СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11866

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

1978

P5 - 11866

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. P5 - 11866

Исследование одной нелинейной краевой задачи с помощью теоремы сравнения

В работе исследуется нелинейное уравнение

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - [1 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}]\phi(x) = -\frac{\phi^k(x)}{x^{k-1}} \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0 . \qquad (2)$$

Доказана следующая теорема:

Если $0 < k \le 1$, то при любых натуральных значениях $\ell = 1,2,3,\dots$ краевая задача (1) - (2) не имеет положительного частицеподобного решения.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P., Makarenko G.I. P5 - 11866

An Investigation of One Nonlinear Boundary Problem by Means of the Theorem of Comparison

The investigation of nonlinear equation

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - [1 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}]\phi(x) = -\frac{\phi^k(x)}{x^{k-1}} \qquad (1)$$

for boundary conditions

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0 \qquad (2)$$

is performed.

The following theorem is proved.

If $0 < k \le 1$, then the boundary problem (1)-(2) has no positive particle-like solution for any integer values $\ell = 1,2,3,\dots$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Исследуется нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}(x) - \left[1 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]\varphi(x) = -\frac{\varphi^k(x)}{x^{k-1}} \qquad (I)$$

при граничных условиях

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0, \qquad (2)$$

где $\ddot{\varphi}(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$, $\ell = 1, 2, 3, \dots$

$$\varphi(\infty) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x).$$

Под положительным частицеподобным решением краевой задачи (I)-(2) понимается такое решение $\varphi(x)$ уравнения (I), которое обращается в нуль только при $x=0$ и $x=\infty$, а в остальных точках интервала $(0,\infty)$ $\varphi(x) > 0$.

Уравнение (I) при $\ell=0$ ранее исследовалось в работах /1-2/.

В работе /3/ с помощью вариационного подхода было установлено, что при любых натуральных значениях параметра ℓ выполнение условия $1<k<5$ является достаточным для существования положительного частицеподобного решения задачи (I)-(2).

В настоящей работе для любых натуральных значений параметра ℓ доказана следующая теорема.

Теорема. Если $0<k\le 1$, то краевая задача (I)-(2) не имеет положительного частицеподобного решения.

Доказательство: Предположим обратное: пусть $\varphi(x)$ является положительным частицеподобным решением краевой задачи (I)-(2). Тогда для любого $0<\beta<1$ найдется такое значение $x=x_0$, что в точке $x=x_0$ график функции $\varphi(x)$ последний раз пересекается с графиком прямой βx (рис.I), так что

$$\varphi(x) < \beta x, \quad x_0 < x < \infty. \qquad (3)$$

Отсюда при $0<k<1$ будем иметь

$$\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)^{1-k} > \frac{1}{\beta^{1-k}}, \quad x_0 < x < \infty. \tag{4}$$

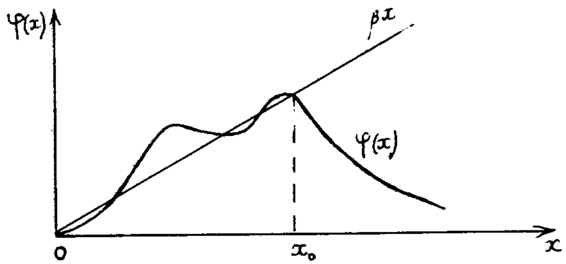

Рис.I.

Уравнение (I) перепишем в виде

$$\ddot{\varphi}(x) + V_1(x)\varphi(x) = 0, \tag{5}$$

$$V_1(x) = \left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)^{1-k} - 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}. \tag{6}$$

Решение уравнения (5) будем сравнивать с решением следующего дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{\psi}(x) + V_2(x)\psi(x) = 0, \tag{7}$$

где

$$V_2(x) = \frac{1}{\beta^{1-k}} - 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}. \tag{8}$$

Из (6) и (8), учитывая неравенство (4), получим

$$V_1(x) > V_2(x), \quad x_0 < x < \infty. \tag{9}$$

Уравнение (7) есть уравнение Бесселя. Так как $\frac{1}{\beta^{1-k}} > 1$, то любое решение $\psi(x)$ уравнения (7) в интервале $x_0 < x < \infty$ имеет бесконечное множество нулей.

Тогда, согласно теореме Штурма о сравнении/4/, решение $\varphi(x)$ уравнения (5) также будет иметь в интервале $x_0 < x < \infty$ бесконечное множество нулей. Это противоречит нашему предположению о том, что $\varphi(x)$ - положительное частицеподобное решение. Значит, при $0<k<1$ краевая задача (I)-(2) не имеет положительного частицеподобного решения.

При $k=1$ уравнение (I) принимает вид

$$\ddot{\varphi}(x) - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\varphi(x) = 0. \tag{I0}$$

Очевидно, что уравнение (I0) при граничных условиях (2) имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Значит, и при $k=1$ задача (I)-(2) не имеет положительного частицеподобного решения. Теорема доказана.

Литература

I. Z.Nehari, Proc. R. Irish Acad. A62, 117(1963).

2. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, Р-I3I9, Дубна, I963; ЖВМ и МФ, 4, 804 (I964).

3. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. ОИЯИ, Р5-II705, Дубна, I978.

4. Петровский И.П. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Наука", I964.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 сентября I978 года.