



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

C133.2a

K-299

23/II-79

P5 - 12142

Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани,

В.Г.Маханьков, А.Б.Швачка

1471/2-79

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ.

2.Линейная теория возмущений

1979

P5 - 12142

Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани,
В.Г.Маханьков, А.Б.Швачка

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ.
2.Линейная теория возмущений



Катышев Ю.В. и др.

P5 - 12142

Динамика системы вихрей. II. Линейная теория возмущения

В линейном приближении теории возмущений исследована устойчивость решений уравнений, описывающих систему вихрей в двумерной идеальной жидкости.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Katyshev Yu.V. et al.

P5 - 12142

The Vortex System Dynamics. II. The Linear Perturbation Theory

In linear approximation of perturbation theory the stability of solving equation describing the vortex system in the two-dimensional ideal liquid is investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В работе^{/1/} рассмотрена следующая система уравнений:

$$\dot{z}_n = i \sum_{m \neq n} \frac{\Gamma_m}{z_m^* - z_n^*}, \quad /1/$$

которая описывает движение вихрей в двумерной несжимаемой и невязкой жидкости^{/2/}. Система /1/ обладает частным решением^{/1/} в виде симметрично расположенных на окружности вихрей одинаковой интенсивности, движущихся с одной и той же угловой скоростью:

$$z_n = \rho e^{i\omega t + i\phi_{n0}}, \quad /2/$$

где $z_n = x_n + iy_n$ задает расположение n -го вихря на плоскости (x, y) ,

$$\phi_{n0} = \frac{2\pi}{N} \cdot n, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$\omega = \frac{\Gamma(N-1)}{2\rho^2}.$$

Здесь Γ - интенсивность вихря и N - число вихрей.

В данной работе мы исследуем устойчивость решения /2/ в линейном приближении теории возмущений.

Возмущенные решения ищем в виде

$$z_n = z_{n0} (1 + f_n), \quad /3/$$

где z_{n0} - решение /2/, f_n - возмущение, причем

$$|f_n| \ll 1.$$

Подставив /3/ в /1/ и ограничиваясь линейным приближением по f_n , имеем:

$$\dot{f}_n + i\omega f_n = -\frac{i}{2\rho^2} A f_n^* + \frac{i}{2\rho^2} B_{nm} f_m^*, \quad /4/$$

где

$$A = \sum_{m \neq n} \frac{\cos \phi_{nm}}{1 - \cos \phi_{nm}},$$

$$B_{nm} = \frac{1}{1 - \cos \phi_{nm}}$$

и

$$\phi_{nm} = \frac{2\pi}{N} (n - m).$$

Решение f_n ищем в виде

$$f_n = u_n e^{i\Omega_1 t} + i v_n e^{i\Omega_2 t} \quad /5/$$

Необходимым условием устойчивости решений /2/ является вещественность значений Ω_1 и Ω_2 .

В переменных u и v уравнение /4/ запишется в виде

$$\{2\rho^2 \Omega_1 + (N-1)\Gamma + A\} u_n = B_{nm} u_m, \quad /6/$$

$$\{2\rho^2 \Omega_2 + (N-1)\Gamma - A\} v_n = -B_{nm} v_n.$$

Из симметрии матрицы B^* сразу следует, что Ω_1 и Ω_2 не могут быть комплексными. Однако, диагонализуя матрицу B^{**} , можно показать, что для системы N вихрей ($N=2 \div 20$) в спектре Ω_2 всегда существует одна нулевая частота; в этом случае для исследования устойчивости

* Собственные значения симметричной действительной матрицы действительны.

** В расчетах использовалась ЭВМ.

системы вихрей требуется дополнительный анализ, выходящий за рамки линейного приближения*.

Известно, что решения для $N=2$ /2/ и $N=3$ /3/ являются устойчивыми. Численный эксперимент на ЭВМ /1/ указывает на относительную устойчивость решений /2/ для систем с $N=2 \div 8$ и на их неустойчивость при $N=9 \div 15$.

Как показано в работе /3/, система /1/ для $N=2$ и $N=3$ является вполне интегрируемой. В недавней работе /4/ с помощью численного эксперимента на ЭВМ показано, что система четырех вихрей стохастизуется. С другой стороны, наличие относительно устойчивых решений /2/ для $N=2 \div 8$ является указанием на близость таких систем к вполне интегрируемым /1/.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Е.Христову за стимулирующие дискуссии. Один из авторов /Н.В.Махалдиани/ благодарит А.А.Расторгуева за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р5-12141, Дубна, 1978.
2. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, М., 1947. Бэстчелор Дж. Введение в динамику жидкости. "Мир", М., 1973.
3. Новиков Е.А. ЖЭТФ, 1975, 68, с.1868.
4. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. ЖЭТФ, 1978, 75, с.867.

Рукопись поступила в издательский отдел 28 декабря 1978 года.

* Легко убедиться в том, что нулевой частоте соответствует, в частности, поворот системы как целого.