СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11912

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ЛОУ

1978

P5 - 11912

Е.П.Жидков, М.Нгуен, Б.Н.Хоромский

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ЛОУ

Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. P5 - 11912

Качественное исследование и приближенное решение нерегуляризованного уравнения Лоу

Рассматриваются вопросы, связанные с существованием и единственностью решений нелинейного сингулярного интегрального уравнения Лоу. Методом положительных операторов доказана теорема существования решений в конусе неотрицательных вектор-функций пространства $L^n_{ip\alpha}[0,1]$. Получена также теорема единственности решений в этом конусе с помощью интегральной метрики пространства $L^n_2[0,1]$. Приводятся результаты численного исследования конкретных моделей уравнения Лоу и результаты по определению верхней границы константы связи $\|\lambda\|$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zhidkov E.P., Nguyen M., Khoromsky B.N. P5 - 11912

Qualitative Determination and Approximate Solution of the Unregularizable Low Theorem

Some questions are considered connected with the existence and uniqueness of solutions of the nonlinear singular integral Low equation. By the positive operator method there is proved the theorem of existence of solutions in the cone of non-negative vector-functions in $L^n_{ip\alpha}[0,1]$ space. The theorem of uniqueness of solutions is obtained by means of integral metric $L^n_2[0,1]$. Some numerical results on determination of the upper boundary of coupling constant $\|\lambda\|$ are listed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Thechniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В [1,2] рассматривается следующее уравнение Лоу:

$$h_\alpha(t) = \lambda_\alpha t + \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{\rho(\tau)}{\tau} \frac{|h_\beta(\tau)|^2}{\tau + t} d\tau - \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{\rho(\tau)}{\tau} \frac{|h_\alpha(\tau)|^2}{\tau - t} d\tau + i\rho(t)|h_\alpha(t)|^2 \qquad /1/$$

$$(\alpha = 1,2,\dots,n), \quad t \in [0,1],$$

где $h_\alpha(t)$ - искомые комплексные функции; $\rho(t)$ - заданная вещественная функция на отрезке /0,1/; $c_{\alpha\beta}$ - элементы заданной матрицы кроссинг-симметрии C, удовлетворяющей условию $C^2 = E$ / E - единичная матрица/; λ_α - некоторые фиксированные действительные параметры, удовлетворяющие следующему условию:

$$\lambda_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\lambda_\beta \quad (\alpha = 1,2,\dots,n).$$

В указанных работах получены некоторые ограничения на модули $|h_\alpha(t)|$, константы Гельдера функций $h_\alpha(t)$ и величины $|\lambda_\alpha|$ для существования и единственности решений уравнения /1/. Оценки получаются при достаточно жестких ограничениях на функцию $\rho(t)$ и матрицу C. Так, предполагалось, что функция $\rho(t)$ и матрица C удовлетворяют следующим условиям:

а$_1$) $\rho(t)/t = 0$ при $t = 0$ и $t = 1$, $\rho(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$;

б$_1$) $|\rho(t)/t - \rho(t')/t'| \leq k|t - t'|^{\nu}$; $0 < \nu < 1$, $0 < k < +\infty$;

в$_1$) $\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} = 1$, $(\alpha = 1,2,\ldots, n)$, $C = C^*$

/C^*– сопряженная к C матрица /.

Цель настоящей работы - оценить области существования и единственности решений уравнения /1/ в зависимости от параметров λ_α при менее ограничительных условиях на функцию $\rho(t)$ и матрицу C, нежели в /1,2/. Кроме того, приводятся результаты численных экспериментов по определению верхней границы константы связи $||\lambda|| = \max_{\alpha} |\lambda_\alpha|$, обеспечивающей существование решения.

Предполагая лишь, что $C^2 = E$, допустим, что функция $\rho(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

а$_2$) $\rho(0) = \rho(1) = 0$, $\rho(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$;

б$_2$) $|t\rho(t) - t'\rho(t')| \leq k_1 |t - t'|^{\nu}$, $0 < \nu < 1$, $0 \leq t, t' \leq 1$, $k_1 < +\infty$.

Как показывает приведенное ниже сравнение, оценки областей существования и единственности, полученные в теоремах 1,2, являются, вообще говоря, менее ограничительными, чем соответствующие из /1,2/. Особенно значительная разница видна в случае условий единственности.

В первом параграфе уравнение /1/ преобразуется к эквивалентному виду, удобному для оценок, после чего доказываются теоремы существования и единственности решений.

Во втором параграфе приводятся результаты численного решения уравнения Лоу для конкретных функций

$\rho(t)$ и матрицы C в случае двух и трех уравнений. Приводится также сравнение полученных численных результатов с точными решениями.

Отметим, что в /3,4/ для краевой задачи, соответствующей уравнению /1/, был установлен класс решений с произвольным индексом производной Фреше оператора Лоу в предположении, что матрица C удовлетворяет условию

$$\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} = 1, \quad (\alpha = 1, 2, .., n).$$

§1. *Теоремы существования и единственности решений уравнения Лоу*

Введем следующие обозначения:

$$v_\alpha(t) = \operatorname{Im} h_\alpha(t)/t \quad (\alpha = 1,2,\ldots, n);$$

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n); \quad \vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t))';$$

а под $\vec{x}^{\,2}$ понимается вектор $(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$, составленный из квадратов соответствующих компонент вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В этих обозначениях уравнение /1/ принимает вид

$$\vec{v}(t) = t\,\rho(t)\,[\vec{v}^{\,2}(t) + \vec{u}^{\,2}(t)], \qquad /2/$$

где

$$\vec{u}(t) = \vec{\lambda} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{v}(\tau)d\tau}{\tau - t} + C\,\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{v}(\tau)}{\tau + t}\,d\tau.$$

Пусть $\vec{A}$ - оператор, определенный правой частью уравнения /2/, тогда уравнение /2/ можно записать в виде

$$\vec{v}(t) = \vec{A}\,\vec{v}(t). \qquad /3/$$

Будем рассматривать это уравнение в следующих пространствах вектор-функций. $\mathfrak{L}_2^n[0,1]$ - пространство вектор-функций $\vec{v}(t)$ с ограниченной нормой:

$$\|\vec{v}(t)\|_{L_2} = \left(\int_0^1 \sum_{\alpha=1}^n |v_\alpha(t)|^2 dt\right)^{1/2} < +\infty.$$

$\vec{\mathcal{C}}^n[0,1]$ - пространство всех непрерывных вектор-функций на отрезке /0,1/ с равномерной нормой:

$$\|\vec{v}(t)\|_c = \max_{1\le\alpha\le n} \max_{0\le t\le 1} |v_\alpha(t)|.$$

$\vec{\mathfrak{L}}^n_{ip\mu}[0,1]$ - пространство вектор-функций $\vec{v}(t)$, обращающихся в нуль на концах отрезка /0,1/ и удовлетворяющих условию Гельдера, т.е. пространство вектор-функций со следующей ограниченной нормой:

$$\|\vec{v}(t)\|_\mu = \max_{1\le\alpha\le n} \sup_{0\le t,t'\le 1} \frac{|v_\alpha(t)-v_\alpha(t')|}{|t-t'|^\mu} < +\infty; \quad 0<\mu<1.$$

Из условия a_2/ и равенства /2/ следует, что решение уравнения /2/ удовлетворяет следующим свойствам:

а/ $\vec{v}(0)=\vec{v}(1)$, $\vec{v}(t)\ge 0$, $t\in[0,1]$;

б/ $\vec{v}(t)$ стремится к нулю не медленнее, чем функция t^2 при t, стремящемся к нулю; т.е. $\vec{v}(t) = O(t^2)$ при $t\to 0$.

Таким образом, имеет смысл рассматривать уравнение /2/ или /3/ не на всем пространстве, а только в некотором его подмножестве. Пусть $\vec{K}$ - множество вектор-функций $\vec{v}(t)$ из пространства $\mathfrak{L}^n_{ip\mu}[0,1]$, удовлетворяющих свойствам а/ и б/. $\vec{K}$ представляет собой конус этого пространства. Нетрудно видеть, что оператор $\vec{A}$ отображает $\vec{K}$ в $\vec{K}$ и как оператор, действующий из $\mathfrak{L}^n_{ip\mu}[0,1]$ в $\vec{\mathcal{C}}^n[0,1]$, является вполне-непрерывным.

Для проведения дальнейших оценок определим следующие константы:

$$\|C\| = \max_{1\le\alpha\le n} \sum_{\beta=1}^n |C_{\alpha\beta}|,$$

$$\|C^+\| = \max_{1\le\alpha\le n} \left(\sum_{c_{\alpha\beta}>0} |c_{\alpha\beta}|\right),$$

где в скобках стоит сумма всех положительных элементов строки с номером α матрицы C;

$$N_\mu = \frac{2}{(1-\mu)\pi} + \frac{1+2^{1+\mu}+3^\mu}{\pi\mu},$$

$$\|\rho\| = \frac{1}{\pi}\|\rho(t)\|_{L_2}, \quad b=\|t\rho(t)\|_C, \quad d=\|t\rho(t)\|_\mu,$$

$a = \max_\alpha |a_\alpha|$, где a_α - собственные значения матрицы CC^* / C^* - сопряженная к C матрица/.

Теорема 1. Пусть число $R>0$ таково, что

$$2b\left\{\left[\|\vec{\lambda}\| + (\|C\|+1)\frac{R}{\pi\mu}\right]\left(\frac{\|C\|}{\pi}+N_\mu\right)R + R^2\right\} +$$

$$+\left\{\left[\|\vec{\lambda}\| + (\|C\|+1)\frac{R}{\pi\mu}\right]^2 + R^2\right\}d \le R. \qquad /4/$$

Тогда на отрезке $\|\vec{v}(t)\|_\mu \le R$ конуса $\vec{K}$ уравнение /3/ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Сначала докажем, что существует число $R>0$, для которого выполняется неравенство

$$\|\vec{A}\vec{v}\|_\mu < R, \ \forall\ \vec{v}(t)\in\vec{K}, \ \|\vec{v}(t)\|_\mu \le R. \qquad /5/$$

Имеем

$$\|\vec{A}\vec{v}\|_\mu = \|t\rho[\vec{v}^2(t)+\vec{u}^2(t)]\|_\mu \le$$

$$\leq 2\|t\rho\|_C(\|\vec{v}\|_C\|\vec{v}\|_\mu + \|\vec{u}\|_C\|\vec{u}\|_\mu) + (\|\vec{v}\|_C^2 + \|\vec{u}\|_C^2)\|t\rho\|_\mu . \qquad /6/$$

Пусть $\|\vec{v}(t)\|_\mu \leq R$, тогда нетрудно получить следующие оценки:

$$\|\vec{v}(t)\|_C \leq R, \quad \|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{C\vec{v}(\tau)}{\tau+t}d\tau\|_C \leq \|C\|\frac{R}{\pi\mu},$$

$$\|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{C\vec{v}(\tau)}{\tau+t}d\tau\|_\mu \leq \|C\|\frac{R}{\pi}.$$

Кроме того, из /5/ следует

$$\|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau-t}d\tau\|_\mu \leq N_\mu R; \quad \|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)d\tau}{\tau-t}\|_C \leq \frac{R}{\pi\mu}.$$

Из этих неравенств получаем:

$$\|\vec{u}\|_C \leq \|\vec{\lambda}\| + (\|C\|+1)\frac{R}{\pi\mu}, \quad \|\vec{u}\|_\mu \leq (N_\mu + \frac{\|C\|}{\pi})R.$$

Отсюда неравенство /6/ приводится к виду

$$\|\vec{A}\vec{v}\|_\mu \leq 2\|t\rho\|_C\{[\|\vec{\lambda}\| + (\|C\|+1)\frac{R}{\pi\mu}](N_\mu + \frac{\|C\|}{\pi})R + R^2\} +$$

$$+ \{[\|\vec{\lambda}\| + (\|C\|+1)\frac{R}{\pi\mu}]^2 + R^2\}\|t\rho(t)\|_\mu .$$

Теперь неравенство /5/ следует из /4/. Определим следующий оператор:

$$\tilde{\vec{A}}\vec{v} = \begin{cases} \vec{A}\vec{v}, & \vec{v} \in \vec{K}, \quad \|\vec{v}\|_\mu \leq R, \\ \vec{A}(\frac{R}{\|\vec{v}\|_\mu}\vec{v}), & \vec{v} \in \vec{K}, \quad \|\vec{v}\|_\mu \geq R. \end{cases}$$

Очевидно, что оператор $\tilde{\vec{A}}$ вполне непрерывен и переводит $\vec{K}$ в его компактную часть, следовательно, по теореме Шаудера о неподвижной точке /6/ в $\vec{K}$ найдется такой элемент $\vec{v}^*(t)$, что $\vec{v}^*(t) = \tilde{\vec{A}}\vec{v}^*(t)$.

Допустим, что $\|\vec{v}^*(t)\|_\mu > R$, тогда, положив

$$\vec{x}(t) = \frac{R}{\|\vec{v}^*(t)\|_\mu}\vec{v}^*(t),$$

получим

$\vec{A}\vec{x} = \vec{v}^*$, $\|\vec{A}\vec{x}\|_\mu = \|\vec{v}^*\|_\mu > R$.

Поскольку $\|\vec{x}\|_\mu = R$, то полученное неравенство противоречит неравенству /5/ при заданном R, поэтому $\|\vec{v}^*\|_\mu \leq R$, т.е. $\vec{v}^* = \vec{A}\vec{v}^*$. Теорема доказана.

Замечание. Если матрица C удовлетворяет условию $\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} = 1$ $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, то вместо $\|C\|$ в неравенство /4/ можно подставить величину $\|C^+\|$, что улучшает оценку для $\|\vec{\lambda}\|$ и R.

Из условия /4/ нетрудно получить максимальное значение константы связи

$$\|\vec{\lambda}\|_{max} = [2(a_1\|t\rho\|_\mu)^{1/2} + 2\|t\rho\|_C(N_\mu + \frac{\|C\|}{\pi})]^{-1}, \qquad /7/$$

где

$$a_1 = 2\|t\rho\|_C(\frac{\|C\|+1}{\pi\mu})(\frac{\|C\|}{\pi} + N_\mu) + 1 + \|t\rho\|_\mu[1 + (\frac{\|C\|+1}{\pi\mu})^2].$$

Соответствующая оценка для $||\lambda||_{max}$ из [1,2] имеет вид

$$||\vec{\lambda}||_{max} = \frac{1}{4}[(1+N_\mu)(||t\rho||_C + ||\rho||_C + ||\rho||_\mu) + ||C||\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho(\tau)d\tau]^{-1}. \qquad /8/$$

Величины $||\rho||_C$ и $||\rho||_\mu$, вообще говоря, значительно превосходят константы $||t\rho||_C$ и $||t\rho||_\mu$, фигурирующие в /7/, что делает оценку /7/ менее ограничительной по сравнению с /8/. Сравнение этих оценок для рассмотренной ниже конкретной системы приводится в *табл. 3.*

Переходим теперь к вопросу единственности решения уравнения /3/. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть число $R_1>0$ таково, что

$$[||\vec{\lambda}|| + (||C||+1)\frac{R_1}{\pi\mu}](a||\rho|| + b) + R_1 b < \frac{1}{2}, \qquad /9/$$

тогда в отрезке $||\vec{v}||_\mu < R_1$ конуса $\vec{K}$ уравнение /3/ имеет не более одного решения.

Доказательство. Допустим, что уравнение /3/ имеет в конусе $\vec{K}$ два решения, $\vec{v}(t)$ и $\vec{u}(t)$, $\vec{v} \neq \vec{u}$. Пусть $\vec{x}(t) = \vec{v}(t) - \vec{u}(t)$; $\vec{y}(t) = \vec{v}(t) + \vec{u}(t)$. Введем в рассмотрение следующую операцию:

$$\vec{d}_1 * \vec{d}_2 = (d_{11}d_{21}, d_{12}d_{22}, \dots, d_{1n}d_{2n}),$$

где

$$\vec{d}_1 = (d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}), \quad \vec{d}_2 = (d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}).$$

Тогда вектор-функция $\vec{x}(t)$ удовлетворяет следующему линейному операторному уравнению:

$$\vec{x}(t) = t\rho(t)\{[2\vec{\lambda} + \Phi(\vec{y}(t), t)] * [\Phi(\vec{x}(t), t)] + \vec{y}(t) * \vec{x}(t)\}, \qquad /10/$$

где

$$\Phi(\vec{z}(t), t) = C\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{z}(\tau)d\tau}{\tau + t} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{z}(\tau)}{\tau - t}d\tau.$$

Заметим, что уравнение /10/ можно записать в следующем виде:

$$\vec{x}(t) = \vec{A}'(\vec{y}(t))\vec{x}(t), \qquad /11/$$

где $\vec{A}'(\vec{y}(t))$ есть производная Фреше оператора $\vec{A}$, вычисляемая в точке $y(t)$. Следовательно, единственность тривиального решения уравнения /11/ эквивалентна существованию обратного оператора к $\vec{J} - \vec{A}'(\vec{y}(t))$, где J - тождественный оператор. Известно, что если

$$||\vec{A}'(\vec{y}(t))|| < 1, \qquad /12/$$

то существует $[\vec{J} - \vec{A}'(\vec{y}(t))]^{-1}$.

В отличие от уравнения /3/, последнее уравнение /11/ будем рассматривать в $\vec{\mathfrak{L}}^n_2[0.1]$. Пусть $||\vec{v}||_\mu \leq R_1$, $||\vec{u}||_\mu \leq R_1$, $\vec{v}, \vec{u} \in \vec{K}$, тогда нетрудно получить следующие оценки:

$$||\Phi(\vec{y}(t), t)||_C \leq 2(||C||+1)\frac{R_1}{\mu\nu};$$

$$||t\rho(t)[\vec{y}(t) * \vec{x}(t)]||_{L_2} \leq 2||t\rho(t)||_C R_1 ||\vec{x}(t)||_{L_2}.$$

Кроме того, согласно [5]

$$||\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\vec{x}(\tau)d\tau}{\tau - t}||_{L_2} \leq ||\vec{x}(\tau)||_{L_2},$$

и потому

$$||\vec{A}'(\vec{y}(t))\vec{x}(t)||_{L_2} \leq 2\{[||\vec{\lambda}|| + (||C||+1)\frac{R_1}{\pi\mu}](a||\rho|| + b) + bR_1\}||\vec{x}(t)||_{L_2};$$

отсюда из условия /9/ следует неравенство /12/, что и доказывает теорему.

Замечание. Если матрица C удовлетворяет условию B_1), то вместо $||C||$ в формулу /9/ можно подставить $||C^+||$, а константу a положить равной единице, $a = 1$.

Аналогично /7/ можно получить оценку $||\vec{\lambda}||_{max}$, соответствующую неравенству /9/:

$$||\vec{\lambda}||_{max} < \frac{1}{2}\left[\frac{a}{\pi}||\rho||_{L_2} + ||t\rho||_C\right]^{-1}. \qquad /13/$$

Ограничение /13/, определяющее область единственности решений уравнения /1/, дает существенно более широкую область, чем условие существования решений /7/. В то же время область единственности решений, полученная в /1,2/, всегда уже области существования. Сравнение областей единственности для рассматриваемого конкретного примера /14/ приводится в *табл. 3*.

§ 2. *Численные эксперименты по определению величины константы связи и решение уравнения Лоу*

Условия /4/ и /9/ есть ограничения на величину $||\vec{\lambda}||$ и константу R. Если функция $\rho(t)$ и матрица C заданы, то, решая /4/ или /9/, мы получим оценки для $||\vec{\lambda}||$ и R. Для решения /4/ или /9/ достаточно положить, например, $||\vec{\lambda}|| = R$, хотя возможен и случай $||\vec{\lambda}|| > R$. Последний случай не имеет места в неравенствах, установленных работами /1,2/.

Для численного расчета рассмотрим следующий пример, который изучался в ряде работ /1,2,7,8/.

Пусть $\rho(t) = \frac{k^3}{12\pi}\exp\left(-\frac{k^2}{49}\right)$, $k = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)^{1/2}$, $0 \le t \le 1$,

$$C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /14/$$

Для данного примера, положив $R = ||\vec{\lambda}||$ и решая неравенства /4/ и /9/, мы получили соответствующие величины $||\vec{\lambda}||$, которые приводятся в *табл. 3*. В этой же таблице для сравнения с /1,2/ приводятся верхние границы константы связи $||\vec{\lambda}||$ в трех различных формулировках уравнения Лоу /1/. Из *табл. 3* видно, что оценка константы связи $||\vec{\lambda}||$, установленная теоремой 1, по порядку совпадает с лучшей оценкой из /1,2/, а в случае единственности решений оценка, указанная в теореме 2, существенно лучше, чем соответствующая из /1,2/.

Начиная со значения $||\vec{\lambda}||$, гарантирующего существование и единственность решения, численно решаем уравнение /3/, используя метод простой итерации и наискорейшего спуска. Поскольку решение этого уравнения непрерывно зависит от $\vec{\lambda}$, то при переходе к большей величине $||\vec{\lambda}||$ используем начальное приближение, совпадающее с уже найденным решением для предыдущего значения. Такой процесс удалось продолжить до значения $||\vec{\lambda}|| = 7{,}8$. В *табл. 1* приводятся значения первой компоненты $v_1(t)$ для системы /14/.

С целью сравнения близости приближенных и точных решений была рассмотрена следующая система:

$$\rho(t) = t\sqrt{1-t^2}\,; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /15/$$

В этом случае существует точное решение:

$$v_\alpha(t) = (4t^2\lambda_\alpha^2\sqrt{1-t^2})(4 - 4\lambda_\alpha t^2(2t^2-1) + \lambda_\alpha^2 t^2)^{-1}, \ (\alpha = 1,2),$$

определенное при $||\vec{\lambda}|| < 2$. Приближенное решение системы /15/ проводилось аналогично предыдущему случаю, и были получены решения в области $||\vec{\lambda}|| \le 1{,}35$. Сравнение точных и приближенных решений приводится в *табл. 2*. Из этой таблицы видно, что точность приближенных решений падает с увеличением $||\vec{\lambda}||$. Это связано с тем, что при увеличении $||\vec{\lambda}||$ у решения наблюдается растущий пик, что ухудшает точность вычисления сингулярного интеграла. В области $||\vec{\lambda}|| > 1{,}35$ итерационный процесс не сходится.

Приведенные примеры численных расчетов дают основания решать уравнения /3/ в более широкой области параметров λa, ,чем область, установленная теоремами 1,2.

Таблица 1

Приближенные решения $v_1(t)$ для /14/

t	$\|\|\lambda\|\| = 0.4$	$\|\|\lambda\| = 2.0$	$\|\|\lambda\|\| = 6.0$	$\|\|\lambda\|\| = 7.80$
0.I	.9079E - 02	.2644E + 00	.2583E + 0I	.5234E + 0I
0.2	.7365E - 02	.2098E + 00	.22I7E + 0I	.395IE + 0I
0.3	.5684E - 02	.I434E + 00	.9432E + 00	.9642E + 00
0.4	.4438E - 02	.I086E + 00	.6427E + 00	.6998E + 00
0.5	.3393E - 02	.828IE - 0I	.5684E + 00	.82I3E + 00
0.6	.246IE - 02	.60I0E - 0I	.4334E + 00	.6558E + 00
0.7	.I634E - 02	.3994E - 0I	.290IE + 00	.4348E + 00
0.8	.9I28E - 03	.2240E - 0I	.I647E + 00	.2477E + 00
0.9	.3322E - 03	.8208E - 02	.6I44E - 0I	.9328E - 0I

Таблица 2

Точные и приближенные решения $v_1(t)$ для /15/

t	$\|\|\lambda\|\| = 0.05$		$\|\|\lambda\|\| = 0.65$		$\|\|\lambda\|\| = 1.35$	
	точное	приближённое	точное	приближённое	точное	приближённое
0.I	.2486E - 04	.2487E - 04	.4I73E - 02	.7472E- 02	.I78E-0I	.205E -0I
0.2	.9779E - 04	.9798E - 04	.I8IIE - 0I	.2072E- 0I	.669E-0I	.750E -0I
0.3	.2I38E - 03	.2I46E - 03	.3430E - 0I	.3979E- 0I	.I37E+00	.I64E +00
0.4	.3646E - 03	.3666E - 03	.5697E - 0I	.6254E- 0I	.2I9E+00	.240E +00
0.5	.5778E - 03	.54I3E - 03	.8258E - 0I	.6949E- 0I	.308E+00	.34IE +00
0.6	.7I62E - 03	.7200E - 03	.II03E + 00	.I202E+ 00	.404E+00	.440E +00
0.7	.874IE - 03	.8748E - 03	.I397E + 00	.I538E+ 00	.5I6E+00	.572E +00
0.8	.9682E - 03	.9600E - 03	.I706E + 00	.I87IE+ 00	.667E+00	.725E +00
0.9	.9049E - 03	.8827E - 03	.I965E + 00	.2046E+ 00	.93IE+00	.I02E +0I

Таблица 3

Оценки сверху константы связи $||\vec{\lambda}||$

	Настоящая работа	Работы /1,2/		
		Уравнение в форме (I)	Уравнение для обратных амплитуд	N/D метод
Область существования решений	0.I0	0.0I4	0.0I4	0.II
Область единственности решений	0.20	0.004I	0.006I	0.05I

ЛИТЕРАТУРА

1. *Warnock R.L. Phys.Rev., 1968, 170, p. 1323; 1969, 174, p. 2169.*
2. *Mc Daniel N., Warnock R.L. Nuovo Cim., 1969, 64, p. 905.*
3. *Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р5-11470, Дубна, 1978.*
4. *Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р5-11471, Дубна, 1978.*
5. *Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. "Наука", М., 1975.*
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. "Наука", М., 1977.*
7. *Недялков И.П., Пенчев Г.И. ОИЯИ, Р-1445, Дубна, 1963.*
8. *Saltzman G., Saltzman F. Phys.Rev., 1957, 108, p. 1619.*

Рукопись поступила в издательский отдел
25 сентября 1978 года.