ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

19/III-79

М-482

Р5 - 12060

833/2-79

В.К.Мельников

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1978

Р5 - 12060

В.К.Мельников

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал "Успехи математических наук"

Мельников В.К. Р5 - 12060

О законах сохранения для одного класса систем нелинейных эволюционных уравнений

Пусть L - линейный дифференциальный оператор (k_0+1)-го порядка с матричными коэффициентами u_k, $k = 0,1,\dots,k_0$. Найдены все пары операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, такие, что операторное соотношение

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [\mathfrak{A}, L] = \mathfrak{B}(L-\eta)$$

эквивалентно нелинейной системе уравнений вида

$$\dot{u} = f(u, u', \dots, u^{(n)}).$$

Показано, что полученная эволюционная система обладает несколькими бесконечными сериями законов сохранения. Метод допускает обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Melnikov V.K. P5 - 12060

On the Conservation Laws for a Class of Systems of Nonlinear Evolution Equations

Let L be the linear differential operator of (k_0+1) order with matrix coefficients u_k, $k = 0, 1, \dots, k_0$. All pairs of the operators $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are found such that the operator relation

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [\mathfrak{A}, L] = \mathfrak{B}(L-\eta)$$

is equivalent to the nonlinear system of equations of the form

$$\dot{u} = f(u, u', \dots, u^{(n)}).$$

It is shown that the evolution system thus obtained has several infinite series of conservation laws. The method admits generalization for an arbitrary number of spatial variables.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В 1967 году группа американских ученых /К.Гарднер, Д.Грин, М.Крускал и Р.Миура/ обнаружила удивительную связь, существующую между решениями уравнения КдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad /1/$$

и решениями уравнения Шредингера

$$-\phi_{xx} + u\phi = \zeta^2\phi \qquad /2/$$

с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим уравнению /1/. В основе их исследования [1] лежит обнаруженный ими факт, что оператор

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3(u+\zeta^2)\frac{\partial}{\partial x} \qquad /3/$$

переводит любое решение уравнения /2/ в некоторое /вообще говоря, другое/ решение этого же уравнения, если входящая в равенства /2/,/3/ функция u удовлетворяет уравнению /1/. Действительно, поскольку коммутатор оператора Q с оператором Шредингера L имеет вид

$$[Q, L] = u_t - 6uu_x + u_{xxx} + 3u_x(L-\zeta^2),$$

то в силу равенств /1/, /2/ получаем

$$[Q, L]\phi = 0, \qquad \text{т.е.} \quad (L-\zeta^2)\,Q\phi = 0. \qquad /4/$$

Равенство /4/ оказалось очень плодотворным. Оно позволило названным выше авторам применить к решению задачи Коши для уравнения КдВ метод обратной задачи теории рассеяния для уравнения Шредингера. Следствием этого явилось обнаружение ряда замечательных свойств, которыми обладают решения уравнения КдВ /солитоны, законы сохранения и др./.

Позже П.Лакс заметил [2], что тесно связанный с L и Q оператор

$$A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u\right)$$

в силу уравнения КдВ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A,\ L] = 0. \qquad /5/$$

Соотношение /5/, уже встречавшееся ранее в квантовой механике, пролило некоторый свет на особую природу решений уравнения КдВ. Кроме того, оно позволило надеяться, что и другие уравнения, обладающие представленнем вида /5/, будут обладать аналогичными свойствами. Эта надежда блестяще осуществилась в ряде примеров, для которых удалось подобрать пары операторов L и A. Подробный обзор полученных на этом пути результатов содержится в монографии В.Е.Захарова [3]. Далее, в серии недавних работ В.А.Марченко [4], И.М.Гельфанда и Л.А.Дикого [5-8] и П.Лакса [9] была изучена связь между представлением /5/ и коэффициентами асимптотического разложения ядра резольвенты оператора L

Таким образом, случилось, что прогресс, достигнутый с помощью представления Лакса, затмил первоначальную идею авторов работы [1] и она оказалась недостаточно исследованной* . Однако возможности подхода, основывающегося на этой идее, довольно широки. По-видимому, они шире, чем возможности метода, основывающегося на представлении Лакса. В качестве иллюстрации рассмотрим случай с оператором L вида

$$L = \Lambda_0^{-(k_0+1)}\left(\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k\partial^k\right),\ k_0 \geq 0, \qquad /6/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, Λ_0 - диагональная матрица с отличными от нуля диагональными элементами $\lambda_r \in \mathbf{C}$, $r = 1,\dots,r_0$, удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_r^{k_0+1} \neq \lambda_{r'}^{k_0+1} \text{ при } r \neq r', \qquad /7/$$

* Здесь необходимо упомянуть весьма стимулировавшую настоящую работу статью М.Абловитца и др. [10] /см. также [11]/.

а $u_k = u_k(x,\ t)$ - квадратные матрицы порядка $r_0 \geq 1$. При этом мы будем предполагать, что у матрицы u_{k_0} на главной диагонали стоят нули. Выясним теперь, при каких условиях существует оператор

$$\mathfrak{A} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\partial^k, \qquad /8/$$

такой, что равенство

$$(L - \eta)(\phi_t - \mathfrak{A}\phi) = 0 \qquad /9/$$

имеет место для любого решения уравнения

$$(L - \eta)\phi = 0. \qquad /10/$$

Дифференцируя равенства /10/ по t и сравнивая полученный результат с /9/, имеем $(L_t - L\mathfrak{A} + \eta\mathfrak{A})\phi = 0$, т.е. оператор $L_t + [\mathfrak{A}, L]$ переводит в нуль любое решение уравнения /10/. Следовательно, справедливо равенство

$$L_t + [\mathfrak{A},\ L] = \mathfrak{B}(L - \eta), \qquad /11/$$

где

$$\mathfrak{B} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k\partial^k. \qquad /12/$$

Таким образом, из существования оператора $\mathfrak{A}$, удовлетворяющего условию /9/, следует существование оператора $\mathfrak{B}$, удовлетворяющего вместе с $\mathfrak{A}$ соотношению /11/. Справедливо и обратное, т.е. если пара операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяет соотношению /11/, то оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию /9/.

Положим теперь

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*(L - \eta) + \mathfrak{A}',\ \ \mathfrak{B} = [\mathfrak{A}^*,\ L] + \mathfrak{B}', \qquad /13/$$

где $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{A}'$ - дифференциальные операторы, причем порядок оператора $\mathfrak{A}'$ не превосходит k_0. Тогда нетрудно убедиться, что если пара операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяет соотношению /11/, то пара операторов $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ также удовлетворяет этому соотношению. При этом порядок оператора $\mathfrak{B}'$ очевидно не превосходит k_0. Далее, если операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ зависят полиномиально от параметра η, то полученные согласно равенствам /13/ операторы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ также будут полиномами по степеням η. Таким образом, чтобы найти все зависящие полиномиально от параметра η пары операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих соотношению /11/, достаточно рассмотреть случай, когда порядки этих операторов не превосходят k_0. Исходя из этого в настоящей работе найдены все зависящие полиномиально от параметра η и удовлетворяющие соотношению /11/ пары операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ вида /8/ и /12/ с $m, n \leq k_0$. При этом для каждой пары операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соотношение /11/ превращается в систему уравнений

$$\dot{u} = f(u, u', \dots, u^{(n)}), \qquad /14/$$

где $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k_0})$, $f = (f_0, f_1, \dots, f_{k_0})$, штрихами обозначено дифференцирование по x, а элементы матриц f_k, $k = 0, 1, \dots, k_0$, являются полиномами от элементов матриц $u_0, u_1, \dots, u_{k_0}$ и их производных по x соответствующего порядка. В работе показано, что полученная таким образом система уравнений /14/ обладает представлением Лакса и имеет $(k_0 + 1)r_0$ бесконечных серий законов сохранения, удовлетворяющих одному линейному соотношению. Далее, оказывается, что развитый в настоящей работе метод применим и в случае, когда матрицы u_k, входящие в равенство /6/, зависят рационально от спектрального параметра, а оператор ∂ в этом равенстве заменен на оператор

$$D = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \omega_\alpha \partial_\alpha,$$

где ∂_α - оператор дифференцирования по пространственной переменной x_α, а ω_α - рациональные функции спектрального параметра, $\alpha = 1, \dots, \alpha_0$. В этом случае порождаемая соотношением /11/ система уравнений также имеет $(k_0 + 1)r_0$ бесконечных серий законов сохранения. Однако представлением Лакса полученная система уравнений, по-видимому, не обладает. Подробному рассмотрению этого случая будет посвящена отдельная работа.

§1. ОПЕРАТОРЫ

Итак, пусть $\Phi = \|\phi_\nu^{(\mu)}\|$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, k_0$, - фундаментальная матрица решений уравнения

$$(L - \zeta^{k_0+1})\phi = 0 \qquad /1.1/$$

с оператором L вида /6/. Положим

$$F = \Phi C \Phi^{-1}, \qquad /1.2/$$

где матрица C не зависит от x. В силу /6/ справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F], \qquad /1.3/$$

где

$$U = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ u_0 \; u_1 \dots u_{k_0} \end{array} \right\|, \qquad \Gamma = \left\| \begin{array}{c:c} 0 & E_{k_0 r_0} \\ \hdashline (\zeta\Lambda_0)^{k_0+1} & 0 \end{array} \right\|. \qquad /1.4/$$

Пусть теперь $F_{\mu\nu}$ - матрица порядка r_0, образованная элементами матрицы F, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0 + 1, \dots, (\mu + 1)r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0 + 1, \dots, (\nu + 1)r_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, k_0$. Пусть далее,

$$A = \sum_{k=0}^{k_0} F_{0k} \partial^k. \qquad /1.5/$$

С помощью /1.2/ нетрудно убедиться, что оператор A переводит любое решение уравнения /1.1/ в некоторое решение этого же уравнения. Следовательно, существует оператор A^*, такой, что имеет место равенство

$$(L - \zeta^{k_0+1})A = A^*(L - \zeta^{k_0+1}). \qquad /1.6/$$

Найдем явное выражение для оператора A^*. С этой целью рассмотрим операторы

$$D_\mu = \sum_{k=0}^{k_0} F_{\mu k}\,\partial^k, \quad \mu = 0,1,\dots,k_0 .$$

Согласно равенству /1.3/ при $\mu = 0,1,\dots,k_0-1$ имеем

$$\partial D_\mu = D_{\mu+1} + F_{\mu k_0}\Lambda_0^{k_0+1}(L-\zeta^{k_0+1}),$$

а при $\mu = k_0$ -

$$\partial D_{k_0} = -\sum_{k=0}^{k_0} u_k D_k + F_{k_0k_0}\Lambda_0^{k_0+1}(L-\zeta^{k_0+1}) + (\zeta\Lambda_0)^{k_0+1}D_0$$

Отсюда следует, что при $k = 1,\dots,k_0$ справедливо равенство

$$\partial^k A = D_k + \sum_{\kappa=0}^{k-1}\partial^{k-\kappa-1}F_{\kappa k_0}\Lambda_0^{k_0+1}(L-\zeta^{k_0+1}).$$

а при $k = k_0+1$ – равенство

$$\partial^{k_0+1}A = -\sum_{k=0}^{k_0} u_k D_k + \sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}F_{kk_0}\Lambda_0^{k_0+1}(L-\zeta^{k_0+1}) + (\zeta\Lambda_0)^{k_0+1}D_0 .$$

С учетом этих равенств получаем, что удовлетворяющий условию /1.6/ оператор A^* имеет вид

$$A^* = \Lambda_0^{-(k_0+1)}\Big(\sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}F_{kk_0} + \sum_{k=1}^{k_0}u_k\sum_{\kappa=0}^{k-1}\partial^{k-\kappa-1}F_{\kappa k_0}\Big)\Lambda_0^{k_0+1}. \qquad /1.7/$$

Из равенства /1.6/ следует, что операторы A и $B = A - A^*$ удовлетворяют соотношению

$$[A, L] = B(L-\zeta^{k_0+1}),$$

т.е. являются решением стационарного уравнения /11/. Возникает естественная мысль построить асимптотическое разложение матрицы F по отрицательным степеням параметра ζ и с помощью коэффициентов этого разложения определить операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вида /8/ и /12/ посредством равенств типа /1.5/ и /1.7/. Этот путь приводит к успеху в случае $k_0 = 0$, как это было показано в работе /12/. Однако при $k_0 > 0$ получить асимптотическое разложение для матрицы F не удается. Поэтому мы построим с помощью матрицы F некоторый ряд по отрицательным степеням параметра ζ. Формально этот ряд будет удовлетворять равенству /1.3/. Коэффициенты этого ряда будут удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из равенства /1.3/. Определенные с помощью этих коэффициентов операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ дадут согласно соотношению /11/ интересующие нас уравнения /14/. Достигается это следующим образом.

§2. *ФОРМАЛЬНЫЕ РЯДЫ И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ*

Пусть

$$\theta = \left|\begin{matrix} E & E & \dots & E \\ \zeta\Lambda_0 & \zeta\Lambda_1 & \dots & \zeta\Lambda_{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\zeta\Lambda_0)^{k_0} & (\zeta\Lambda_1)^{k_0} & \dots & (\zeta\Lambda_{k_0})^{k_0} \end{matrix}\right|, \qquad /2.1/$$

где

$$\Lambda_k = \Lambda_0 \exp\Big(i\frac{2k\pi}{k_0+1}\Big), \quad k = 1,\dots,k_0$$

Тогда матрица $G = \theta^{-1}F\theta$ в силу /1.3/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial x} + [V, G] = \zeta[\Lambda, G], \qquad /2.2/$$

где $V = \theta^{-1}U\theta$, а

$$\Lambda = \left|\begin{matrix} \Lambda_0 & & 0 \\ & \Lambda_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \Lambda_{k_0} \end{matrix}\right|. \qquad /2.3/$$

При этом согласно неравенству /7/ диагональные элементы матрицы Λ все разные. Далее, в силу равенств /1.4/ и /2.1/ имеем

$$V = \sum_{k=0}^{k_0} V_k\zeta^{k-k_0}. \qquad /2.4/$$

где

$$V_k = \frac{1}{k_0+1}\Lambda^{-k_0}U_k\Lambda^k, \qquad /2.5/$$

а

$$U_k = \begin{vmatrix} u_k & u_k & \dots & u_k \\ u_k & u_k & \dots & u_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k & u_k & \dots & u_k \end{vmatrix}. \qquad /2.6/$$

Предположим теперь на время, что в уравнении /2.2/ матрица V не зависит от параметра ζ, а Λ - диагональная матрица с различными чисто мнимыми диагональными элементами λ_μ, $\mu = 1, \dots, (k_0+1)r_0$. Предположим далее, что элементы матрицы V обладают непрерывными производными по x любого порядка, а при $x \to -\infty$ элементы матрицы V стремятся к нулю настолько быстро, что сходится интеграл от нормы V на полуоси $(-\infty, 0]$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{0} ||V(x)||\,dx < \infty. \qquad /2.7/$$

Пусть, наконец, $\psi = \psi(x,\zeta)$ - фундаментальная матрица решений уравнения

$$\psi_x + V\psi = \zeta\Lambda\psi,$$

удовлетворяющая условию

$$\lim_{x\to-\infty} \psi(x,\zeta)\exp(-\zeta\Lambda x) = E,$$

а G_0 - произвольная диагональная матрица с различными диагональными элементами, не зависящими от x и ζ. Тогда из результатов работы [12] следует, что решение

$$\hat G = \psi G_0 \psi^{-1} \qquad /2.8/$$

уравнения /2.2/ допускает асимптотическое при $\zeta \to \pm\infty$ разложение вида

$$\hat G \sim \sum_{m=0}^{\infty} \hat G_m \zeta^{-m}, \qquad /2.9/$$

где $\hat G_0 = G_0$, а при $m > 0$ матрицы $\hat G_m$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Lambda, \hat G_m] - [V, \hat G_{m-1}] - \frac{\partial \hat G_{m-1}}{\partial x} = 0. \qquad /2.10/$$

При этом элементы матриц $\hat G_m$ либо будут равны нулю, либо будут квазиоднородными полиномами ранга m от элементов матрицы V и ее производных по x до $(m-1)$-го порядка. Коэффициенты этих полиномов, в свою очередь, зависят полиномиально от величин $\lambda_{\mu\nu} = (\lambda_\mu - \lambda_\nu)^{-1}$ с $\mu \neq \nu$. Это значит, что матрицы $\hat G_m$ определены в действительности при любых комплексных значениях величин $\lambda_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, и удовлетворяют при этом соотношению /2.10/. Таким образом, соотношение /2.10/ имеет решение, являющееся полиномом от элементов матрицы V и ее производных по x и в случае, когда матрица Λ имеет вид /2.3/, т.е. в интересующем нас случае. При этом ясно, что условие /2.7/ уже не является необходимым для разрешимости соотношения /2.10/, поскольку это соотношение локальное.

Предположим теперь, что входящая в соотношение /2.10/ матрица V имеет вид /2.4/. Тогда матрицы $\hat G_m$ также будут зависеть полиномиально от параметра ζ^{-1}, т.е. справедливо равенство

$$\hat G_m = \sum_{k=0}^{mk_0} G_{mk}\zeta^{k-mk_0}. \qquad /2.11/$$

При этом матрицы G_{1k} при $k = 0,1,\dots,k_0$ удовлетворяют соотношению

$$[\Lambda, G_{1k}] - [V_k, G_0] = 0,$$

а при $m > 1$ матрицы G_{mk} удовлетворяют соотношению

$$[\Lambda, G_{mk}] - \sum_{\kappa=0}^{k} [V_\kappa, G_{m-1,\,k-\kappa}] = 0,$$

если $0 \le k < k_0$, и соотношению

$$[\Lambda, G_{mk}] - \sum_{\kappa=0}^{k_0} [V_\kappa, G_{m-1,k-\kappa}] - \frac{\partial}{\partial x} G_{m-1,\,k-k_0} = 0,$$

если $k_0 \le k \le mk_0$. С помощью этих уравнений нетрудно убедиться, что матрицы

$$G_m = \sum_{\mu=\mu_m}^{m} G_{\mu,(k_0+1)\mu-m}, \quad \mu_m = \left[\frac{m+k_0}{k_0+1}\right], \qquad /2.12/$$

при $1 \le m \le k_0$ удовлетворяют равенству

$$[\Lambda, G_m] - \sum_{\mu = k_0 - m + 1}^{k_0} [V_\mu, G_{m-k_0+\mu-1}] - \frac{\partial G_{m-1}}{\partial x} = 0, \qquad /2.13/$$

а при $m > k_0$ – равенству

$$[\Lambda, G_m] - \sum_{\mu = 0}^{k_0} [V_\mu, G_{m-k_0+\mu-1}] - \frac{\partial G_{m-1}}{\partial x} = 0. \qquad /2.13^1/$$

Отсюда следует, что полученный таким образом формальный ряд $G = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \zeta^{-m}$ удовлетворяет уравнению /2.2/.

Положим теперь

$$\hat{F}_m = \theta G_m \theta^{-1}. \qquad /2.14/$$

В силу равенства /2.1/ имеем

$$\hat{F}_m = \sum_{k=-k_0}^{k_0} F_{mk} \zeta^k, \qquad /2.15/$$

где F_{mk} от ζ не зависят. Далее, положим

$$F_m = \begin{cases} \sum\limits_{\mu = m - k_0}^{m + k_0} F_{\mu, \mu - m}, & \text{если } m > k_0, \\ \sum\limits_{\mu = 0}^{m + k_0} F_{\mu, \mu - m}, & \text{если } -k_0 \le m \le k_0. \end{cases} \qquad /2.16/$$

С помощью равенств /2.13/ и /2.13[1]/ нетрудно убедиться, что определенные таким образом матрицы F_m при $-k_0 \le m \le 0$ удовлетворяют соотношению

$$[\Gamma_1, F_m] = 0, \qquad /2.17/$$

а при $m > 0$ – соотношению

$$[\Gamma_1, F_m] + [\Gamma_0, F_{m-k_0-1}] - [U, F_{m-k_0-1}] - \frac{\partial}{\partial x} F_{m-k_0-1} = 0, \qquad /2.18/$$

где матрица Γ_0 равна значению при $\zeta = 0$ матрицы Γ, определенной с помощью равенства /1.4/, а $\Gamma_1 = (\Gamma - \Gamma_0)\zeta^{-(k_0+1)}$. Отсюда следует, что полученный таким образом формальный ряд $F = \sum_{m=-k_0}^{\infty} F_m \zeta^{-m}$ удовлетворяет уравнению /1.3/.

§3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ /14/

Пусть $F_{m,\mu\nu}$ и $G_{m,\mu\nu}$ - матрицы порядка r_0, образованные соответственно элементами матриц F_m и G_m, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0 + 1, \dots, (\mu + 1) r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0 + 1, \dots, (\nu + 1) r_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, k_0$. С помощью уравнений /2.14/-/2.16/ нетрудно убедиться, что при $m + \mu - \nu \ge 0$ справедливо равенство

$$F_{m,\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{k_0} \Lambda_\alpha^{\mu} G_{m+\mu-\nu,\alpha\beta} \Lambda_\beta^{-\nu}, \qquad /3.1/$$

а при $m + \mu - \nu < 0$ – равенство

$$F_{m,\mu\nu} = 0. \qquad /3.2/$$

Пусть, далее, $c_1, \dots, c_{(k_0+1)r_0}$ - диагональные элементы матрицы G_0. Положим

$$C_k = \operatorname{diag}(c_{k r_0 + 1}, \dots, c_{(k+1) r_0}), \; k = 0, 1, \dots, k_0. \qquad /3.3/$$

По аналогии с /1.5/ и /1.7/ определим операторы

$$A_m = \sum_{k=0}^{k_0} F_{m,0k} \partial^k,$$

$$A_m^* = \Lambda_0^{-(k_0+1)} \Big(\sum_{k=0}^{k_0} \partial^{k_0 - k} F_{m,kk_0} + \sum_{k=1}^{k_0} u_k \sum_{\kappa=0}^{k-1} \partial^{k-\kappa-1} F_{m,\kappa k_0} \Big) \Lambda_0^{k_0+1}. \qquad /3.4/$$

С помощью /3.1/-/3.3/ нетрудно убедиться, что при $-k_0 \le m \le -1$ справедливо равенство

$$A_m = A_m^* = 0, \qquad /3.5/$$

а при $m = 0$ имеем

$$A_0 = A_0^* = \sum_{k=0}^{k_0} C_k. \qquad /3.6/$$

Покажем теперь, что при $m > 0$

$$A_m - A_m^* = LA_{m-k_0-1} - A^*_{m-k_0-1}L. \qquad /3.7/$$

С этой целью рассмотрим операторы

$$D_{m,\mu} = \sum_{k=0}^{k_0} F_{m,\mu k}\,\partial^k, \quad \mu = 0,1,\dots,k_0.$$

В силу соотношения /2.18/ при $\mu = 0,1,\dots,k_0-1$ имеем

$$\partial D_{m,\mu} = D_{m,\mu+1} + F_{m,\mu k_0}\Lambda_0^{k_0+1}L - F_{m+k_0+1,\mu k_0}\Lambda_0^{k_0+1},$$

а при $\mu = k_0$ -

$$\partial D_{m,k_0} = -\sum_{k=0}^{k_0} u_k D_{m,k} + F_{m,k_0k_0}\Lambda_0^{k_0+1}L -$$

$$- F_{m+k_0+1,k_0k_0}\Lambda_0^{k_0+1} + \Lambda_0^{k_0+1}D_{m+k_0+1,0}.$$

Отсюда следует, что при $k = 1,\dots,k_0$ справедливо равенство

$$\partial^k A_m = D_{m,k} + \sum_{\kappa=0}^{k-1}\partial^{k-\kappa-1}F_{m,\kappa k_0}\Lambda_0^{k_0+1}L -$$

$$-\sum_{\kappa=0}^{k-1}\partial^{k-\kappa-1}F_{m+k_0+1,\kappa k_0}\Lambda_0^{k_0+1},$$

а при $k = k_0+1$ – равенство

$$\partial^{k_0+1}A_m = -\sum_{k=0}^{k_0} u_k D_{m,k} + \sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}F_{m,kk_0}\Lambda_0^{k_0+1}L -$$

$$-\sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}F_{m+k_0+1,kk_0}\Lambda_0^{k_0+1} + \Lambda_0^{k_0+1}D_{m+k_0+1,0}.$$

Из этих равенств следует, что при $m \geq -k_0$

$$LA_m - A_{m+k_0+1} = A_m^*L - A^*_{m+k_0+1},$$

т.е. соотношение /3.7/ справедливо при любом $m > 0$.

В силу /3.5/ из соотношения /3.7/ следует, что при $1 \le m \le k_0$ имеем $A_m = A_m^*$.

Отсюда в силу /3.1/-/3.4/ получаем, что при $1 \le m \le k_0$

$$A_m - A_m^* = \sum_{k=0}^{k_0} C_k\Lambda_k^{-m}\partial^m + \alpha_m, \qquad /3.8/$$

где оператор α_m имеет порядок $m-1$. Наконец, согласно результатам §2 с учетом равенств /3.1/ и /3.4/ получаем, что при $u_0 = u_1 = \dots = u_{k_0} = 0$ имеют место равенства

$$A_m - A_m^* = \begin{cases} \sum_{k=0}^{k_0} C_k\Lambda_k^{-m}\partial^m, & \text{если } 0 \le m \le k_0, \\ 0, & \text{если } m > k_0. \end{cases} \qquad /3.9/$$

Положим теперь

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{n,\kappa} = \sum_{m=0}^{n} A_{\kappa+(k_0+1)m}\,\eta^{n-m},$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{n,\kappa} = \sum_{m=0}^{n} (A_{\kappa+(k_0+1)m} - A^*_{\kappa+(k_0+1)m})\,\eta^{n-m}, \qquad /3.10/$$

где $0 \le \kappa \le k_0$ и $n \ge 0$. Подставим теперь эти равенства в соотношение /11/. С учетом /3.6/-/3.8/ получаем

$$\frac{\partial L}{\partial t} = A_{\kappa+(k_0+1)(n+1)} - A^*_{\kappa+(k_0+1)(n+1)}. \qquad /3.11/$$

В левой и правой частях равенства /3.11/ стоят операторы одного и того же порядка k_0. Приравнивая между собой коэффициенты этих операторов, мы получим в результате систему уравнений вида /14/. По поводу полученной системы необходимо заметить следующее. В силу равенств /3.4/ операторы A_m и A_m^* имеют вид

$$A_m = F_{m,0k_0}\,\partial^{k_0} + \hat{A}_m,$$

$$A_m^* = \Lambda_0^{-(k_0+1)}F_{m,0k_0}\Lambda_0^{k_0+1}\,\partial^{k_0} + \hat{A}_m^*,$$

где $\hat{A}_m$ и $\hat{A}_m^*$ - операторы порядка $k_0 - 1$. Следовательно, одно из уравнений системы /14/ имеет вид

$$\dot{u}_{k_0} = [\Lambda_0^{k_0+1}, F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),0k_0}],$$

что находится в полном соответствии со сделанным ранее предположением о равенстве нулю диагональных элементов матрицы u_{k_0}. Далее, нетрудно доказать индукцией по n, что

$$A^*_{\kappa+(k_0+1)(n+1)} - A_{\kappa+(k_0+1)(n+1)} = [P_{n,\kappa}, L], \qquad /3.12/$$

где

$$P_{n,\kappa} = \sum_{m=0}^{n} A_{\kappa+(k_0+1)m} L^{n-m}. \qquad /3.13/$$

Из равенства /3.12/ следует, что уравнение /3.11/ обладает представлением Лакса, причем согласно равенствам /3.10/ и /3.13/ оператор $P_{n,\kappa}$ однозначно определяется оператором $\mathfrak{A}_{n,\kappa}$ и наоборот. К этому вопросу мы еще вернемся в §6 этой статьи.

§4. СООТНОШЕНИЯ С ВАРИАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Обратимся снова к полученному ранее решению $\hat{G}_m$ соотношения /2.10/ и положим $\hat{H}_m = Sp(\Lambda\hat{G}_m)$. Тогда согласно результатам работы [12] справедливо равенство

$$\frac{\delta\hat{H}_{m+1}}{\delta\tilde{V}} - m\hat{G}_m = 0. \qquad /4.1/$$

В работе [12] это равенство доказано в предположении, что элементы матрицы V не зависят от параметра ζ и удовлетворяют условию /2.7/, а диагональные элементы λ_μ матрицы Λ разные и лежат в комплексной плоскости λ на одной прямой. Однако ясно, что для справедливости равенства /4.1/ условие /2.7/ не является необходимым. Далее, ясно, что из справедливости /4.1/ в случае, когда λ_μ лежат на одной прямой, следует справедливость этого равенства при любых $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ при $\mu \neq \nu$. Посмотрим теперь, что дает /4.1/ в случае, когда матрица V имеет вид /2.4/. Нетрудно видеть, что из /4.1/ следует равенство

$$\frac{\delta\hat{H}_{m+1}}{\delta\tilde{V}_k} - m\zeta^{k-k_0}\hat{G}_m = 0. \qquad /4.2/$$

Согласно /2.11/ положим

$$\hat{H}_m = \sum_{k=0}^{mk_0} H_{mk}\zeta^{k-mk_0}, \qquad \text{где} \quad H_{mk} = Sp(\Lambda G_{mk}). \qquad /4.3/$$

Отсюда согласно /4.2/ следует, что

$$\frac{\delta H_{m+1,\kappa}}{\delta\tilde{V}_k} = \begin{cases} mG_{m,\kappa-k}, & \text{если } 0 \le \kappa-k \le mk_0, \\ 0, & \text{если } \kappa<k \text{ или } \kappa>mk_0+k. \end{cases} \qquad /4.4/$$

Положим теперь для $m \geq k_0+1$

$$I_m = \sum_{\mu=\mu_m}^{m} \frac{1}{\mu-1} H_{\mu,(k_0+1)\mu-m}, \quad \mu_m = \left[\frac{m+k_0}{k_0+1}\right]. \qquad /4.5/$$

С учетом равенств /2.12/ и /4.4/ отсюда следует, что

$$\frac{\delta I_m}{\delta\tilde{V}_k} = G_{m+k-k_0-1}. \qquad /4.6/$$

Пусть теперь $V_{k,\mu\nu}$ - матрица порядка r_0, образованная элементами матрицы V_k, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0+1, \ldots, (\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0+1, \ldots, (\nu+1)r_0$. В силу равенства /4.6/ имеем

$$\frac{\delta I_m}{\delta\tilde{V}_{k,\nu\mu}} = G_{m+k-k_0-1,\mu\nu}. \qquad /4.7/$$

Далее, согласно /2.5/ и /2.6/ получаем

$$V_{k,\mu\nu} = \frac{1}{k_0+1}\Lambda_\mu^{-k_0} u_k \Lambda_\nu^{k}.$$

Отсюда на основании равенства /4.7/ следует, что

$$\frac{\delta I_m}{\delta\tilde{u}_k} = \frac{1}{k_0+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{k_0} \Lambda_\mu^k G_{m+k-k_0-1,\mu\nu}\Lambda_\nu^{-k_0},$$

т.е. согласно /3.1/ имеем

$$\frac{\delta I_m}{\delta\tilde{u}_k} = \frac{1}{k_0+1} F_{m-1,kk_0}. \qquad /4.8/$$

Положим теперь для $m = 2, \ldots, k_0 + 1$

$$I_m = \sum_{\mu=2}^{m} \frac{1}{\mu - 1} H_{\mu,(k_0+1)\mu - m} + Sp(G_0 V_{k_0 - m + 1}). \qquad /4.9/$$

Согласно равенству /4.4/ отсюда следует справедливость соотношения /4.6/ при $m + k - k_0 - 1 \geq 0$. В противном случае, т.е. при $m + k - k_0 - 1 < 0$, имеем

$$\frac{\delta I_m}{\delta \tilde{V}_k} = 0.$$

Отсюда на основании равенств /3.1/ и /3.2/ получаем, что равенство /4.8/ справедливо и при $m = 2, \ldots, k_0 + 1$.

Положим теперь

$$T_{mr} = \frac{\partial I_m}{\partial c_r}, \; r = 1, \ldots, (k_0 + 1) r_0, \qquad /4.10/$$

где c_r - диагональные элементы матрицы G_0. В силу /4.8/ при любых $m \geq 1$, $r = 1, \ldots, (k_0 + 1) r_0$ и $k = 0, 1, \ldots, k_0$ справедливо равенство

$$\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} = \frac{1}{k_0 + 1} \frac{\partial F_{m-1,\, kk_0}}{\partial c_r}. \qquad /4.11/$$

В силу того, что элементы матрицы $\hat{G}_m$ при $m > 0$ зависят линейно от диагональных элементов матрицы G_0, правая и левая части равенства /4.11/ от c_r не зависят.

§5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Посмотрим теперь, как меняются со временем величины T_{mr}, если элементы матриц u_k, $k = 0, 1, \ldots, k_0$, меняются со временем согласно уравнению /3.11/. При этом ради удобства в этом параграфе будем считать, что индексы κ и n в /3.11/ таковы, что $1 \leq \kappa \leq k_0 + 1$, а $n \geq -1$. Согласно /14/ имеем

$$\frac{\partial T_{mr}}{\partial t} = Sp\Big(\sum_{k=0}^{k_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial T}{\partial \tilde{u}_k^{(s)}} \frac{\partial^s f_k}{\partial x^s}\Big),$$

где $u_k^{(s)} = \dfrac{\partial^s u_k}{\partial x^s}$, а суммирование по s распространяется в действительности до некоторого зависящего от κ и n конечного предела. Положим теперь

$$\Omega_{mr} = Sp\Big(\sum_{k=0}^{k_0} \frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} f_k\Big),$$

$$Z_{mr} = Sp\Big(\sum_{k=0}^{k_0} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{s-1} (-1)^\sigma \frac{\partial^{s-\sigma-1} f_k}{\partial x^{s-\sigma-1}} \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}_k^{(s)}}\Big). \qquad /5.1/$$

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{\partial T_{mr}}{\partial t} = \Omega_{mr} + \frac{\partial Z_{mr}}{\partial x}.$$

Далее, из сравнения равенств /14/ и /3.11/ согласно /3.4/ имеем

$$f_k = \Lambda_0^{k_0+1} F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\, 0k} -$$
$$- \sum_{\alpha=0}^{k_0-k} C_{k+\alpha}^{\alpha} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\, k_0-k-\alpha,\, k_0} \Lambda_0^{k_0+1} -$$
$$- \sum_{\sigma=k+1}^{k_0} \sum_{\alpha=0}^{\sigma-k-1} C_{k+\alpha}^{\alpha} u_\sigma \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\, \sigma-k-\alpha-1,\, k_0} \Lambda_0^{k_0+1}, \qquad /5.2/$$

причем при $k = k_0$ последнее слагаемое в правой части этого равенства очевидно отсутствует. Согласно /4.11/, /5.1/ и /5.2/ имеем

$$\Omega_{mr} = \frac{1}{k_0+1} Sp\Big(\Lambda_0^{k_0+1} \sum_{k=0}^{k_0} F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),0k} \frac{\partial F_{m-1,\, kk_0}}{\partial c_r}\Big) -$$
$$- \frac{1}{k_0+1} Sp(\Lambda_0^{k_0+1} \hat{\Omega}_{mr}) - \frac{1}{k_0+1} Sp(\Lambda_0^{k_0+1} \Omega_{mr}^{*}), \qquad /5.3/$$

где

$$\hat{\Omega}_{mr} = \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{\alpha=0}^{k_0-k} C_{k+\alpha}^{\alpha} \frac{\partial F_{m-1,\, kk_0}}{\partial c_r} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),k_0-k-\alpha,k_0},$$

$$\Omega^*_{mr} = \sum_{k=0}^{k_0-1}\ \sum_{\sigma=k+1}^{k_0}\ \sum_{\alpha=0}^{\sigma-k-1} C^{\alpha}_{k+\alpha}\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}u_\sigma\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\sigma-k-\alpha-1,k_0}.$$

Далее из соотношения /2.18/ следует, что при $k=0,1,\dots,k_0-1$ и $\sigma=1,\dots,k_0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial F_{m-1,k+1,\sigma}}{\partial c_r}-\frac{\partial F_{m-1,k,\sigma-1}}{\partial c_r}+\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}u_\sigma-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_{m-1,k\sigma}}{\partial c_r}=0.$$

С учетом этого равенства имеем

$$\Omega^*_{mr}=\frac{\partial}{\partial x}Y_{mr}+\sum_{\sigma=0}^{k_0-1}\frac{\partial F_{m-1,0\sigma}}{\partial c_r}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\sigma k_0}-$$

$$-\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),k_0-k,k_0}-$$

$$-\sum_{k=0}^{k_0-1}\ \sum_{\alpha=0}^{k_0-k-1}C^{\alpha+1}_{k+\alpha+1}\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}\frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial x^{\alpha+1}}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),k_0-k-\alpha-1,k_0},$$

где

$$Y_{mr}=\sum_{k=0}^{k_0-1}\ \sum_{\sigma=k+1}^{k_0}\ \sum_{\alpha=0}^{\sigma-k-1}C^{\alpha}_{k+\alpha}\frac{\partial F_{m-1,k\sigma}}{\partial c_r}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\sigma-k-\alpha-1,k_0}.$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\hat\Omega_{mr}=\sum_{k=0}^{k_0}\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),k_0-k,k_0}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0-1}\ \sum_{\alpha=0}^{k_0-k-1}C^{\alpha+1}_{k+\alpha+1}\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}\frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial x^{\alpha+1}}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),k_0-k-\alpha-1,k_0}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\hat\Omega_{mr}+\Omega^*_{mr}=\frac{\partial}{\partial x}Y_{mr}+\sum_{\sigma=0}^{k_0}\frac{\partial F_{m-1,0\sigma}}{\partial c_r}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),\sigma k_0}.$$

Отсюда согласно равенству /5.3/ имеем

$$\Omega_{mr}=\frac{1}{k_0+1}W_{mnr}-\frac{1}{k_0+1}\frac{\partial}{\partial x}Sp(\Lambda_0^{k_0+1}Y_{mr}),$$

где

$$W_{mnr}=Sp\{\Lambda_0^{k_0+1}\sum_{k=0}^{k_0}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),0k}\frac{\partial F_{m-1,kk_0}}{\partial c_r}-$$

$$-\sum_{k=0}^{k_0}F_{\kappa+(k_0+1)(n+1),kk_0}\frac{\partial F_{m-1,0k}}{\partial c_r}\Lambda_0^{k_0+1}\}.$$

Возьмем теперь соотношение /2.18/ в виде

$$[\Gamma_1,F_{\kappa+(k_0+1)(n+1)}]+[\Gamma_0,F_{\kappa+(k_0+1)n}]-$$

$$-[U,F_{\kappa+(k_0+1)n}]-\frac{\partial}{\partial x}F_{\kappa+(k_0+1)n}=0$$

и умножим его на $\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}$, а результат сложим с соотношением

$$[\Gamma_1,\frac{\partial F_{m+k_0}}{\partial c_r}]+[\Gamma_0,\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}]-[U,\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}]-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}=0,$$

умноженным на $F_{\kappa+(k_0+1)n}$. В итоге получим, что

$$Sp([\Gamma_1,F_{\kappa+(k_0+1)(n+1)}]\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r})+$$

$$+Sp([\Gamma_1,\frac{\partial F_{m+k_0}}{\partial c_r}]F_{\kappa+(k_0+1)n})=\frac{\partial}{\partial x}Sp(F_{\kappa+(k_0+1)n}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}).$$

Отсюда в силу равенств

$$W_{mnr}=Sp([\Gamma_1,F_{\kappa+(k_0+1)(n+1)}]\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}),$$

$$W_{m+k_0+1,n-1,r}=-Sp([\Gamma_1,\frac{\partial F_{m+k_0}}{\partial c_r}]F_{\kappa+(k_0+1)n})$$

следует рекуррентное соотношение

$$W_{mnr}=W_{m+k_0+1,n-1,r}+\frac{\partial}{\partial x}Sp(F_{\kappa+(k_0+1)n}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial c_r}).$$

Решая это рекуррентное соотношение, получаем

$$W_{mnr} = W_{m+(k_0+1)(n+1),-1,r} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Sp}\Big(\sum_{s=0}^{n} F_{\kappa+(k_0+1)(n-s)} \frac{\partial F_{m+(k_0+1)s-1}}{\partial c_r}\Big),$$

где

$$W_{m+(k_0+1)(n+1),-1,r} = \mathrm{Sp}\Big([\Gamma_1, F_\kappa]\frac{\partial}{\partial c_r} F_{m+(k_0+1)(n+1)-1}\Big).$$

С учетом /2.17/ нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$W_{m+(k_0+1)(n+1),-1,r} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\Big(F_{\kappa-k_0-1}\frac{\partial F_{m+(k_0+1)(n+1)-1}}{\partial c_r}\Big).$$

Отсюда следует, что

$$W_{mnr} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\Big(\sum_{s=0}^{n+1} F_{\kappa+(k_0+1)(n-s)}\frac{\partial F_{m+(k_0+1)s-1}}{\partial c_r}\Big).$$

Таким образом, полагая

$$X_{mr} = \frac{1}{k_0+1}\mathrm{Sp}\Big(\sum_{s=0}^{n+1} F_{\kappa+(k_0+1)(n-s)}\frac{\partial F_{m+(k_0+1)s-1}}{\partial c_r}\Big) -$$

$$- \frac{1}{k_0+1}\,\mathrm{Sp}\big(\Lambda_0^{k_0+1} Y_{mr}\big) + Z_{mr},$$

мы без труда убеждаемся в справедливости равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{mr} = \frac{\partial}{\partial x}X_{mr}, \qquad /5.4/$$

где T_{mr} и X_{mr} - полиномы от элементов матриц u_k, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и их производных по x. При этом величины X_{mr} зависят явно еще и от индексов κ и n уравнения /3.11/, в то время как величины T_{mr} от них явно не зависят. Эта зависимость появляется только после подстановки в T_{mr} решения уравнения /3.11/. Заметим теперь, что если в /2.8/ положить

$G_0 = E$, то получим $\hat{G} = E$. Следовательно, согласно /2.9/ имеем $\hat{G}_m = 0$ при $m > 0$. Отсюда согласно равенству /2.11/ $G_{mk} = 0$, т.е. согласно равенствам /4.3/ и /4.5/ имеем $I_m = 0$ при $m > k_0 + 1$. Поскольку в силу /4.10/

$$I_m = \sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0} c_r\, T_{mr}, \qquad /5.5/$$

то отсюда следует, что при $m > k_0 + 1$ справедливо равенство

$$\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0} T_{mr} = 0.$$

Далее, согласно равенствам /4.3/ и /4.9/ имеем $I_m = \mathrm{Sp}\,V_{k_0-m+1}$ при $m = 2, \dots, k_0+1$. Отсюда согласно /5.5/ при $m = 2, \dots, k_0+1$ имеем равенство

$$\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0} T_{mr} = \mathrm{Sp}\,V_{k_0-m+1}.$$

В силу /2.5/ и /2.6/ правая часть этого соотношения равна нулю.

§6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ /11/

Операторы $\mathfrak{A}_{n,\kappa}$ и $\mathfrak{B}_{n,\kappa}$, определенные с помощью равенств /3.10/, не являются самым общим решением соотношения /11/. Однако с помощью операторов A_m и A_m^*, определенных посредством равенств /3.4/, легко может быть найдено самое общее решение соотношения /11/. Именно, мы покажем, что искомые операторы имеют вид

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n + \sum_{m=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0} \gamma_r^{(\mu)} \frac{\partial A_{\kappa+(k_0+1)(m-\mu)}}{\partial c_r}\,\eta^{n-m},$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_n + \sum_{m=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0} \gamma_r^{(\mu)}\Big(\frac{\partial A_{\kappa+(k_0+1)(m-\mu)}}{\partial c_r} - \qquad /6.1/$$

$$\frac{\partial A^*_{\kappa+(k_0+1)(m-\mu)}}{\partial c_r}\Big)\eta^{n-m},$$

где $\gamma_r^{(\mu)}$ - произвольные функции t. Получаемое с помощью этих операторов согласно /11/ уравнение имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(\mu)}\left(L\frac{\partial A_{\kappa+(k_0+1)(n-\mu)}}{\partial c_r} - \frac{\partial A^*_{\kappa+(k_0+1)(n-\mu)}}{\partial c_r}L\right) \qquad /6.2/$$

и является самым общим эволюционным уравнением, получаемым с помощью соотношения /11/.

Действительно, пусть операторы

$$\mathfrak{A} = \sum_{m=0}^{n}\hat A_m\eta^{n-m} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B} = \sum_{m=0}^{n}\hat B_m\eta^{n-m} \qquad /6.3/$$

удовлетворяют /11/. Положим $\hat B_m = \hat A_m - \hat A^*_m$. Тогда из соотношения /11/ следует, что

1/ $\hat A_0 = \hat A_0^*$,

2/ при $m = 0,1,\dots,n-1$ справедливо равенство

$$\hat A_{m+1} - \hat A^*_{m+1} - L\hat A_m + \hat A^*_m L = 0, \qquad /6.4/$$

3/ вытекающее из соотношения /11/ эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} = L\hat A_n - \hat A^*_n L$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$L\hat A_n - \hat A^*_n L = \sum_{k=0}^{k_0}\beta_k\partial^k, \qquad /6.5/$$

причем у матрицы β_{k_0} равны нулю элементы, стоящие на главной диагонали. Доказательство равенств /6.1/ проведем индукцией по n. При этом мы воспользуемся следующим очевидным утверждением, выделенным ради удобства в отдельную лемму.

Л е м м а. Если оператор $A = \sum_{\mu=0}^{m}a_\mu\partial^\mu$ таков, что $[A,L] = \sum_{k=0}^{m+k_0}\beta_k\partial^k$, причем у матрицы β_{m+k_0} равны нулю диагональные элементы, то a_m - диагональная матрица с не зависящими от x диагональными элементами.

В случае $n=0$ с помощью этой леммы мы можем согласно равенствам /3.6/ и /3.8/ подобрать величины $\gamma_r^{(0)}$ так, чтобы имело место равенство

$$\hat A_0 = \hat A_0^* = \sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(0)}\frac{\partial A_\kappa}{\partial c_r}.$$

При этом мы, конечно, воспользовались равенством /6.5/ при $n=0$ и соотношением /3.7/. Отсюда в силу /6.3/ следует справедливость /6.1/ при $n=0$.

Предположим теперь, что равенство /6.1/ справедливо при всех $0\le n\le n_0$, $n_0\ge 0$. Покажем, что тогда оно справедливо и при $n=n_0+1$. Действительно, в силу леммы найдутся величины $\gamma_r^{(0)}$, такие, что

$$\hat A_0 = \hat A_0^* = \sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(0)}\frac{\partial A_\kappa}{\partial c_r} + a_0,$$

где a_0 - диагональная матрица с диагональными элементами, равными нулю в некоторой точке $x=x_0$. Положим теперь для $m=1,\dots,n_0+1$

$$\hat A_m = \sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(0)}\frac{\partial A_{\kappa+(k_0+1)m}}{\partial c_r} + \check A_{m-1},$$

$$\hat A^*_m = \sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(0)}\frac{\partial A^*_{\kappa+(k_0+1)m}}{\partial c_r} + \check A^*_{m-1}. \qquad /6.6/$$

Тогда из равенства /6.4/ при $m=0$ в силу соотношения /3.7/ получаем, что $\check A_0 = \check A_0^*$, а матрица a_0 не зависит от x и, следовательно, $a_0 = 0$. Далее, из равенства /6.4/ согласно /3.7/ получаем, что при $m = 0,1,\dots,n_0-1$ справедливо соотношение

$$\check A_{m+1} - \check A^*_{m+1} - L\check A_m + \check A^*_m L = 0,$$

а из /6.5/ согласно /3.7/ следует равенство

$$L\check A_{n_0} - \check A^*_{n_0}L = \sum_{k=0}^{k_0}\beta_k\partial^k,$$

причем у матрицы β_{k_0} равны нулю элементы, стоящие на главной диагонали. Таким образом, с помощью этой редукции мы свели случай $n=n_0+1$ к случаю с $n=n_0$. Согласно предположению индукции при $m=0,1,\dots,n_0$ справедливы равенства

$$\check{A}_m=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(\mu+1)}\frac{\partial A_{\kappa+(k_0+1)(m-\mu)}}{\partial c_r},$$

$$\check{A}^*_m=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\kappa=0}^{k_0}\sum_{r=1}^{(k_0+1)r_0}\gamma_r^{(\mu+1)}\frac{\partial A^*_{\kappa+(k_0+1)(m-\mu)}}{\partial c_r}.$$

Ради удобства в этих равенствах верхний индекс у величины $\gamma_r^{(\mu)}$ сдвинут на единицу. Отсюда согласно /6.3/ и /6.6/ следует справедливость равенств /6.1/ при $n=n_0+1$. Таким образом, равенства /6.1/ доказаны полностью.

Система уравнений /6.2/ обладает теми же свойствами, что и система /3.11/. В частности, она обладает представлением Лакса и имеет $(k_0+1)r_0$ бесконечных серий законов сохранения вида /5.4/. При этом величины T_{mr} для системы /6.2/ определяются так же, как и для системы /3.11/, т.е. с помощью равенств /4.5/, /4.9/ и /4.10/.

В заключение отметим, что при $r_0=1$ согласно равенствам /3.9/ и /3.7/ при $m>0$ справедливо соотношение

$$A_{(k_0+1)m}=A^*_{(k_0+1)m}=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. Phys. Rev.Lett., 1967, v.19, No. 19, p.1095-1097.
2. Лакс П.Д. Математика, 1969, 13, №5, с.128-159.
3. Zakharov V.E. The Method of Inverse Scattering Problem, Lecture notes on Mathematics, Springer Verlag, 1978.
4. Марченко В.А.. Матем. сб., 1974, 95:3, с.331-356.
5. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. УМН, 1975, 30:5, с.67-100.
6. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Функциональный анализ., 1976, 10, вып.4, с.13-39.

7. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Функциональный анализ, 1977, 11, вып. 2, с.11-27.
8. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Функциональный анализ, 1978, 12, вып. 2, с.8-23.
9. Lax P. Lectures in Appl. Math., 1974, 15, p.85-96.
10. Ablowitz M.J. et al. Phys. Rev.Lett., 1973, v.31, No. 2, p.125-127.
11. Ablowitz M.J. et al. Stud. in Appl. Math., 1974, v.LIII, No. 4, p.249-315.
12. Мельников В.К. ОИЯИ, Р2-10966, Дубна, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел 4 декабря 1978 года.