

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

C133.2a

M-36

23/IV-79

P5 - 12141

Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков, А.Б.Швачка

1472/2-79

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ.

1. Устойчивые частные решения

1979

P5 - 12141

Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков, А.Б.Швачка

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ.

1. Устойчивые частные решения

Динамика системы вихрей. I. Устойчивые частные решения

Найдены частные решения уравнений, описывающих систему вихрей в двумерной идеальной жидкости. С помощью численного эксперимента на ЭВМ исследована устойчивость этих решений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

The Vortex System Dynamics. I. Stable Particular Solutions

Particular solutions of equations describing the vortex system in the two-dimensional ideal liquid have found. The stability of these equations is investigated by calculations.

The investigations has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Данная работа посвящена изучению системы уравнений

$$\dot{z}_n = i \sum_{m \neq n} \frac{\Gamma_m}{z_n^* - z_m^*}, \quad /1/$$

которая описывает движение точечных вихрей^{/1/} в двумерной, бесконечной несжимаемой идеальной жидкости. В формуле /1/ величина $z_n = x_n + iy_n$ задает положение n -го вихря на плоскости (x, y) , а Γ_m характеризует интенсивность вихря.

Как известно, задача для двух вихрей решается точно^{/1/}. Недавно была полностью решена задача трех вихрей^{/2/}. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли точно решить задачу для четырех, пяти и большего числа вихрей, т.е. не является ли система /1/ вполне интегрируемой^{/3/}.

Устойчивость частных решений системы /1/ в линейном приближении теории возмущений для произвольного числа вихрей, симметрично расположенных на окружности, исследована в работе^{/4/}. Ниже исследуется с помощью численного эксперимента на ЭВМ CDC-6500 вопрос об устойчивости частных решений по отношению к возмущениям, вносимым машинным счетом.

Легко убедиться в том, что функции

$$z_n = \rho e^{i\omega t + i\phi_{n0}}, \quad /2/$$

где

$$\omega = \frac{\Gamma(N-1)}{2\rho^2}$$

и

$$\phi_{n0} = \frac{2\pi}{N} \cdot n, \quad 0 \leq n \leq N,$$

являются частными решениями системы уравнений /1/ при $\Gamma_m = \Gamma$.

Расположив вихри в начальный момент времени симметрично на окружности

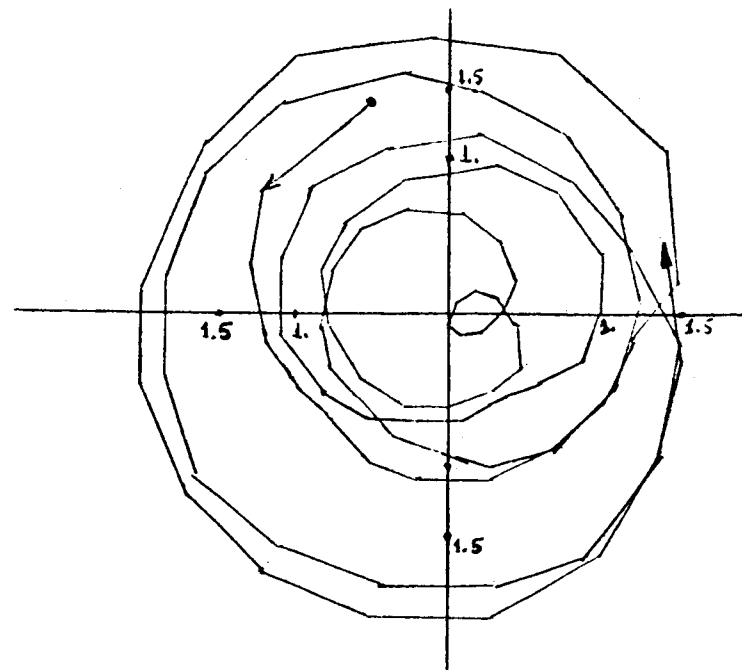
$$z_{n0} = \rho e^{i\phi_{n0}}, \quad /3/$$

мы провели численные эксперименты для систем с числом вихрей от 3 до 15 включительно. Расчет велся по явной симметричной разностной схеме второго порядка точности. Для контроля точности расчетов вычислялись два интеграла движения системы /2/ и исследовалось их сохранение в процессе расчетов.

Как показал численный эксперимент, в случае $N = 3 \div 8$ вихри "дружно" двигаются по окружности: при $N = 3, 4, 5$ вихри совершают около 20 оборотов и при $N = 6, 7, 8$ - около 5 оборотов без существенных отклонений от симметричного расположения. В случае $N = 9$ вихри совершают 3 оборота по окружности и на 4-м сходят с нее. При $N = 10$ вихри сходят с окружности уже в середине третьего витка, а при $N = 11$ - в начале третьего оборота. В случае $N = 12, 13$ отклонение траектории выделенного вихря от окружности наблюдается после первого оборота, а при $N = 14, 15$ - во время первого оборота. На рисунке в качестве примера приведено поведение выделенного вихря для системы с $N = 11$.

Подобное поведение системы вихрей указывает на то, что решения /2/ системы /1/ при $N = 4 \div 8$ являются устойчивыми по отношению к малым возмущениям /либо инкремент неустойчивости достаточно мал/, тогда как решения для $N = 9 \div 15$ являются неустойчивыми. Наличие "устойчивых" частных решений для $N = 4 \div 8$ указывает на близость таких систем к вполне интегрируемым *.

* После завершения данной работы нам стала известна работа^{/5/}, в которой делается вывод о стохастичности системы четырех вихрей. Это, вообще говоря, не противоречит нашим результатам, поскольку основной вопрос в этом случае состоит в определении времени стохастизации.



Траектория выделенного вихря для системы с $N = 11$.

Авторы благодарят В.Е.Захарова за полезные обсуждения. Один из авторов(Н.В.Махалдiani)благодарит Д.В.Ширкова за поддержку и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат. М., 1947.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. "Мир", М., 1973.
3. Новиков Е.А. ЖЭТФ, 1975, 68, с. 1868.
4. Makhankov V.G. Phys.Reports,1978, 35, p.1.
5. Камышев Ю.В. и др. ОИЯИ, Р5-12142, Дубна, 1978.
6. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. ЖЭТФ, 1978, 75, с. 867.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1978 года.