СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 12062

С.И.Сердюкова

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1978

Р5 - 12062

С.И.Сердюкова

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сердюкова С.И.

Р5 - 12062

Построение нормальной формы резольвентной матрицы для гиперболических систем разностных уравнений

Доказана теорема о приведении резольвентной матрицы к нормальному виду. Предполагается, что задача Коши для рассматриваемой системы разностных уравнений устойчива в L_2. В случае гиперболических систем разностных уравнений нормальная форма резольвентной матрицы аналогична нормальной форме характеристической матрицы. Резольвентная матрица приводится к нормальному виду невырожденным аналитическим преобразованием подобия. Соответствующий базис квазисобственных векторов строится исходя из базиса квазисобственных векторов для характеристической матрицы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Serdyukova S.I.

P5 - 12062

Construction of Canonical Form of Resolvent Matrix for Hyperbolic Systems of Difference Equations

The theorem of reduction of resolvent matrix to canonical form is proved. It is assumed that Cauchy's problem is stable in L_2. In the case of hyperbolic systems the canonical form of resolvent matrix is analogue to the canonical form of characteristic matrix. The resolvent matrix is reduced to canonical form by means of nonsingular analytical similar transformation. The corresponding base of nonanalytical vectors are constructed starting from the base for characteristic matrix.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В предлагаемой работе построена нормальная форма резольвентной матрицы для систем разностных гиперболических уравнений. Предполагается, что соответствующая задача Коши устойчива в L_2. В случае гиперболических систем нормальная форма резольвентной матрицы аналогична нормальной форме характеристической матрицы. Резольвентная матрица приводится к нормальному виду невырожденным аналитическим преобразованием подобия. Соответствующий базис "квазисобственных" аналитических векторов строится исходя из базиса "квазисобственных" векторов для характеристической матрицы.

В диссертации автора /1/ доказано необходимое и достаточное условие устойчивости в L_2 полубесконечных разностных краевых задач для систем разностных гиперболических уравнений

$$\begin{cases} v_\nu^{n+1} = \sum\limits_{-r_1}^{r_2} A_j v_{\nu+j}^n, & n \geq 0, \quad \nu \geq 1, \qquad \text{(Ia)} \\ v_\nu^0 = f_\nu, \quad v_m^n = \sum\limits_{j=1}^{1} C_{jm} v_j^n, & m = 0, -1, \ldots, -r_1+1. \qquad \text{(Iв)} \end{cases}$$

v – векторы размерности k; A_j, C_{jm} – постоянные матрицы, $r_1 \geq 1$,

$$\mathrm{Det}\, A_{-r_1} \neq 0, \qquad \mathrm{Det}\, A_{r_2} \neq 0.$$

Если задача Коши устойчива в L_2, то собственные значения характеристической матрицы

$$D(\varphi) = \sum_{-r_1}^{r_2} A_j \cdot e^{ij\varphi}, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

в окрестности определяющих точек допускают /2/ разложение вида

$$\lambda(\varphi) = \exp\left\{ i\psi_0 + i\gamma(\varphi-\varphi_0) + i\sum_{j=p}^{2\mu} \alpha_j (\varphi-\varphi_0)^j - \beta(\varphi-\varphi_0)^{2\mu} + \ldots \right\}.$$

Здесь ψ_0, γ, α_j – вещественные, $\beta > 0$; j, p, μ – целые. $\lambda_i(\varphi)$, $\lambda_j(\varphi)$ принадлежат одному классу /2/, если $2\mu(i) = 2\mu(j) = 2\mu$ и $\ln \lambda_i(\varphi) - \ln \lambda_j(\varphi) = o\left((\varphi-\varphi_0)^{2\mu}\right)$.

Теорема Крайса-Урма /2/,/3/,/4/. Если задача Коши устойчива в l_2, то в окрестности определяющих точек характеристическая матрица невырожденным аналитическим преобразованием подобия приводится к следующему блочно-треугольному виду. В левом верхнем углу расположен блок, которому отвечают собственные значения, меньшие по модулю единицы в рассматриваемой определяющей точке. Каждому классу собственных значений отвечает треугольный блок, расположенный на диагонали $\tilde{D}(\varphi)$. Остальные места $\tilde{D}(\varphi)$ заполнены нулями.

Обозначим через v полубесконечные последовательности векторов, удовлетворяющие (Iв). Задача (I) может быть записана в операторном виде:

$$v^{n+1} = G v^n, \qquad n \geq 0 .$$

Чтобы исследовать устойчивость, представляем /5/ G^n в виде контурного интеграла от резольвенты:

$$G^n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} (G - zI)^{-1}\cdot z^n \, dz .$$

Построение резольвенты сводится /5/ к факторизации резольвентной матрицы:

$$M(z) = \left\| \begin{matrix} -A_{r_2}^{-1}\cdot A_{r_2-1} & \dots & -A_{r_2}^{-1}(A_0 - zI) & \dots & -A_{r_2}^{-1} & A_{-r_1} \\ I & 0\dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I\dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot & \dots\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0\dots & 0 & \dots & I & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Собственные значения характеристической матрицы $D(w)$ и собственные значения резольвентной матрицы $M(z)$ являются взаимно-обратными алгебраическими функциями /5/. Система (Iа) называется гиперболической, если все $\lambda(\varphi)$ относительно всех определяющих точек имеют наклонные ($\gamma \neq 0$) характеристики. Далее предполагается, что (Iа)-гиперболическая система. Каждому $\lambda(\varphi)$ с наклонной характеристикой отвечает единственное собственное значение резольвентной матрицы

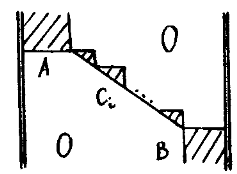
$$x(\psi) = \exp\left\{ i\varphi_0 + i\frac{\psi-\psi_0}{\gamma}\,\Phi(\psi-\psi_0) + \frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}}(\psi-\psi_0)^{2\mu} + \dots \right\} . \qquad (2)$$

Здесь $\Phi(\psi-\psi_0)$ – многочлен степени 2μ с вещественными коэффициентами. Из (2) следует, что $\lambda(\varphi)$ с приходящими характеристиками ($\gamma > 0$) рождают $x(\psi)$, большие по модулю единицы в окрестности ψ_0. На самом деле имеется в виду часть окрестности $z_0 = e^{i\psi_0}$, расположенная вне единичного круга и на его границе, исключая саму точку z_0. Соответственно $\lambda(\varphi)$ с уходящими характеристиками ($\gamma < 0$) рождают $x(\psi)$, меньшие по модулю единицы в окрестности ψ_0. Коэффициенты $\Phi(\psi-\psi_0)$ в (2) зависят от 2μ определяющих коэффициентов разложения соответствующего $\lambda(\varphi)$. Отсюда следует, что классы собственных значений характеристической матрицы переходят в классы собственных значений резольвентной матрицы. Относительно каждой определяющей точки ψ_0 спектр резольвентной матрицы естественным образом разбивается на три непересекающихся подмножества:

$$x(\psi) \subset \mathcal{X}_0(\psi_0), \quad \text{если} \quad |x(\psi_0)| < 1,$$
$$x(\psi) \subset \mathcal{X}_\infty(\psi_0), \quad \text{если} \quad |x(\psi_0)| > 1,$$
$$x(\psi) \subset \mathcal{X}(\psi_0), \quad \text{если} \quad |x(\psi_0)| = 1 .$$

В свою очередь, $\mathcal{X}(\psi_0)$ разбивается на отдельные классы собственных значений $\mathcal{X}_i$. Для резольвентной матрицы справедлив аналог теоремы Крайса –Урма.

<u>Теормема</u>. Для каждой определяющей точки ψ_0 найдется невырожденное аналитическое в окрестности ψ_0 преобразование подобия $T(\psi)$, которое приводит резольвентную матрицу к нормальному виду:

$$T M T^{-1} = \tilde{M} =$$  . (3)

Спектр A совпадает с $\mathcal{X}_0(\psi_0)$, спектр B совпадает с $\mathcal{X}_\infty(\psi_0)$. Классам собственных значений отвечают треугольные блоки C_i. Внедиагональные элементы C_i имеют в ψ_0 нули кратности не ниже чем $2\mu(i)$. Остальные места в $\widetilde{M}$ заполнены нулями.

Доказательство. Согласно теореме Като/6/ в окрестности ψ_0 определены аналитические базисы инвариантных подпространств, отвечающих $\mathcal{X}_0(\psi_0)$ и $\mathcal{X}_\infty(\psi_0)$. Дополним эти базисы векторами, которые в рассматриваемой определяющей точке являются собственными векторами, отвечающими $\mathcal{X}(\psi_0)$. Тогда по непрерывности рассматриваемая система векторов линейно-независима в окрестности ψ_0. В процессе доказательства эта полная система преобразуется в систему "квазисобственных" векторов, составляющих столбцы $T^{-1}(\psi)$. Отправляемся от системы "квазисобственных" векторов для характеристической матрицы. Классу собственных значений резольвентной матрицы

$$\mathcal{X}_i = \{ x_1, \dots, x_\ell \}$$

отвечает класс собственных значений характеристической матрицы

$$\Lambda_i = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \}.$$

Согласно теореме Крайса-Урма в окрестности φ_0 определена система "квазисобственных" векторов:

$$\begin{cases} \mathcal{D} e_1 = \lambda_1 e_1, \\ \mathcal{D} e_2 = \lambda_2 e_2 + (\varphi-\varphi_0)^{2\mu} \alpha_{12}(\varphi) e_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{D} e_\ell = \lambda_\ell e_\ell + (\varphi-\varphi_0)^{2\mu} (\alpha_{1\ell}(\varphi) e_1 + \dots + \alpha_{\ell-1,\ell}(\varphi) e_{\ell-1}). \end{cases}$$

Положим $z = e^{i\psi} = \lambda_1(\varphi)$, $e^{i\varphi} = x_1(\psi)$. Тогда определена $\varphi = \varphi(\psi)$. Рассмотрим систему векторов:

$$E_i = \{ x_1^{r-1} e_i(\varphi(\psi)),\ x_1^{r-2} e_i(\varphi(\psi)), \dots, e_i(\varphi(\psi)) \},\quad i=1,\dots,\ell.$$

Здесь $r = r1 + r2$. Далее для простоты обозначений будем считать, что $\varphi_0 = \psi_0 = 0$. Из предыдущего имеем

$$\sum_{-r1}^{r2} A_j e^{ij\varphi} e_i(\varphi) = \lambda_i(\varphi) e_i(\varphi) + \varphi^{2\mu_i} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}(\varphi) e_j(\varphi) =$$

$$= (\lambda_1(\varphi) + \lambda_i(\varphi) - \lambda_1(\varphi)) e_i(\varphi) + \varphi^{2\mu_i} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}(\varphi) e_j(\varphi) =$$

$$= \lambda_1(\varphi) e_i(\varphi) + \varphi^{2\mu_i} \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}(\varphi) e_j(\varphi).$$

После замены $\lambda_1(\varphi) = z$, $x_1(\psi) = e^{i\varphi}$, получаем

$$\sum_{-r1}^{r2} A_j x_1^j(\psi) e_i(\varphi(\psi)) = z\, e_i(\varphi(\psi)) + \varphi^{2\mu_i}(\psi) \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}(\varphi(\psi)) e_i(\varphi(\psi))$$

и, следовательно,

$$M E_i(\psi) = x_1(\psi) E_i(\psi) + \psi^{2\mu_i} \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij}(\psi) (A_{r2}^{-1} e_j(\varphi(\psi)), 0, \dots, 0)^* =$$

$$= x_i(\psi) E_i(\psi) + \psi^{2\mu_i} \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij}(\psi) \mathcal{X}_j(\psi).$$

Векторы $\mathcal{X}_j(\psi)$ могут быть разложены по полной системе векторов, составленной из базисов, отвечающих $\mathcal{X}_0(\psi_0)$, $\mathcal{X}_\infty(\psi_0)$, и базисов, отвечающих классам $\mathcal{X}_i$. Пусть

$$2\mu = \min_i 2\mu_i.$$

Выберем произвольно одно из собственных значений x_ξ с определяющим порядком разложения 2μ и обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех собственных значений резольвентной матрицы, отличных от x_ξ лишь в старшем определяющем члене разложения

$$\mathcal{S} = \{ x_j :\ x_j - x_\xi = O(\psi^{2\mu}) \}.$$

Остальные классы собственных значений $\mathcal{X}_i$ составляют множество P. Элементы этого множества обозначаются через σ_i:

$$P = \{ \sigma_i :\ \sigma_i - x_\xi = O(\psi^{\kappa}),\quad \kappa < 2\mu \le 2\mu_i \}.$$

Элементы полной системы векторов упорядочиваем следующим образом: базисы векторов, отвечающие

$$\mathcal{X}_0,\ \mathcal{X}_\infty - (e_1, \dots, e_\ell);$$

базисы векторов, отвечающие

$$P - (p_1, \dots, p_m);$$

базисы векторов, отвечающие

$$\mathcal{X}_i \subset \mathcal{S} - (t_1, \dots, t_s).$$

Причем последние базисы упорядочены в порядке убывания $2\mu_i$. Векторы p_i подправляем таким образом, чтобы в разложении $M\tilde{p}_i$ отсутствовали t_ξ, имеем

$$M p_i = \sigma_i p_i + \psi^{2\mu_i} \sum_{\xi=1}^{i} \rho_{i\xi} \chi_\xi ,$$

$$\chi_\xi = \sum_{j=1}^{\ell} a_{\xi j} e_j + \sum_{j=1}^{m} b_{\xi j} p_j + \sum_{j=1}^{s} c_{\xi j} t_j .$$

Положим $\tilde{p}_i = p_i + \sum_{j=1}^{s} X_{ij} t_j$, тогда получаем

$$M\tilde{p}_i = \sigma_i \Big(\tilde{p}_i - \sum_{j=1}^{s} x_{ij} t_j\Big) + \psi^{2\mu_i} \sum_{\xi=1}^{i} \rho_{i\xi} \Big\{ \sum_{j=1}^{\ell} a_{\xi j} e_j +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m} b_{\xi q} \Big(\tilde{p}_q - \sum_{j=1}^{s} x_{qj} t_j\Big) + \sum_{j=1}^{s} c_{\xi j} t_j \Big\} + \sum_{j=1}^{s} x_{ij} M t_j ,$$

$$M t_j = \varkappa_j t_j + \psi^{2\mu_j} \sum_{\xi=1}^{j} \omega_{j\xi} \gamma_\xi ,$$

$$\gamma_\xi = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{\xi j} e_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_{\xi j} p_j + \sum_{j=1}^{s} \theta_{\xi j} t_j .$$

Учитывая последние соотношения, получаем

$$M\tilde{p}_i = \sigma_i \Big(\tilde{p}_i - \sum_{j=1}^{s} x_{ij} t_j\Big) + \psi^{2\mu_i} \sum_{\xi=1}^{i} \rho_{i\xi} \Big\{ \sum_{j=1}^{\ell} a_{\xi j} e_j +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m} b_{\xi q} \Big(\tilde{p}_q - \sum_{j=1}^{s} x_{qj} t_j\Big) + \sum_{j=1}^{s} c_{\xi j} t_j \Big\} + \sum_{j=1}^{s} x_{ij} \varkappa_j t_j +$$

$$+ \sum_{q=1}^{s} x_{iq} \psi^{2\mu_q} \sum_{\xi=1}^{q} \omega_{q\xi} \Big\{ \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{\xi j} e_j + \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{\xi\nu} \Big(\tilde{p}_\nu - \sum_{j=1}^{s} x_{\nu j} t_j\Big) + \sum_{j=1}^{s} \theta_{\xi j} t_j \Big\}.$$

Подберем такие X_{ij} , чтобы в правой части последнего соотношения исключить t_j :

$$(\varkappa_j - \sigma_i) X_{ij} + \psi^{2\mu_i} \sum_{\xi=1}^{i} \rho_{i\xi} \Big(c_{\xi j} - \sum_{q=1}^{m} b_{\xi q} x_{qj}\Big) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{s} x_{iq} \psi^{2\mu_q} \sum_{\xi=1}^{q} \omega_{q\xi} \Big(\theta_{\xi j} - \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{\xi\nu} x_{\nu j}\Big) = 0; \quad i = 1, \dots, m; \quad j - 1, \dots, s. \qquad (4)$$

Так как

$$\varkappa_j - \sigma_i = O(\psi^{\kappa_i}) , \quad \kappa_i < 2\mu \le 2\mu_i ,$$

система (4) имеет решение $X_{ij} = O(\psi)$. Это решение может быть получено, например, методом простых итераций. В подправленном базисе резольвентная матрица имеет такой вид: в правом нижнем углу расположен блок $D(\psi) + \psi^{2\mu} \cdot C(\psi)$ размерности $(s \times s)$, $D(\psi)$ – диагональная матрица, $\mathrm{Sp}\, D = \mathcal{S}$. Последние s столбцов имеют ту же структуру, что и в исходном базисе. В верхнем левом углу стоит квадратная матрица M' размерности $\ell + m$ той же структуры, что и резольвентная матрица в исходном базисе. Аналогично предыдущему в M' может быть выделен блок

$$D'(\psi) + \psi^{2\mu'} C'(\psi) , \quad \mathrm{Sp}\, D'(\psi) = \mathcal{S}' ,$$

и за конечное число шагов резольвентная матрица приводится к блочно-треугольному виду. Каждому скоплению $\mathcal{S}$ на диагонали отвечает блок вида

$$D(\psi) + \psi^{2\mu} \cdot C(\psi) , \qquad \mathrm{Sp}\, D(\psi) = \mathcal{S} .$$

Ниже расположены нулевые блоки. Отличные от нуля элементы имеют в рассcматриваемой определяющей точке нули той же кратности, что и у исходной матрицы. Собственные значения выделенных блоков являются собственными значениями резольвентной матрицы. Так как собственные значения блока

$$D(\psi) + \psi^{2\mu} \circ C(\psi)$$

отличаются от элементов $\mathcal{S}$ на величины порядка 2μ , часть разложения, определяющая $\mathcal{S}$, остается неизменной. Тем самым установлено, что собственные значения выделенных блоков принадлежат соответствующим $\mathcal{S}$.

Выделяем произвольно одно из скоплений $\mathcal{S}$. Ему принадлежат собственные значения σ_ξ с минимальным для данного скопления определяющим порядком разложения 2μ:

$$\sigma_\xi = exp\left\{ i\gamma\psi + i\sum_{j=p}^{2\mu-1}\alpha_j\psi^j + (i\alpha_{2\mu}^\xi - \beta^\xi)\psi^{2\mu} + \ldots \right\}, \quad \beta^\xi > 0.$$

Кроме того, могут быть собственные значения $\varkappa_\xi$ с определяющим порядком разложения $2\mu_\xi > 2\mu$:

$$\varkappa_\xi = exp\left\{ i\gamma\psi + \sum_{j=p}^{2\mu-1}\alpha_j\psi^j + i\sum_{j=2\mu}^{2\mu_\xi}\alpha_j^\xi\psi^j - \beta_\xi\psi^{2\mu_\xi} + \ldots \right\}, \quad \beta_\xi > 0.$$

Векторы базисов упорядочены так, что отвечающий $\mathcal{S}$ блок B имеет такой вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa + \psi^{2\mu+1}C_{11}(\psi) & \psi^{2\mu}C_{12}(\psi) \\ \psi^{2\mu+1}C_{21}(\psi) & \sigma + \psi^{2\mu}C_{22}(\psi) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\varkappa, \sigma$ – диагональные матрицы $Sp\,\varkappa = \{\varkappa_i\}$, $Sp\,\sigma = \{\sigma_i\}$. Пусть $T(\psi)$ приводит матрицу

$$\sigma + \psi^{2\mu}C_{22}(\psi)$$

к треугольному виду. Подействуем соответствующим преобразованием подобия

$$\left\| \begin{matrix} E & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & E \end{matrix} \right\| = \overline{T}$$

на полную резольвентную матрицу. При этом изменятся элементы C_{12}, C_{21}, C_{22} и другие элементы соответствующих строк и столбцов. Однако порядки нулей этих элементов в рассматриваемой определяющей точке не уменьшатся. Итак, блок

$$\sigma + \psi^{2\mu}C_{22}(\psi)$$

приведен к треугольному виду. Покажем, что диагональные элементы отличаются от σ_i на величины порядка $\psi^{2\mu+\delta}$:

$$T(\sigma + \psi^{2\mu}C_{22}(\psi))T^{-1} = \sigma + \psi^{2\mu+\delta}\theta + \psi^{2\mu}N.$$

θ – диагональная матрица, N – нильпотентная верхняя треугольная матрица. В самом деле, положим

$$\sigma = exp\left\{ i\gamma\psi + i\sum_{j=p}^{2\mu-1}\alpha_j\psi^j \right\}.$$

И пусть в результате сделанного преобразования подобия блок B перешел в B^*. Тогда

$$\lim_{\psi\to 0}\frac{B^* - \sigma E}{\psi^{2\mu}} = \begin{pmatrix} \| i\alpha_{2\mu}^\xi\delta_{\xi j}\| & C_{12}(0)\,T^{-1}(0) \\ 0 & \| d_\xi\delta_{\xi j}\| + N_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{\psi\to 0}\frac{\overline{T}B\overline{T}^{-1} - \sigma E}{\psi^{2\mu}} = \lim_{\psi\to 0}\overline{T}(0)T_1(0)\,\frac{B_1 - \sigma E}{\psi^{2\mu}}\,T_1^{-1}(0)\,\overline{T}^{-1}(0) =$$

$$= \overline{T}(0)T_1(0)\begin{pmatrix} \| i\alpha_{2\mu}^\xi\delta_{\xi j}\| & C \\ 0 & \|(i\alpha_{2\mu}^\xi - \beta^\xi)\delta_{\xi j}\| + N_0' \end{pmatrix}T_1^{-1}(0)\,\overline{T}^{-1}(0).$$

Здесь $\delta_{\xi j}$ – символ Кронекера, $T_1(\psi)$ – преобразование подобия, приводящее B к треугольному виду. Следовательно,

$$B_{22}^* = \sigma + N_0\psi^{2\mu} + \psi^{2\mu+\delta}(\theta + N_1) = \sigma + \psi^{2\mu+\delta}\theta + \psi^{2\mu}N,$$

что и требовалось доказать. Через N_0, N_1 обозначены нильпотентные верхние треугольные матрицы, N_0 – постоянная, N_1 – аналитическая. Заметим, что

$$B_{21}^* = \Psi^{2\mu+1} T C_{21}(\Psi), \qquad B_{11}^* = \varkappa + \Psi^{2\mu+1} C_{11}(\Psi).$$

Итак, блок B преобразован к виду

$$\begin{pmatrix} \varkappa + \Psi^{2\mu+1} C_{11}(\Psi) & \Psi^{2\mu} C_{12}(\Psi) T^{-1}(\Psi) \\ \Psi^{2\mu+1} T C_{21}(\Psi) & \sigma + \Psi^{2\mu} N(\Psi) + \Psi^{2\mu+\delta}\theta(\Psi) \end{pmatrix},$$

$Sp\,\varkappa = \{\varkappa_i\}$, $Sp\,\sigma = \{\sigma_i\}$. В построенном базисе $\{\sigma_i\}$ отвечают векторы $\{t_1, \dots, t_s\}$; $\{\varkappa_i\}$ отвечают векторы $\{e_1, \dots, e_\ell\}$. Остальные векторы, отвечающие собственным значениям, не принадлежащим рассматриваемому скоплению S, обозначим через $\{p_1, \dots, p_m\}$. Имеем

$$Me_i = \varkappa_i e_i + \Psi^{2\mu_i}\Big(\sum_{\xi=1}^{s} a_{i\xi} t_\xi + \sum_{\xi=1}^{\ell} b_{i\xi} e_\xi + \sum_{\xi=1}^{m} c_{i\xi} p_\xi\Big), \quad i = 1, \dots, \ell;$$

$$Mt_i = \sigma_i t_i + \Psi^{2\mu}\Big(\sum_{\xi=1}^{i-1} n_{\xi i} t_\xi + \sum_{\xi=1}^{\ell} \alpha_{i\xi} e_\xi + \sum_{\xi=1}^{m} \beta_{i\xi} p_\xi\Big) +$$

$$+ \Psi^{2\mu+\delta}\theta_{ii} t_i, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Положим $\tilde e_i = e_i + \sum_{j=1}^{s} x_{ij} t_j$ и подберем такие x_{ij}, чтобы в разложении $M\tilde e_i$ отсутствовали t_j:

$$M\tilde e_i = \varkappa_i\Big(\tilde e_i - \sum_{j=1}^{s} x_{ij} t_j\Big) + \Psi^{2\mu_i}\Big(\sum_{\xi=1}^{s} a_{i\xi} t_\xi + \sum_{\xi=1}^{\ell} b_{i\xi}\big(\tilde e_\xi - \sum_{q=1}^{s} x_{\xi q} t_q\big) +$$

$$+ \sum_{\xi=1}^{m} c_{i\xi} p_\xi\Big) + \sum_{\xi=1}^{s} x_{i\xi}\Big\{\sigma_\xi t_\xi + \Psi^{2\mu}\Big(\sum_{q=1}^{\xi-1} n_{q\xi} t_q + \sum_{q=1}^{\ell} \alpha_{\xi q}\big(\tilde e_q -$$

$$- \sum_{j=1}^{s} x_{qj} t_j\big) + \sum_{q=1}^{m} c_{\xi q} p_q\Big) + \Psi^{2\mu+\delta}\theta_{\xi\xi} t_\xi\Big\},$$

$$(\sigma_j - \varkappa_i) x_{ij} \Psi^{2\mu}\Big(\sum_{\xi=j+1}^{s} x_{i\xi} n_{j\xi} - \sum_{\xi=1}^{s} x_{i\xi}\sum_{q=1}^{\ell} \alpha_{\xi q} x_{qj}\Big) +$$

$$+ \Psi^{2\mu+\delta} x_{ij}\theta_{jj} + \Psi^{2\mu_i}\Big(a_{ij} - \sum_{\xi=1}^{\ell} b_{i\xi} x_{\xi j}\Big) = 0; \quad i = 1, \dots, \ell; \; j = 1, \dots, s.$$

Пусть

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \varkappa_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \sigma_s - \varkappa_i \end{pmatrix}, \quad X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{is} \end{pmatrix},$$

$$X = (X_1 \dots X_\ell),$$

тогда в матричной записи получаем

$$\sigma_i X_i + \Psi^{2\mu} N X_i + \Psi^{2\mu+\delta}\theta X_i - \Psi^{2\mu} X\alpha X_i + \Psi^{2\mu_i}(A_i - XB_i) = 0.$$

Матрицы α, θ аналогичны матрице X, векторы A_i, B_i аналогичны векторам X_i. Так как N – нильпотентная матрица,

$$\mathrm{Det}\, C_i = \mathrm{Det}\,(\sigma_i \Psi^{-2\mu} + N + \Psi^{\delta}\theta) \neq 0.$$

Система

$$X_i = C_i^{-1} X\alpha X_i - \Psi^{2\mu_i - 2\mu} \cdot C_i^{-1}(A_i - XB_i), \quad i = 1, \dots, \ell,$$

имеет решение

$$X_i = -\Psi^{2\mu_i - 2\mu} C_i^{-1} A_i (1 + o(1)),$$

которое может быть получено, например, методом простых итераций:

$$X_i^{(k+1)} = C_i^{-1} X^{(k)}\alpha X_i^{(k)} - \Psi^{2\mu_i - 2\mu} C_i^{-1}(A_i - X^{(k)} B_i),$$

$$i = 1, \dots \ell, \quad k \geq 0, \quad X_i^{(0)} = 0.$$

Напомним, что $2\mu_i - 2\mu \geq 1$. В результате блок B, отвечающий скоплению $\mathcal{S}$, приводится к виду

$$\left\| \begin{matrix} B' & \Psi^{2\mu}\mathcal{D} \\ 0 & \sigma + \Psi^{2\mu}\cdot N + \Psi^{2\mu+\delta}\cdot\theta \end{matrix} \right\| .$$

Выделен блок, отвечающий $\{\sigma_i\}$. Напомним, что σ_i имеют минимальный в $\mathcal{S}$ определяющий порядок разложения. Блок B, отвечающий $\mathcal{S}\setminus\{\sigma_i\}$, устроен аналогично основному блоку резольвентной матрицы в исходном представлении:

$$M\tilde{e}_i = \varkappa_i\tilde{e}_i + \Psi^{2\mu_i}\Big(\sum_{\xi=1}^{\ell} b_{i\xi}\tilde{e}_\xi + \sum_{\xi=1}^{m} c_{i\xi}p_\xi\Big) + \Psi^{2\mu}\sum_{\xi=1}^{s} x_{i\xi}\Big(\sum_{q=1}^{\ell}\alpha_{\xi q}\tilde{e}_q +$$

$$+\sum_{q=1}^{m} c_{\xi q}p_q\Big) = \varkappa_i\tilde{e}_i + \Psi^{2\mu_i}\Big(\sum_{\xi=1}^{\ell}\tilde{b}_{i\xi}\tilde{e}_\xi + \sum_{\xi=1}^{m}\tilde{c}_{i\xi}p_\xi\Big), \quad i=1,\dots,\ell.$$

За конечное число шагов блок B приводится к блочно-треугольному виду. На диагонали стоят блоки

$$\sigma + \Psi^{2\mu}\cdot N + \Psi^{2\mu+\delta}\cdot C ,$$

отвечающие классам собственных значений, различимых лишь в главных определяющих членах разложения. Эти блоки, а следовательно, и сама резольвентная матрица могут быть приведены к треугольному виду. При этом справедливы соотношения

$$d_{ij}(\Psi) = O(\Psi^{2\mu_j}), \quad i<j. \tag{5}$$

Дополнительно потребуем, чтобы собственные значения на диагонали были упорядочены по классам. Если $\varkappa_i, \varkappa_j$ из разных классов, то $\varkappa_i - \varkappa_j = O(\Psi^\kappa)$, где $\kappa = min(2\mu_i, 2\mu_j)$. Отсюда и из (5) следует, что серией элементарных преобразований подобия можно избавиться от внедиагональных элементов, которым отвечают собственные значения из разных классов. При этом исключение следует вести по строкам сверху вниз, а в строках слева направо. Простой перестановкой векторов построенного базиса "квазисобственных" векторов можно

перейти от полученного треугольного вида к (3). Нормальная форма резольвентной матрицы для систем разностных гиперболических уравнений построена.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.И.Сердюкова. Необходимое и достаточное условие устойчивости одного класса разностных краевых задач , ДАН СССР, 1973, 208, I, 52-55.
2. В.Я.Урм. О необходимом и достаточном условиях устойчивости систем разностных уравнений. ДАН СССР, 139, I,40-43, 1961.
3. H-O. Kreiss. Über matrizen die beschränkte halbgruppen erzengen. Math. Scand., 7, 71-80, 1959.
4. С.И.Сердюкова. Эквивалентность двух критериев устойчивости в L_2 систем разностных уравнений, ОИЯИ, PII-3531, Дубна, 1967.
5. H-O. Kreiss. Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. I, Math. of Comp., 22, 104, 703-714, 1968.
6. T. Kato. Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 62-126, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 декабря 1978 года.