объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5 - 12227

К.П.Кирчев, Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ РЕШЕНИЙ ДВУХ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

1979

P5 - 12227

К.П.Кирчев, Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ РЕШЕНИЙ ДВУХ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Направлено в "Сибирский математический журнал".

Кирчев К.П., Христов Е.Х. P5 - 12227

О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных задач Штурма-Лиувилля

Методом контурного интегрирования получены формулы разложений функции $\tilde{f}$ $(f(x) \in L_2(0,\pi),\ a \in \mathbf{C})$ по произведениям решений двух самосопряженных задач

$$y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0, \quad (0 \le x \le \pi),$$
$$y'(0) - h_j y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0, \qquad (1)$$

с $q_j(x) \in L_1(0,\pi)$, $h_j, H_j < \infty$, $(j = 1,2)$, что позволяет элементарно доказать основные теоремы единственности в обратной задаче для регулярного оператора Штурма-Лиувилля, а также предложить метод обращения в теории возмущения спектральных данных задач (1).

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Kirchev K.P., Khristov E.Kh. P5 - 12227

On Expansions Associated with Products of Solutions of Two Regular Sturm-Liouville Problems

Using the contour integration method we obtain an expansion formulae for function $\tilde{f} = (f(x) \in L_2(0,\pi),\ a \in \mathbf{C})$ over products of solutions of two selfadjont problems

$$y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0, \quad (0 \le x \le \pi),$$
$$y'(0) - h_j y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0 \qquad (1)$$

with $q_j(x) \in L_1(0,\pi)$, $h_j, H_j < \infty$, $(j = 1,2)$. As examples of applications we give an elementary proofs of two major theorems of uniqueness in inverse problem for regular Sturm-Liouville operator and suggest inversion method in perturbation theory for spectral data of problems (1).

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

§1. Рассмотрим две самосопряженные задачи Штурма-Лиувилля, порождаемые дифференциальными уравнениями

$$y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0, \ (0 \le x \le \pi), \ j = 1,2, \ ('= d/dx) \qquad (1.1)$$

и граничными условиями

$$y'(0) - h_j y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0, \qquad (1.2)$$

где здесь и всюду в дальнейшем вещественные функции $q_j(x) \in L_1(0,\pi)$, а числа $h_j, H_j < \infty$. Обозначим через $\phi_j(x,\lambda)$ и $\psi_j(x,\lambda)$ решения уравнений (1.1), для которых

$$\phi_j(0,\lambda) = 1, \ \phi_j'(0,\lambda) = h_j, \ \psi_j(\pi,\lambda) = 1, \ \psi_j'(\pi,\lambda) = -H_j. \qquad (1.3)$$

Тогда спектр $\sigma_j = \sigma\{q_j(x), h_j, H_j\}$ задач (1.1), (1.2) определяется как множество нулей $\lambda_n^{(j)}$, $n = 0,1,\ldots$ их характеристических функций

$$\omega_j(\lambda) = \phi_j'(\pi,\lambda) + H_j \phi_j(\pi,\lambda) = h_j \psi_j(0,\lambda) - \psi_j'(0,\lambda). \qquad (1.4)$$

Положим для краткости обозначение

$$\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j} \quad (n = 0,1,\ldots,\ j = 1,2) \qquad (1.5)$$

и по спектрам σ_j построим множества

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad \sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2, \quad \sigma' = \sigma \setminus \sigma''.$$

Так как при $n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\lambda_{2n+j} = n^2 + a_j + o(1), \quad a_j = \frac{2}{\pi}\left(h_j + H_j + \frac{1}{2}\int_0^\pi q_j(x)dx\right), \qquad (1.6)$$

будем считать, не ограничивая общности, что если $\sigma'' = \emptyset$, то из $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2m+2}$ следует $n = m$.

Пусть $\mathfrak{H}_1 = L_2(0,\pi) \oplus \mathbf{C}$ – гильбертово пространство с элементами $\tilde{f} = (f(x),\alpha)$ и скалярным произведением $(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)_1 = \int_0^\pi f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx + \alpha_1\bar{\alpha}_2$. Введем в $\mathfrak{H}_1$ функции

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = (\Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2}, \Phi(\pi,\lambda) - 1),\quad \tilde{\Psi}(\lambda) = (2\Psi'(x,\lambda), -1), \tag{1.7}$$

где $\Phi(x,\lambda) = \phi_1(x,\lambda)\phi_2(x,\lambda)$, $\Psi(x,\lambda) = \psi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)$. Отсюда, обозначив $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)$, определим в $\mathfrak{H}_1$ систему $\{\tilde{U}_n\}_{n=1}^\infty$ следующим образом: при $\lambda_n \in \sigma'$ положим

$$\tilde{U}_n = (U_n(x), U_n^{(0)}) = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_n)\tilde{\Phi}(\lambda_n),\quad (\cdot = \partial/\partial\lambda), \tag{1.8}$$

а при $\lambda = \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} \in \sigma''$

$$\tilde{U}_{2n+1} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\dot{\tilde{\Phi}}(\lambda),\ \tilde{U}_{2n+2} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}(\lambda). \tag{1.9}$$

Отметим, что так как в силу самосопряженности задач (1.1), (1.2) нули λ_{2n+j} $(n=0,1,\dots)$ функции ω_j простые, т.е. $\dot{\omega}_j(\lambda_{2n+j}) \neq 0$, то в (1.8) $\dot{\Omega}(\lambda_n) \neq 0$, а в (1.9) $\ddot{\Omega}(\lambda_{2n+j}) \neq 0$. С помощью вытекающего из (1.1) и (1.4) тождества

$$(\tilde{\Phi}(\lambda), \tilde{\Psi}(\mu))_1 = (\lambda-\mu)^{-1}(\Omega(\lambda) - (\Omega(\mu)),\quad (\lambda,\mu \in \boldsymbol{R}) \tag{1.10}$$

нетрудно получить, что биортогонально сопряженной к системе $\{\tilde{U}_n\}_{n=1}^\infty$ является система

$$\tilde{V}_n = (V_n(x), V_n^{(0)}) = \tilde{\Psi}(\lambda_n),\quad (\lambda_n \in \sigma', \lambda_{2n+2} \in \sigma''), \tag{1.11}$$

$$\tilde{V}_{2n+1} = \dot{\tilde{\Psi}}(\lambda) - \dddot{\Omega}(\lambda)(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1}\tilde{\Psi}(\lambda),\quad (\lambda = \lambda_{2n+1} \in \sigma''). \tag{1.12}$$

Каждой функции $\tilde{f} \in \mathfrak{H}_1$ поставим в соответствие частичную сумму биортогонального ряда

$$S_N(\tilde{f}) = \sum_{n=1}^{2N} \tilde{V}_n(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1, \tag{1.13}$$

где $(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1 = \int_0^\pi f(x)U_n(x)dx + \alpha U_n^{(0)}$, $(n = 1,2,\dots)$ – коэффициенты разложения $\tilde{f}$ по системе $\{\tilde{U}_n\}_{n=1}^\infty$. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. Для любой функции $\tilde{f} = (f(x),\alpha) \in \mathfrak{H}_1$ суммы $S_N(\tilde{f})$ (1.13) сходятся по норме $\mathfrak{H}_1$ и $\tilde{f}$, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \| f(x) - \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1 \|_{L_2(0,\pi)} = 0 \tag{1.14}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} | \alpha - \sum_{n=1}^{2N} V_n^{(0)}(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1 | = 0. \tag{1.15}$$

К этой теореме примыкает

Теорема 2. Для любой функции $f(x) \in L_1(0,\pi)$ и число $\alpha \in \mathbf{C}$ равномерно по $x \in [0,\pi]$

$$-\int_x^\pi f(y)\,dy - 2\alpha = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} W_n(x)(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1, \tag{1.16}$$

где коэффициенты $(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1$ определяются как в (1.13),

$$W_n(x) = 2\Psi(x,\lambda_n),\quad (\lambda_n \in \sigma', \lambda_{2n+2} \in \sigma''), \tag{1.17}$$

$$W_{2n+1}(x) = 2\dot{\Psi}(x,\lambda) - 2\dddot{\Omega}(\lambda)(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1}\Psi(x,\lambda),\quad (\lambda = \lambda_{2n+1} \in \sigma''). \tag{1.18}$$

Заметим, что, полагая в (1.16) $x = \pi$, имеем (1.15), а равенство (1.14) формально получается, ввиду $V_n(x) = W_n'(x)$, почленным дифференцированием по x равенства (1.16).

Доказательство этих теорем, которое изложено в §2, получим методом контурного интегрирования сходными [1,2] построениями. Здесь следует особо отметить работу Барселона [1], где формула обращения для разложения по произведениям решений задач (1.1), (1.2) для случая $q_1(x) \equiv q_2(x)$, $h_1 = h_2 = \infty$, $H_1 = 0$, $H_2 = \infty$ (если в (1.2) $h_j(H_j) = \infty$ соответствующее граничное условие заменяется на $y_j(0) = 0$ $(y_j(\pi) = 0)$) была получена посредством построения спектрального разложения следующей несамосопряженной задачи

$$-Y''' + 4q(x)Y' + 2q'(x)Y = 4\lambda Y', \quad Y(0) = Y'(0) = Y'(\pi) = 0.$$

В §3 приведено несколько примеров применения теорем 1 и 2.

Необходимые для этой работы сведения о краевой задаче (1.1), (1.2), которыми в дальнейшем пользуемся без ссылки, имеются в книге Титчмарша /3/. Ниже сохраняются все введенные здесь обозначения.

§2. Доказательство теоремы 2. Построим с помощью решений $\phi_j(x) = \phi_j(x,\lambda)$ и $\psi_j(x) = \psi_j(x,\lambda)$ уравнений (1.1) функций

$$G(x,y,\lambda) = \frac{2}{\Omega(\lambda)} \begin{cases} \psi_1(x)\psi_2(x)\phi_1(y)\phi_2(y), & (0 \le y \le x) \\ \phi_1(x)\psi_2(x)\phi_2(y)\psi_1(y) + \phi_2(x)\psi_1(x)\phi_1(y)\psi_2(y) \\ -\phi_1(x)\phi_2(x)\psi_1(y)\psi_2(y), & (x \le y \le \pi), \end{cases}$$

$$R(x,y,\lambda) = G(x,y,\lambda) - \frac{1}{2}G(x,0,\lambda), \quad S(x,\lambda) = R(x,\pi,\lambda) - R(x,0,\lambda).$$

Функции G,R и S при любых $x, y \in [0,\pi]$ являются целыми функциями от λ, за исключением точек $\lambda_n \in \sigma$, в которых полюса – не более второго порядка. Пусть $\lambda = k^2$ и $\tilde{c}_N$ – окружность в k-плоскости с радиусом $N - ½$, а c_N – ее образ в λ-плоскости. Рассмотрим с $f(x) \in L_1(0,\pi)$ и $\alpha \in \mathbf{C}$ контурный интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} \{ \int_0^\pi R(x,y,\lambda) f(y)\,dy + \alpha S(x,\lambda)\} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{c}_N} \{ \int_0^\pi R(x,y,k^2) f(y)\,dy + \alpha S(x,k^2)\} k\,dk =$$

$$= I_{N,1}(x) + \alpha I_{N,2}(x),$$

где окружности c_N и $\tilde{c}_N$ обходятся один раз против часовой стрелки. По теореме о вычетах, в силу равенств

$$\psi_j(x,\lambda_{2n+j}) = C_{2n+j}\phi_j(x,\lambda_{2n+j}), \quad (n = 0,1,\dots; j = 1,2),$$

где $C_{2n+j} = \psi_j(0,\lambda_{2n+j}) = \phi_j^{-1}(\pi,\lambda_{2n+j})$, находим, что при любом $x \in [0,\pi]$

$$I_N(x) = \sum_{n=1}^{2N} W_n(x)(\tilde{f},\tilde{U}_n)_1. \qquad (2.1)$$

Здесь мы учли, что вследствие (1.6) при больших N $\sigma \cap c_N = \emptyset$ и внутри c_N имеются ровно $2N$ нулей (с учетом их кратностей) функции $\Omega(\lambda)$. Подсчитаем теперь $I_N(x)$ непосредственно по контуру $\tilde{c}_N$ при $N \to \infty$. Пусть

$$\Gamma(x,y,k^2) = -\frac{\cos^2 k(\pi-x)}{k^2\sin^2 k\pi} + \frac{2}{k^2\sin^2 k\pi} \begin{cases} \cos^2 k(\pi-x)\cos^2 ky, & (0 \le y \le x), \\ 2\cos kx \cos k(\pi-x)\cos ky \cos k(\pi-y), \\ -\cos^2 kx\cos^2 k(\pi-y), & (x \le y \le \pi). \end{cases}$$

Отметим, что функция Γ получается из функции R при $q_j(x) \equiv 0$, $h_j = H_j = 0$, $j = 1,2$. Так как равномерно по $0 \le x \le \pi$ при $|k| \to \infty$, $k = \sigma + i\tau$,

$$\phi_j(x) = \cos kx + O\left(\frac{e^{|\tau| x}}{k}\right),$$
$$\psi_j(x) = \cos k(\pi-x) + O\left(\frac{e^{|\tau|(\pi-x)}}{k}\right), \qquad (2.2)$$

причем, если $k \in \tilde{c}_N$

$$\omega_j^{-1}(k^2) = (-k\sin k\pi)^{-1}(1 + O(k^{-1})), \qquad (2.3)$$

то равномерно по $0 \le x,\ y \le \pi$ при $|k| \to \infty$ и $k \in \tilde{c}_N$ справедлива асимптотика

$$R(x,y,k^2) = \Gamma(x,y,k^2) + O(k^{-3}), \quad S(x,k^2) = -2k^{-2} + O(k^{-3}).$$

Отсюда получаем, как обычно (см., например,[3 Гл.1;4,Гл.12]), что равномерно по $x \in [0,\pi]$

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{c}_N} \left\{ \int_0^\pi \Gamma(x,y,k^2)\, f(y)\,dy - \frac{2a}{k^2} \right\} k\,dk =$$

$$= -\int_x^\pi f(x)\,dy - 2a.$$

Теорема доказана.

Доказательству теоремы 1 предпошлем две вспомогательные леммы, имеющие и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 1 (о равносходимости). Для любой функции $f(x) \in L_1(0,\pi)$ равномерно по $x \in [0,\pi]$

$$\lim_{N\to\infty} \left| \sigma_N(f;x) - \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f,U_n) \right| = 0. \tag{2.4}$$

Здесь

$$(f,U_n) = \int_0^\pi f(x) U_n(x)\,dx, \quad \sigma_N(f;x) = \sum_{n=0}^{2N-2} v_n(x)(f,u_n),$$

где

$$u_0(x) = 1,\ u_{2n-1}(x) = \cos 2nx,\ u_{2n}(x) = x \sin 2nx,\ (n=1,2,\dots), \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &v_0(x) = 2\pi^{-2}(\pi - x),\quad v_{2n-1}(x) = 4\pi^{-2}(\pi - x)\cos 2nx, \\ &v_{2n}(x) = 4\pi^{-2} \sin 2nx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Доказательство получим с помощью контурного интеграла

$$I'_{N,1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} \left\{ \int_0^\pi R'_x(x,y,\lambda) f(y)\,dy \right\} d\lambda.$$

Так как по теореме о вычетах $I'_{N,1}(x) = \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f,U_n)$, а

$$J_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} \left\{ \int_0^\pi \Gamma'_x(x,y,\lambda) f(y)\,dy \right\} d\lambda = \sigma_N(f;x),$$

то остается доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\le x\le\pi} \left| J_N(x) - I'_{N,1}(x) \right| = 0. \tag{2.7}$$

Для этого достаточно отметить, что при $|k| \to \infty$, $k \in \tilde{c}_N$ и $0 \le y \le x$ справедлива оценка

$$R'_x(x,y,k^2) = \Gamma'_x(x,y,k^2) + O(k^{-2} e^{2|\tau|(y-x)}), \tag{2.8}$$

а при $x \le y \le \pi$

$$\begin{aligned} R'_x(x,y,k^2) = \Gamma'_x(x,y,k^2) + O(k^{-2} e^{2|\tau|(x-y)} + \\ + k^{-2} e^{2|\tau|(|\pi - 2x| - \pi)}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Отсюда равенство (2.7) следует стандартным образом [4, Гл. 12]. Оценка (2.8) легко вытекает из (2.2), (2.3) и

$$\phi'_j(x) = -k \sin kx + O(e^{|\tau| x}),\ \psi'_j(x) = k \sin k(\pi - x) + O(e^{|\tau|(\pi - x)}). \tag{2.10}$$

Для того чтобы получить (2,9), необходимо дополнительно учесть, что наряду с (2.2), (2.3) и (2.10) имеют место асимптотики

$$\phi_j(x) = \cos kx + k^{-1} A_j(x,k) + O(k^{-2} e^{|\tau| x}),$$

$$\phi'_j(x) = -k \sin kx + k^{-1} A'_j(x,k) + O(k^{-1} e^{|\tau| x}),$$

где

$$A_j(x,k) = h_j \sin kx + \int_0^x q_j(y) \sin k(x-y) \cos ky\,dy$$

и аналогичные для $\psi_j(x)$ и $\psi'_j(x)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующую несамосопряженную краевую задачу

$$y'' + 4\lambda y = 0,\ (0 \le x \le \pi),\ y(\pi) = 0,\ y'(0) = y'(\pi). \tag{2.11}$$

Функция $\Gamma'_x(x,y,\lambda)$ определяет функцию Грина этой задачи; ее собственные числа $\mu_n = k_n^2 (=4\lambda_n)$, где $k_0 = 0$, $k_{2n-1} = k_{2n} = 2n$, $(n = 1,2,\dots)$, причем каждому μ_n при $n \geq 1$ отвечает одна собственная функция $v_{2n}(x)$ (2.6) и одна присоединенная $v_{2n-1}(x)$. Ясно также, что система $u_n(x)$ (2.5) является биортогонально сопряженной к $v_n(x)$ и дает систему собственных $u_0(x)$, $u_{2n-1}(x)$, $(n = 1,2,\dots)$ и присоединенных функций $u_{2n}(x)$, сопряженной к (2.11) краевой задачи $y'' + 4\lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = y(\pi)$.

Хорошо известно, что любая система собственных и присоединенных функций задачи (2.11) является полной в пространстве $L_1(0,\pi)$. Важным для наших целей свойством указанной системы (2.6) является ее базисность в пространстве $L_2(0,\pi)$, т.е. для любой $f(x) \in L_2(0,\pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \|f(x) - \sum_{n=0}^{N} v_n(x)(f,u_n)\|_{L_2(0,\pi)} = 0. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) вытекает из полученного В.А.Ильиным [5] необходимого и достаточного условия базисности в L_2 заданной полной и минимальной системы собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора; это условие является легко проверяемым для (2.5) и (2.6) неравенством

$$\|v_n\|_{L_2} \|u_n\|_{L_2} \leq \text{const}, \quad (n = 0,1,\dots).$$

Из (2.4) и (2.12) получаем

Лемму 2. Для любой функции $f(x) \in L_2(0,\pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \|f(x) - \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f,U_n)\|_{L_2(0,\pi)} = 0. \tag{2.13}$$

Замечание. Исходя непосредственно из конкретного вида $\Gamma'_x(x,y,k^2)$, с помощью аналогичных оценок, приведенных в [3, гл. 1], можно показать, что если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $x \in (0,\pi)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f,U_n) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

Доказательство теоремы 1. Из (2.1) следует, что

$$I'_{N,2}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} S'_x(x,\lambda)\,d\lambda = \sum_{n=1}^{2N} V_n(x) U_n^{(0)}. \tag{2.14}$$

С другой стороны, из (2.8) и (2.9) получаем, что при $|k| \to \infty$, $k \in \tilde{c}_N$

$$S'_x(x,k^2) = O(k^{-2}[e^{-2|\tau|x} + e^{-2|\tau|(\pi-x)} + e^{-2|\tau|(\pi-|\pi-2x|)}]).$$

Отсюда в силу леммы Жордана имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{c}_N} S'_x(x,k^2) k\,dk = 0$$

равномерно по x в любом интервале $\Delta \in (0,\pi)$, причем

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leq x\leq\pi} |I'_{N,2}(x)| \leq \text{const}.$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=1}^{2N} V_n(x) U_n^{(0)}\|_{L_2(0,\pi)} = 0,$$

что вместе с (2.12) и (2.13) дает равенство (1.14). Равенство (1.15) получаем, как уже отмечалось, полагая в (1.16), $x = \pi$. Теорема доказана.

Замечание. Определим в пространстве $\mathcal{H}_1$ систему ортогональных проекторов P_n равенствами

$$P_n \tilde{f} = \tilde{f}_n = \tilde{V}_{2n-1}(\tilde{f}, \tilde{U}_{2n-1})_1 + \tilde{V}_{2n}(\tilde{f}, \tilde{U}_{2n})_1, \quad (n = 1,2,\dots).$$

Тогда очевидно теорема 1 утверждает, что последовательность двумерных подпространств $\mathcal{H}_1^{(n)} = P_n(\mathcal{H}_1)$, $(n = 1,2,\dots)$ является базисом в $\mathcal{H}_1$, т.е. любая функция $\tilde{f} \in \mathcal{H}_1$ разлагается единственным образом в ряд вида $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n$, где $\tilde{f}_n \in \mathcal{H}_1^{(n)}$. Из полученных ниже равенств (3.9)-(3.11) видно сразу, что ввиду известной асимптотики $\beta_n = 2/\pi + o(n^{-1})$ сама система $\{\tilde{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом в $\mathcal{H}_1$.

Если в краевых задачах (1.1), (1.2) поменять местами h_j и H_j и заменить x на $\pi - x$, то теоремы 1 и 2 допускают следующую, иногда более удобную в приложениях, форму записи.

Теорема 3. Пусть

$$\tilde{\Phi}^+(\lambda) = (-2\Phi'(x,\lambda), -1), \quad \tilde{\Psi}^+(\lambda) = (\Psi(x,\lambda) - \tfrac{1}{2}, \Psi(0,\lambda) - 1)$$

и пусть системы

$$\{\tilde{U}_n^+\}_{n=1}^{\infty} \text{ и } \{\tilde{V}_n^+\}_{n=1}^{\infty} \quad ((\tilde{U}_n^+, \tilde{V}_m^+)_1 = \delta_{n,m})$$

построены соответственно заменой в (1.8), (1.9) $\tilde{\Phi}$ на $\tilde{\Psi}^+$ и в (1.11), (1.12) $\tilde{\Psi}$ на $\tilde{\Phi}^+$, а система $\{W_n^+(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заменой в (1.17), (1.18) $\Psi(x,\lambda)$ на $-\Phi(x,\lambda)$. Тогда для любой функции $f(x) \in L_1(0,\pi)$ и $\alpha \in \mathbf{C}$ равномерно по $x \in [0,\pi]$

$$\int_0^x f(y)\,dy + 2\alpha = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} W_n^+(x)(\tilde{f}, \tilde{U}_n^+)_1,$$

причем, если $\tilde{f} = (f(x), \alpha) \in \mathfrak{H}_1$, то

$$\lim_{N\to\infty} \|\tilde{f} - \sum_{n=1}^{2N} \tilde{V}_n (\tilde{f}, \tilde{U}_n)_1\|_{\mathfrak{H}_1} = 0.$$

Следуя указанной выше схеме построения формул обращения, легко рассмотреть и случаи, когда в (1.2) некоторое $h_j (H_j) = \infty$. Так, например, имеет место

Теорема 4. Пусть в (1.2) $H_1 = H_2 = \infty$ и $\theta_j(x,\lambda)$ удовлетворяет (1.1) и условиям $\theta_j(\pi,\lambda) = 0$, $\theta_j'(\pi,\lambda) = 1$. Тогда: а) система $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая как раньше из (1.8), (1.9) с $\Omega(\lambda) = \Phi(\pi,\lambda)$, биортогонально сопряжена в пространстве $L_2(0,\pi)$ к системе $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, получаемой заменой в функциях $V_x(x)$ из (1.11), (1.12) $\Psi(x,\lambda)$ на $\theta_1(x,\lambda)\theta_2(x,\lambda)$, и б) для любой $f(x) \in L_2(0,\pi)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} \|f(x) - \sum_{n=1}^{2N} T_n(x)(f, U_n)\|_{L_2(0,\pi)} = 0.$$

При $H_1 \neq \infty$, $H_2 = \infty$ утверждения а) и б) остаются в силе с $\Omega(\lambda) = (\phi_1'(\pi,\lambda) + H_1\phi_1(\pi,\lambda)) \cdot \phi_2(\pi,\lambda)$ и $\psi_2(x,\lambda) = \theta_2(x,\lambda)$.

§3. В связи с изучением обратной задачи первые теоремы о полноте в пространстве $L_1(0,\pi)$ произведений решений двух регулярных задач Штурма-Лиувилля были получены Г.Боргом /6/. Б.М.Левитаном /7/ было предложено, на основе теории операторов обобщенного сдвига, простое доказательство ряда из этих теорем. Непосредственно из теоремы 2 вытекает

Лемма 3. Система $\{\tilde{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в пространстве $L_1(0,\pi) \oplus \mathbf{C}$, т.е. если

$$\int_0^{\pi} f(x) U_n(x)\,dx + \alpha U_n^{(0)} = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

то $\alpha = 0$ и почти всюду $f(x) = 0$.

Следствие 1. Если $f(x) \in L_1(0,\pi)$; $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ и

$$\int_0^{\pi} f(x)\Phi(x,\lambda_n)\,dx + \alpha\Phi(\pi,\lambda_n) + \beta = 0, \quad (\lambda_n \in \sigma), \tag{3.2}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\dot{\Phi}(x,\lambda_n)\,dx + \alpha\dot{\Phi}(\pi,\lambda_n) = 0, \quad (\lambda_n \in \sigma''), \tag{3.3}$$

то $\alpha = \beta = 0$ и почти всюду $f(x) = 0$.

Доказательство. Устремляя в (3.2) $\lambda_n \to \infty$, получаем, в силу (1.6), (2.2) и леммы Римана-Лебега, что $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \alpha + \beta = 0$. Следовательно, (3.2) можно записать в виде (3.1), что вместе с (3.3) и леммой 3 дает $f(x) \equiv 0$ и $\alpha = 0$, а отсюда, вследствие (3.2), и $\beta = 0$.

Следствие 2. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_2$ с элементами $\hat{f} = (f(x) \in L_2(0,\pi);\ \alpha \in \mathbf{C},\ \beta \in \mathbf{C})$ и скалярным произведением

$$(\hat{f}_1, \hat{f}_2)_2 = \int_0^{\pi} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx + \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \beta_1\bar{\beta}_2. \tag{3.4}$$

Система

$$\hat{U}_n = (\hat{U}_n(x), \hat{U}_n^{(0)}, \hat{U}_n^{(1)}), \quad (n = 1,2,\ldots), \tag{3.5}$$

полученная заменой в (1.8), (1.9) $\tilde{\Phi}(\lambda)$ на

$$\hat{\Phi}(\lambda) = (\Phi(x,\lambda), \Phi(\pi,\lambda), 1), \tag{3.6}$$

является полной и минимальной.

Доказательство. Переписав тождество (1.10) в виде

$$(\hat{\Phi}(\lambda), \hat{\Psi}(\mu))_2 = (\lambda - \mu)^{-1}(\Omega(\lambda) - \Omega(\mu)),$$

где $\hat{\Phi}(\lambda)$ определяется (3.6), а $\hat{\Psi}(\lambda) = (2\Psi'(x,\lambda), -1, \Psi(0,\lambda))$, получаем, в силу $(\tilde{U}_n, \tilde{V}_m)_1 = \delta_{n,m}$, что система $\{\hat{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$, построенная заменой в (1.11), (1.12) $\tilde{\Psi}$ на $\hat{\Psi}$, является биортогонально сопряженной в $\mathfrak{H}_2$ к системе $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Это вместе с вытекающей из следствия 1 полноты $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathfrak{H}_2$ завершает доказательство.

Формула обращения для разложений функции $\hat{f} \in \mathfrak{H}_2$ по системе $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ сводится к формулам (1.14), (1.15), так как, если в $\mathfrak{H}_2$ введем подпространство

$$\mathfrak{M} = (\hat{f} \in \mathfrak{H}_2 : \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)dx + \alpha + \beta = 0),$$

то

$$(\hat{f}, \hat{U}_n)_2 \big|_{\hat{f} \in \mathfrak{M}} = (\tilde{f}, \tilde{U}_n)_1, \quad (\tilde{f} = (f(x), \alpha)). \tag{3.7}$$

Изложенные выше утверждения позволяют получить элементарное доказательство двух основных теорем единственности в обратной задаче для регулярного оператора Штурма-Лиувилля. (О методах и истории доказательства этих теорем см., например, гл. IV, в /7/).
Для этого обозначим

$$\beta_{2n+j} = \{\int_0^{\pi} \psi_j^2(x, \lambda_{2n+j})dx\}^{-1}, \quad (n = 0,1,\ldots; j = 1,2)$$

нормы собственных функций задач (1.1), (1.2); так как

$$\beta_{2n+j} = -\phi_j(\pi, \lambda_{2n+j})\dot{\omega}_j^{-1}(\lambda_{2n+j}),$$

то с помощью вытекающего из (1.1), (1.3) тождества

$$\begin{aligned}&\phi_2(\pi,\lambda)\phi_1'(\pi,\lambda) - \phi_2'(\pi,\lambda)\phi_1(\pi,\lambda) = \\ &= h_1 - h_2 + \int_0^{\pi}(q_1(x) - q_2(x))\Phi(x,\lambda)\,dx\end{aligned} \tag{3.8}$$

находим, что для коэффициентов разложения функции

$$\Delta\hat{q} = (q_1(x) - q_2(x), H_1 - H_2, h_1 - h_2)$$

по системе $\{\hat{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (3.5) справедливы представления

$$(\Delta\hat{q}, \hat{U}_{2n+j})_2 = (-1)^{j-1}\beta_{2n+j}, \quad (\lambda_{2n+j} \in \sigma') \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&(\Delta\hat{q}, \hat{U}_{2n+1})_2 = 0, \ (\Delta\hat{q}, \hat{U}_{2n+2})_2 = \beta_{2n+1} - \beta_{2n+2}, \\ &\qquad (\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} \in \sigma'').\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из (3.10) и следствия 1 леммы 3 получаем сразу Теорему единственности Марченко /8/. Если для краевых задач (1.1), (1.2) $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ и $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2}$, $(n = 0,1,\ldots)$, то почти всюду $q_1(x) = q_2(x)$ и $h_1 = h_2$, $H_1 = H_2$.

Отметим, что теорема 2 вследствие равенств (3.9), (3.10) и (3.7) дает, что для любых двух задач вида (1.1), (1.2) с

$$h_1 + H_1 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q_1(x)\,dx = h_2 + H_2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q_2(x)\,dx$$

имеет место тождество

$$\begin{aligned}&\int_x^{\pi}(q_2(y) - q_1(y))\,dy + 2(H_2 - H_1) = \\ &= \sum_{\lambda_n \in \sigma''}(\beta_{2n+1} - \beta_{2n+2})W_{2n+2}(x) + \\ &+ \sum_{\lambda_n \in \sigma'}\sum_{j=1,2}(-1)^{j-1}\beta_{2n+j}W_{2n+j}(x).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично (3.11) доказывается следующая

Т е о р е м а Х о х ш т а д т а [9] (см. также Левитан [10]). Пусть

$$\lambda_{2n+1} \equiv \lambda_n(q_1(x), h_1, H_1) = \lambda_n(q_2(x), h_2, \tilde{H}_2), \ (n = 0,1,\ldots), \quad (3.12)_1$$

$$\lambda_n(q_1(x), h_1, \tilde{H}_1) = \lambda_n(q_2(x), h_2, H_2) \equiv \lambda_{2n+2}, \ (n = N, N+1, \ldots; N \geq 0), \quad (3.12)_2$$

причем $H_2 \neq \tilde{H}_2$. Тогда при любом $x \in [0, \pi]$

$$\int_x^\pi (q_2(y) - q_1(y))dy + \tilde{H}_2 - H_1 = \sum_{n=0}^{N-1} W_{2n+2}(x)[(\tilde{H}_1 - H_1)\Phi(\pi, \lambda_{2n+2})\dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+2}) - \beta_{2n+2}]. \quad (3.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что вследствие (1.6) из $(3.12)_1$, $(3.12)_2$ вытекают равенства:

$$h_1 - h_2 + H_1 - H_2 + \frac{1}{2}\int_0^\pi (q_1(x) - q_2(x))dx = 0, \ H_1 - \tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 - H_2. \quad (3.14)$$

Пусть теперь по краевым задачам (1.1), (1.2) построена система $\{\tilde{U}_n\}_{n=1}^\infty$; из $H_2 \neq \tilde{H}_2$ следует, что $\sigma'' = \emptyset$. Так как условия $(3.12)_1$, $(3.12)_2$ эквивалентны равенствам

$$\phi_1'(\pi, \lambda_{2n+1}) = -H_1 \phi_1(\pi, \lambda_{2n+1}),$$

$$\phi_2'(\pi, \lambda_{2n+1}) = -\tilde{H}_2 \phi_2(\pi, \lambda_{2n+1}), \quad (n = 0,1,\ldots),$$

$$\phi_1'(\pi, \lambda_{2n+1}) = -\tilde{H}_1 \phi_1(\pi, \lambda_{2n+2}), \quad (n = N, \ldots),$$

$$\phi_2'(\pi, \lambda_{2n+1}) = -H_2 \phi_2(\pi, \lambda_{2n+2}), \quad (n = 0,1,\ldots),$$

то из тождества (3.8), с учетом (3.14) и (3.7) получаем

$$(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}_{2n+1})_1 = 0, \ (n = 0,1,\ldots), \ (\Delta\tilde{q}, \tilde{U}_{2n+2})_1 = 0, \ (n = N, N+1, \ldots),$$

где $\Delta\tilde{q} = (q_1(x) - q_2(x), H_1 - \tilde{H}_2)$, при этом если

$$\phi_1'(\pi, \lambda_{2n+2}) \neq -\tilde{H}_1 \phi_1(\pi, \lambda_{2n+2}) \quad (n = 0,1,\ldots, N-1),$$

то

$$(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}_{2n+2})_1 = -\beta_{2n+2} + (\tilde{H}_1 - H_1)\Phi(\pi, \lambda_{2n+2})\dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+2}) \neq 0.$$

Отсюда равенство (3.13) следует непосредственно из теоремы 2. Теорема доказана. Прямым следствием равенств (3.13) и (3.14) является

Т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и Б о р г а [6]. Из равенств $(3.12)_1$ и $(3.12)_2$ с $N = 0$, $(H_2 \neq \tilde{H}_2)$, следует, что почти всюду $q_1(x) = q_2(x)$ и $h_1 = h_2$, $H_1 = \tilde{H}_2$, $\tilde{H}_1 = H_2$.

На основе теоремы 1 можно легко строить методы обращения в теории возмущения спектральных характеристик задачи Штурма–Лиувилля. Здесь проиллюстрируем это на примере однопараметрического по $t \in [0, \infty)$ семейства краевых задач, определяемых уравнением

$$y'' + (\lambda - q(x,t))y = 0, \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (3.15)$$

и граничными условиями

$$y'(0) - h(t)y(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j(t)y(\pi) = 0, \quad j = 1,2, \quad (3.16)$$

где $q(x, t) = q(\cdot, t)$ как вектор-функция от $t \in [0, \infty)$ со значениями в $L_2(0, \pi)$ непрерывно дифференцируема и $h(t), H_j(t) \in C^1[0, \infty)$.

Л е м м а 4. Пусть функции $q(x, t)$, $h(t)$, $H_j(t)$ в (3.15), (3.16) удовлетворяют с некоторыми постоянными a_j, $a_1 \neq a_2$ условиям

$$h(t) + H_j(t) + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x,5)dx = \pi a_j/2, \quad (j = 1,2; 0 \leq t \leq \infty) \quad (3.17)$$

и

$$\{\lambda_{2n+j}(t)\}_{n=0}^\infty = \sigma\{q(x, t), h(t), H_j(t)\}.$$

Тогда при любом $t \geq 0$

$$q_t'(x,t) = \frac{2}{\pi(a_2-a_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \frac{d\lambda_{2n+j}(t)}{dt} V_{2n+j}(x,t), \qquad (3.18)$$

$$H_j(t)-H_j(0) = \frac{2}{\pi(a_2-a_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j (\lambda_{2n+j}(t)-\lambda_{2n+j}(0)), \quad (3.19)$$

$$(j = 1,2),$$

где

$$\frac{d\lambda_{2n+j}(t)}{dt} = (-1)^j (H_2-H_1)(\tilde{q}_t, \tilde{U}_{2n+j}), \quad \tilde{q}_t = (q_t'(x,t), H_t'(=H_{j,t})). \quad (3.20)$$

Здесь функции $\tilde{U}_{2n+j}$ и $V_{2n+j}(x,t)$ определяются по задачам (3.15), (3.16) формулами (1.8) и (1.11).

Доказательство. Так как равенства (3.18), (3.19) являются, в силу (3.20), прямым следствием теоремы 1, то остается доказать (3.20). Для этого удобно рассматривать набор величин $\hat{q} = (q(x), H, h)$, определяющих задачу Штурма-Лиувилля как элемент пространства $\mathcal{H}_2$ (3.4) (здесь $\mathcal{H}_2$ предполагается вещественным), а соответствующие $\hat{q}$-собственные числа $\lambda_n(\hat{q})$ как функционалы из $\mathcal{H}_2$ в $\boldsymbol{R}$. Замечая, что $\partial\psi(x,\lambda)/\partial h = 0$, $\partial\phi(x,\lambda)/\partial H = 0$, находим, дифференцируя по h и H соответственно равенства

$$0 = h\psi(0,\lambda_n(h)) - \psi'(0,\lambda_n(h)) \equiv \omega(\lambda_n(h)),$$

$$0 = \phi'(\pi,\lambda_n(H)) + H\phi(\pi,\lambda_n(H)) \equiv \omega(\lambda_n(H)),$$

что частные производные

$$\partial\lambda_n/\partial h = a_n, \quad \partial\lambda_n/\partial H = a_n\phi^2(\pi,\lambda_n), \qquad (3.21)$$

где

$$a_n^{-1} = \int_0^\pi \phi^2(x,\lambda_n)dx = -\psi^{-1}(0,\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n) = -\phi(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n).$$

Далее напомним, что для любой функции $f(x) \in L_2(0,\pi)$ имеем известную из теории возмущения формулу

$$\frac{d}{dt}\lambda_n(q(x)+tf(x))|_{t=0} = \left(\frac{\delta\lambda_n}{\delta q}, f\right) = a_n \int_0^\pi f(x)\phi^2(x,\lambda_n)dx. \quad (3.22)$$

Объединяя (3.21), (3.22), получаем

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial\hat{q}} \overset{\text{defn.}}{=} \left(\frac{\delta\lambda_n}{\delta q}(x), \frac{\partial\lambda_n}{\partial H}, \frac{\partial\lambda_n}{\partial h}\right) = a_n\hat{\Phi}(\lambda_n),$$

где $\hat{\Phi}(\lambda_n)$ определяется из (3.6) с $\Phi(x,\lambda) = \phi^2(x,\lambda)$. Следовательно, с $\hat{q}_{j,t} = (q_t'(x,t), H_{j,t}'(t), h_t'(t))$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{2n+j}(q(x,t), H_j(t), h(t)) = a_{2n+j}(\hat{q}_{j,t}, \hat{\Phi}(\lambda_{2n+j}))_2,$$

что вместе с (3.17) и вытекающим из $q_1(x) \equiv q_2(x)$, $h_1 = h_2$, $H_1 \neq H_2$ равенством $a_{2n+j} = (-1)^j (H_2-H_1)\dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})$ дает, учитывая (3.7), формулу (3.20). Лемма доказана.

Пусть теперь заданы две перемежающиеся последовательности $\{\lambda_{2n+j}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = 1,2$, для которых последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая равенствами

$$\mu_{2n+1} = \lambda_{2n+1} - n^2 - a_1, \quad \mu_{2n+2} = n[\lambda_{2n+2} - \lambda_{2n+1} - a_2 + a_1], \quad a_1 \neq a_2,$$

такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 < \infty$ (без ограничения общности предполагаем $a_1 < a_2$, тогда $\lambda_{2n+1} < \lambda_{2n+2}$, $(n = 0,1,\ldots)$). Рассмотрим семейство функций

$$\lambda_{2n+j}(t) = \lambda_{2n+j}^{(0)} e^{-t} + \lambda_{2n+j}(1-e^{-t}), \quad (0 \leq t \leq \infty; n=0,1,\ldots; j=1,2), \quad (3.23)$$

где с некоторыми $q_0(x) \in L_2(0,\pi)$, h_0, $H_{j,0}$, для которых

$$h_0 + H_{j,0} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q_0(x)dx = \pi a_j/2, \quad (j = 1,2), \qquad (3.24)$$

последовательности $\{\lambda_{2n+j}^{(0)}\}_{n=0}^{\infty} = \sigma\{q_0(x), h_0, H_{j,0}\}$, $(j = 1,2)$. Отметим, что система функций (3.23) является решением задачи Коши:

$$d\lambda_{2n+j}(t)/dt = \lambda_{2n+j} - \lambda_{2n+j}(t), \quad (0 \leq t < \infty), \quad \lambda_{2n+j}(0) = \lambda_{2n+j}^{(0)}.$$

На основе результатов известных работ Б.М.Левитана и М.Г.Гасимова /11,12/ и с учетом леммы 4 можно получить сходными /13/ рассуждениями следующее

Предложение. Для любых $q_0(x) \in L_2(0,\pi) h_0, H_{j,0}$, удовлетворяющих (3.24), система функции (3.23), определяет однозначно семейство краевых задач (3.15),(3.16), в котором $H_j(t), (j=1,2)$ находятся из (3.19) (с $\lambda_{2n+j}(t)$ из (3.23)), а $q(x,t)$ и $h(t)$ являются решениями системы уравнений

$$q'_t(x,t) = \frac{2e^{-t}}{\pi(a_2-a_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j (\lambda_{2n+j} - \lambda_{2n+j}^{(0)}) V_{2n+j}(x,t), \quad (0 < x < \pi;\ 0 \le t < \infty), \tag{3.25}$$

$$h(t) = \frac{\pi a_j}{2} - H_j(t) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x,t)dx, \quad (0 \le t < \infty); \tag{3.26}$$

при этом существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} ||q(x,t) - q(x)||_{L_2(0,\pi)} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} h(t)(H_j(t)) = h(H_j),$$

для которых заданные последовательности $\{\lambda_{2n+j}\}_{n=0}^{\infty} = \sigma\{q(x), h, H_j\}$, $j = 1,2$.

Замечание. Хорошо известен метод эффективной конструкции регулярного оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам (см. обзор /11/), основанный на классическом в обратных задачах уравнении Гельфанда-Левитана. Предложенная выше система эволюционных уравнений (3.19), (3.25), (3.26) для решения этой же задачи с помощью уравнения для непрерывного аналога метода Ньютона /14/ примыкает к итерационным методам /1/ и для обратной задачи рассеяния подробно изложена в /13/.

Литература

1. Barcilon V. J.Math.Phys., 1974, v.15, No 4, p.429-432.
2. Христов Е.Х. ОИЯИ Р5-11754, Дубна, 1978.
3. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1, М., ИЛ, 1960.

4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ., М., 1958.
5. Ильин В.А. ДАН СССР, 1976, 227, №4, с.796-799.
6. Borg G. Acta Math., 1945, 78, 2, p.1-96.
7. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. "Наука", М., 1973.
8. Марченко В.А. ДАН СССР, 1950, 72, №3, с.457-460.
9. Hochstadt H. Comm.Pure and Appl. Math., 1973, 26, p.715-729.
10. Левитан Б.М. Известия АН СССР, сер.мат., 1978, 42, с.200-211.
11. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. УМН, 1964, №2, с.3-63.
12. Гасымов М.Г. ДАН СССР, 1965, 161, №2, с.274-276.
13. Визнер Я. и др. ЭЧАЯ, 1978, т.9, вып.3, с.710-768.
14. Гаврин М.К. Изв. вузов, сер. мат. 1958, 6, №5, с.18-31.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1979 года.