобразований и перестановки строк PR-матрицу можно привести к одному из следующих видов /см. [2] /:

$$\alpha)\ \begin{pmatrix} r_{1,n} \\ \vdots \\ r_{p,n} \end{pmatrix}, \qquad \alpha')\ \left(\begin{array}{|c|c} r_{1,p+1} & \\ \vdots & 0 \\ r_{p,pn} & \end{array}\right),$$

$$\beta)\ \begin{pmatrix} 1\,0 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \dots 0\,1 \end{pmatrix}, \qquad \beta')\ \left(\begin{array}{c|c} 1\,0 \dots 0 & \\ \dots\dots & 0 \\ 0 \dots 0\,1 & \end{array}\right),$$

$$\gamma)\ \begin{pmatrix} E_\pi \\ \hline X \end{pmatrix}, \qquad \gamma')\ \left(\begin{array}{c|c} E_\pi & 0 \\ \hline X & 0 \end{array}\right).$$

/здесь E_π - единичная $\pi \times \pi$ -матрица, $\pi > 1$; блоки PR-матриц, состоящие из одних нулей, будем называть нулевыми подматрицами, а оставшиеся части и матрицы для случаев $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ - ненулевыми подматрицами PR -матриц/. Это PR -матрицы в приведенной форме. Они являются PR -матрицами относительно новых PR-базисов. Заметим, что параметры каждой такой матрицы являются инвариантами алгебры L: высота (p) ненулевой подматрицы равна $\dim([L, L])$, ширина нулевой подматрицы в случаях $\alpha')$, $\beta')$, $\gamma')$ равна $\dim Z(L)$ /для случаев $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ $Z(L) = 0$ /, ширина ненуле-

вой подматрицы равна $\dim(L/\{[L, L], Z(L)\})$. Ранг PR -матрицы, естественно, инвариантен относительно столбцовых преобразований и перестановки строк. Переходим теперь к доказательству нашей теоремы.

2. Случай $Z(L) = 0$

Покажем, что в этом случае $A(L) = \dim([L,L]) = p$ /см. /1//. Здесь PR -матрица алгебры L имеет один из следующих видов: $\alpha)$ $(n = p + 1)$, $\beta)$ $(n = 2p)$, $\gamma)$ $(n = p + \pi)$. Ранг каждой из указанных матриц равен $\pi = n - p \leq p$. Подалгебра $[L, L]$ абелева. Покажем, что в нашем случае алгебра L не содержит абелевых подалгебр большей чем $\dim[L, L] = p$ размерности. Предположим противное. Пусть абелева подалгебра $H = \{h_1, \dots, h_k\} \subseteq L$ имеет размерность $k > p$ и $h_i = a_i + b_i$, $a_i \in \{H_1, \dots, H_p\}$, $b_i \in \{H_{p+1}, \dots, H_n\}$, $i = 1, \dots, k$. Если размерность подалгебры $\{a_1, \dots, a_k\}$ равна s, то $s \geq 1$, так как $k > p \geq n - p$. Кроме того, $s \leq p = \dim([L, L])$. Поэтому $k - s \geq 1$. В подалгебре H содержится $k-s$ линейно независимых элементов из $\{H_{p+1}, \dots, H_n\}$.

Действительно, если

$$[a_1, \dots, a_k] = [a_{i_1}, \dots, a_{i_s}, a_{i_{s+1}}, \dots, a_{i_k}],$$

где+ $[a_{i_1}, \dots, a_{i_s}]$ - базис $\{a_1, \dots, a_k\}$, то в силу линейной зависимости

$$a_{i_j} - \sum_{t=1}^{s} \ell_{j_t} a_{i_t} = 0, \quad j = s + 1, \dots, k.$$

Поэтому все элементы

$$c_j = h_{i_j} - \sum_{t=1}^{s} \ell_{j_t} h_{i_t}$$

принадлежат $\{H_{p+1}, \dots, H_n\} \cap H$ $(j = s + 1, \dots, k)$ и линейно независимы в силу линейной незавнсимости системы $[h_1, \dots, h_k]$.

Элементы c_j $(j = s + 1, \dots, k)$ перестановочны со всеми элементами a_i, $i \leq k$ /т.к. $0 = [c_j, h_i] = [c_j, a_i]$/, и, следовательно, со всеми их компонентами в $\{H_1, \dots, H_p\}$ /см.

/1//. Поэтому есть такое число $s' \geq s$, что все элементы c_j перестановочны с s' элементами из множества $[H_1, \ldots, H_p]$ $/s' < p$, $k - s < \pi$, где π - ранг PR-матрицы, так как $Z(L) = 0$; см. /1//. Уже видно, что в случае $a)$ мы приходим к противоречию, так как для него получаем $Z(L) \neq 0$. Для остальных случаев можно дополнить множество $[c_j]_{j=s+1}^{k}$ до базиса в $\{H_{p+1}, \ldots, H_n\}$. Отсюда вытекает, что с помощью столбцовых преобразований и перестановок строк PR -матрица алгебры L приводит к виду:

$$p\left\{\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\quad 0 \quad}^{k-s} & \\ \hline & \end{array}\right)}_{\pi}\right. \left.\vphantom{\overbrace{0}^{k}}\right\}s'$$

Ранг PR-матрицы, равный π, очевидно, не должен измениться. Однако легко видеть, что ранг такой матрицы не больше числа $(p - s') + (\pi - k + s) = (p - k) + (s - s') + \pi < \pi$, так как $s - s' \leq 0$, $p - k < 0$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, в случае $Z(L) = 0$ теорема справедлива.

3. Случай $Z(L) \neq 0$

Пусть π - ранг ненулевой подматрицы PR-матрицы алгебры L, H - абелева подалгебра L, $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$,

$$h_i = d_i + e_i, \quad d_i \in \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_{p+\pi}\},$$

$$e_i \in \{H_{p+\pi+1}, \ldots, H_n\} = Z(L), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Следовательно, $H' = \{d_1, \ldots, d_k\}$ - абелева подалгебра PR - алгебры без центра $\{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_{p+\pi}\}$ и ее размерность не превосходит $p = \dim([L, L])$ /это вытекает из утверждения пункта 2/. Так как $\dim H \leq \dim(H') + \dim(Z(L))$, то $\dim H \leq \dim([L, L]) + \dim(Z(L))$.

Теорема доказана.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, Г.И.Колерову и А.В.Матвеенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. "Мир", М., 1976.*
2. *Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.*
3. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9384, Дубна, 1975.*
4. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.*
5. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-10535, Дубна, 1977.*
6. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11415, Дубна, 1978.*
7. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11595, Дубна, 1978.*
8. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11708, Дубна, 1978.*
9. *Лебеденко В.М.ОИЯИ, Р5-11998, Дубна, 1978.*

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1979 года.