СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11865

И.В.Амирханов, Г.И.Макаренко

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ОТСУТСТВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1978

P5 - 11865

И.В.Амирханов, Г.И.Макаренко

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ОТСУТСТВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Амирханов И.В., Макаренко Г.И. P5 - 11865

Об одном условии отсутствия положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения скалярного поля

В работе исследуется нелинейное уравнение

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - [1 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}]\phi(x) = -\frac{\phi^k(x)}{x^{k-1}} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0. \quad (2)$$

Доказана следующая теорема:

Если $k \geq 5$, то при любых натуральных значениях $\ell = 1,2,3,\ldots$ краевая задача (1) - (2) не имеет положительного частицеподобного решения.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Amirkhanov I.V., Makarenko G.I. P5 - 11865

On One Condition of the Absence of Positive Particle-Like Solution to a Scalar Field Nonlinear Equation

The investigation of nonlinear equation

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - [1 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}]\phi(x) = -\frac{\phi^k(x)}{x^{k-1}} \quad (1)$$

for boundary conditions

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0 \quad (2)$$

is performed.

The following theorem is proved.

If $k \geq 5$, then the boundary problem (1)-(2) has no positive particle-like solution for any integer values $\ell = 1,2,3,\ldots$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Thechniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Введение

Построение теории элементарных частиц на основе единой теории поля приводит к рассмотрению нелинейных дифференциальных уравнений /1-3/. Представляет интерес исследование существования частицеподобных решений таких уравнений. Например, в простейшей модели скалярного поля задача сводится к исследованию существования частицеподобного решения следующего нелинейного дифференциального уравнения /4/

$$\ddot{\varphi}(x) - Q_\ell(x)\varphi(x) = -\frac{\varphi^k(x)}{x^{k-1}} \quad (I)$$

при граничных условиях

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0, \quad (2)$$

где $\ddot{\varphi}(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$, $Q_\ell(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$, $\ell = 0,1,2,\ldots$

$$\varphi(\infty) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

Под частицеподобным решением понимается любое нетривиальное решение $\varphi(x)$ краевой задачи (I)-(2). Положительное частицеподобное решение - это частицеподобное решение, не обращающееся в нуль ни в одной точке, кроме $x=0$ и $x=\infty$, и $\varphi(x)>0$ при $x>0$.

Уравнение (I) при $\ell=0$ ранее исследовалось в работах /2,5,6/.

В работе /4/ для любых натуральных значений параметра ℓ с помощью вариационного подхода была доказана

<u>Теорема</u>. При выполнении условия

$$1 < K < 5$$

существует положительное частицеподобное решение $\varphi(x)$ задачи (I)-(2).

Это решение обладает следующими свойствами

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)\dot{\varphi}(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)\dot{\varphi}(x)=0. \tag{3}$$

В данной работе для любых натуральных значений параметра ℓ с помощью одного дифференциального равенства установлено, что при $K \geqslant 5$ задача (I)-(2) не имеет положительного частицеподобного решения.

В §§I-2 с помощью метода последовательных приближений устанавливаются свойства решений уравнения (I) при $x\to 0$ и при $x\to\infty$ соответственно. Полученные результаты уточняют свойства (3).

В § 3 доказывается теорема об отсутствии положительных частицеподобных решений.

§ I. В этом параграфе установим свойства решений уравнения (I) при $x\to 0$.

Лемма I. Если выполняется условие $K>1$, то на отрезке $0\le x\le h$, где $h=h(K,\ell,C)$, $0<C<\infty$, существует однопараметрическое семейство решений $\varphi(x,C)$ уравнения (I), таких, что $\varphi(0,C)=0$, и обладающих свойствами:

I°. Имеет место оценка

$$\left|\varphi(x,C)\right| \le \frac{2\beta_{1\ell}C}{K}\left(e^{\frac{K}{2}}+K-1\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1} e^{x} \tag{I.I}$$

2°. $\varphi(x,C)$ - непрерывно зависит от параметра C.

3°. При фиксированном значении C решение $\varphi(x,C)$ единственно.

Доказательство.

I°. Докажем первое утверждение леммы I. Для этого перепишем уравнение (I) с учетом граничного условия $\varphi(0,C)$ в виде интегрального уравнения

$$\varphi(x,C)=C\cdot\Phi_1(x)+\int_0^x \mathcal{D}(x,s)\frac{\varphi^K(s,C)}{s^{K-1}}\,ds, \tag{I.2}$$

где

$$\mathcal{D}(x,s)=\Phi_2(x)\Phi_1(s)-\Phi_2(s)\Phi_1(x), \quad 0\le s\le x. \tag{I.3}$$

Здесь $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ - соответственно регулярное и нерегулярное в точке $x=0$ линейно независимые решения однородного уравнения

$$\ddot{\Phi}(x)-Q_\ell(x)\Phi(x)=0, \tag{I.4}$$

причем

$$\dot{\Phi}_1(x)\Phi_2(x)-\Phi_1(x)\dot{\Phi}_2(x)=1.$$

При $0\le x<\infty$ для функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ имеют место оценки [7]

$$\Phi_1(x)\le\beta_{1\ell}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1}e^{x},$$
$$\Phi_2(x)\le\beta_{2\ell}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell}e^{-x}, \tag{I.5}$$

где $\beta_{1\ell}$ и $\beta_{2\ell}$ - положительные постоянные.

Докажем, что при $0\le x\le h_1$ существует решение интегрального уравнения (I.2). Для этого применим метод последовательных приближений.

За первое приближение возьмем

$$\varphi_1(x,C)=C\Phi_1(x). \tag{I.6}$$

Следующие приближения определим соотношениями:

$$\varphi_n(x,C)=C\Phi_1(x)+\int_0^x\mathcal{D}(x,s)\frac{\varphi^K_{n-1}(s,C)}{s^{K-1}}\,ds, \quad n=2,3,4,\ldots \tag{I.7}$$

Используя оценки (I.5), нетрудно убедиться, что все функции последовательности $\{\varphi_n(x,C)\}$ определены и непрерывны на отрезке $0\le x\le h_1$ и имеют место оценки

$$\left|\varphi_n(x,C)\right|\le 2\beta_{1\ell}C\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1}e^{x}, \quad n=1,2,3,\ldots \tag{I.8}$$

Величина h_1 находится из условия $\gamma_1(h_1) = 1$,
где

$$\gamma_1(x) = 4\beta_{1\ell}^{\kappa}\beta_{2\ell}\, C^{\kappa-1}\frac{x^{\ell(\kappa-1)+2}}{\ell(\kappa-1)+2}\, e^{(\kappa-1)x} . \qquad (I.9)$$

Ясно, что при $0 \le x \le h_1$ $\gamma_1(x) \le 1$.

Докажем, что последовательность $\{\varphi_n(x, C)\}$ равномерно сходится при $0 \le x \le h_1$ и, следовательно, предельная функция

$$\varphi(x, C) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x, C) \qquad (I.10)$$

непрерывна на этом отрезке.

Заметим, что сходимость последовательности $\{\varphi_n(x, C)\}$ равносильна сходимости ряда

$$\varphi_1(x,C) + [\varphi_2(x,C) - \varphi_1(x,C)] + \ldots + [\varphi_{n+1}(x,C) - \varphi_n(x,C)] + \ldots \qquad (I.11)$$

Каждый член ряда (I.11), начиная со второго, определяется соотношением

$$\varphi_{n+1}(x,C) - \varphi_n(x,C) = \int_0^x \mathcal{D}(x,s)\, \frac{\varphi_n^{\kappa}(s,C) - \varphi_{n-1}^{\kappa}(s,C)}{s^{\kappa-1}}\, ds . \qquad (I.12)$$

Используя (I.5) и (I.12), на отрезке $0 \le x \le h_1$ получим оценки:

$$|\varphi_{n+1}(x,C) - \varphi_n(x,C)| \le \frac{2\beta_{1\ell} C}{\kappa}\cdot\frac{\left[\frac{\kappa\gamma_1(x)}{2}\right]^n}{n!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1}\cdot e^x, \qquad (I.13)$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Из оценок (I.13) следует, что ряд (I.11) сходится равномерно, откуда получаем непрерывность предельной функции $\varphi(x, C)$. Тогда, переходя к пределу в (I.7) при $n \to \infty$ и учитывая (I.10), получим, что предельная функция $\varphi(x, C)$ на отрезке $0 \le x \le h_1$ является решением интегрального уравнения (I.2), а значит, и решением уравнения (I), удовлетворяющим граничному условию $\varphi(0, C) = 0$.

Из (I.11) и (I.13) для предельной функции $\varphi(x, C)$ получаем оценку

$$|\varphi(x,C)| \le \frac{2\beta_{1\ell} C}{\kappa}\left(e^{\frac{\kappa\gamma_1(x)}{2}} + \kappa - 1\right)\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1}\cdot e^x. \qquad (I.14)$$

Так как при $0 \le x \le h_1$ функция $\gamma_1(x) \le 1$, то из (I.14) получаем требуемую оценку (I.1).

2^0. Докажем второе утверждение леммы I. Рассмотрим два значения параметра C : C и $C + \Delta C$, $\Delta C > 0$. Тогда будем иметь

$$\varphi(x, C+\Delta C) - \varphi(x,C) = \Delta C\cdot \Phi_1(x) + \int_0^x \mathcal{D}(x,s)\, \frac{\varphi^{\kappa}(s, C+\Delta C) - \varphi^{\kappa}(s,C)}{s^{\kappa-1}}\, ds . \qquad (I.15)$$

С помощью метода последовательных приближений, повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в пункте I^0, на отрезке $0 \le x \le h_2$ можно получить оценку

$$|\varphi(x, C+\Delta C) - \varphi(x,C)| \le \Delta C\cdot\beta_{1\ell}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1} e^{x+1} \qquad (I.16)$$

Величина h_2 находится из условия $\gamma_2(h_2) = 1$, где

$$\gamma_2(x) = 4\beta_{1\ell}^{\kappa}\beta_{2\ell}\,(C+\Delta C)^{\kappa-1}\cdot\kappa\left(\frac{e^{\frac{\kappa}{2}} + \kappa - 1}{\kappa}\right)^{\kappa-1}\frac{x^{\ell(\kappa-1)+2}}{\ell(\kappa-1)+2}\cdot e^{(\kappa-1)x}, \qquad (I.17)$$

причем $\gamma_2(x) \le 1$, если $0 \le x \le h_2$.

Из (I.16) следует, что при $0 \le x \le h_2$ решение $\varphi(x, C)$ непрерывно зависит от параметра C. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $\Delta C < \delta$ решения $\varphi(x, C+\Delta C)$ и $\varphi(x, C)$ на отрезке $0 \le x \le h_2$ отличаются меньше, чем на ε.

Выбирая теперь $h = \min(h_1, h_2)$, видим, что на отрезке $0 \le x \le h$ утверждения I^0 и 2^0 леммы I справедливы.

3^0. Доказательство третьего утверждения леммы I. Допустим, что существует другое решение $\bar{\varphi}(x, C)$, определенное и непрерывное при $0 \le x \le \bar{h}$, где $0 \le \bar{h} \le h$, удовлетворяющее условию $\bar{\varphi}(0, C) = 0$ и обладающее свойством (I.1).

Тогда при $0 \le x \le h$ функция $\bar\varphi(x,C)$ будет удовлетворять уравнению

$$\bar\varphi(x,C) = C\Phi_1(x) + \int_0^x D(x,s)\frac{\bar\varphi^K(s,C)}{s^{K-1}}ds. \qquad (I.18)$$

Из (I.7) и (I.18) получаем

$$\varphi_n(x,C) - \bar\varphi(x,C) = \int_0^x D(x,s)\frac{\varphi_{n-1}^K(s,C) - \bar\varphi^K(s,C)}{s^{K-1}}ds. \qquad (I.19)$$

Используя оценки (I.5), нетрудно убедиться, что для модуля разности функций $|\varphi_n(x,C) - \bar\varphi(x,C)|$ имеют место оценки

$$|\varphi_n(x,C) - \bar\varphi(x,C)| \le 2^{K-1}\beta_{1\ell}C\frac{(e^{\frac{K}{2}}+K-1)^{nK}}{K^{n(K+1)}}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1} e^{x}, \qquad (I.20)$$
$$n = 1,2,3,\ldots$$

Правые части неравенств (I.20) стремятся к нулю при $n\to\infty$ как общий член сходящегося ряда. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(x,C) - \bar\varphi(x,C)| = 0. \qquad (I.21)$$

Учитывая (I.10), из (I.21) получаем

$$\bar\varphi(x,C) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,C) = \varphi(x,C).$$

Это показывает, что при $0 \le x \le h$ решение уравнения (I) единственно.

Лемма I доказана.

§ 2. В этом параграфе установим свойства решений уравнения (I) при $x\to\infty$.

<u>Лемма 2.</u> Если выполняются условия $K>1$ и $\ell(K-1)>1$, то в интервале $H \le x < \infty$, где $H = H(K,\ell,C)$, $0<C<\infty$, существует однопараметрическое семейство решений $\varphi(x,C)$ уравнения (I), таких, что $\varphi(\infty,C)=0$, и обладающих свойствами:

I°. Имеет место оценка

$$|\varphi(x,C)| \le \frac{2\beta_{2\ell}C}{K}\left(e^{\frac{K}{2}}+K-1\right)\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell} e^{-x}. \qquad (2.I)$$

2°. $\varphi(x,C)$ непрерывно зависит от параметра C.

3°. При фиксированном значении C решение $\varphi(x,C)$ единственно.

Доказательство.

I°. Докажем первое утверждение леммы 2. Для этого перепишем уравнение (I) с учетом граничного условия $\varphi(\infty,C)=0$ в виде интегрального уравнения

$$\varphi(x,C) = C\Phi_2(x) + \int_x^\infty D_1(x,s)\frac{\varphi^K(s,C)}{s^{K-1}}ds, \qquad (2.2)$$

где

$$D_1(x,s) = -D(x,s), \quad x \le s < \infty.$$

Докажем, что в интервале $H_1 \le x < \infty$ существует решение интегрального уравнения (2.2). Для этого применим метод последовательных приближений.

За первое приближение возьмем

$$\varphi_1(x,C) = C\cdot\Phi_2(x). \qquad (2.3)$$

Следующие приближения определяем так:

$$\varphi_n(x,C) = C\Phi_2(x) + \int_x^\infty D_1(x,s)\frac{\varphi_{n-1}^K(s,C)}{s^{K-1}}ds, \quad n=2,3,4,\ldots \qquad (2.4)$$

Используя оценки (I.5), нетрудно убедиться, что все функции последовательности $\{\varphi_n(x,C)\}$ определены и непрерывны при $H_1 \le x < \infty$ и имеют место оценки

$$|\varphi_n(x,C)| \le 2\beta_{2\ell}C\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell} e^{-x}, \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (2.5)$$

Величина H_1 находится из условия $\sigma_1(H_1)=1$, где

$$\sigma_1(x)=\frac{4\beta_{1\ell}\,\beta_{2\ell}^{K}}{K-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell(K-1)+1}\cdot\left(\frac{C}{xe^{x}}\right)^{K-1}, \tag{2.6}$$

причем $\sigma_1(x)\le 1$, если $H_1\le x<\infty$.

Докажем, что последовательность $\{\varphi_n(x,C)\}$ равномерно сходится в интервале $H_1\le x<\infty$ и, следовательно, предельная функция

$$\varphi(x,C)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,C) \tag{2.7}$$

непрерывна при $H_1\le x<\infty$.

Точно так же, как в предыдущем параграфе, для каждого члена ряда

$$\varphi_1(x,C)+[\varphi_2(x,C)-\varphi_1(x,C)]+\ldots+[\varphi_{n+1}(x,C)-\varphi_n(x,C)]+\ldots \tag{2.8}$$

при $H_1\le x<\infty$ получаются оценки:

$$|\varphi_{n+1}(x,C)-\varphi_n(x,C)|\le\frac{2\beta_{2\ell}C}{K}\,\frac{\left[\frac{K\sigma_1(x)}{2}\right]^{n}}{n!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell}\cdot e^{-x}, \tag{2.9}$$
$$n=1,2,3,\ldots$$

Из оценок (2.9) следует, что ряд (2.8) сходится равномерно, откуда получаем непрерывность предельной функции $\varphi(x,C)$. Тогда, переходя к пределу в (2.4) при $n\to\infty$ и учитывая (2.7), получим, что предельная функция $\varphi(x,C)$ в интервале $H_1\le x<\infty$ является решением интегрального уравнения (2.2), а значит, и решением уравнения (I), удовлетворяющим граничному условию $\varphi(\infty,C)=0$. Из (2.8) и (2.9) для предельной функции $\varphi(x,C)$ получаем оценку

$$|\varphi(x,C)|\le\frac{2\beta_{2\ell}C}{K}\left[e^{\frac{K\sigma_1(x)}{2}}+K-1\right]\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell}\cdot e^{-x}. \tag{2.10}$$

Так как при $H_1\le x<\infty$ функция $\sigma_1(x)\le 1$, то из (2.10) получаем требуемую оценку (2.1).

2^0. Докажем второе утверждение леммы 2. Рассмотрим два значения параметра C : C и $C+\Delta C$, $\Delta C>0$. Тогда будем иметь

$$\varphi(x,C+\Delta C)-\varphi(x,C)=\Delta C\cdot\Phi_2(x)+\int_x^\infty D_1(x,s)\frac{\varphi^K(s,C+\Delta C)-\varphi^K(s,C)}{s^{K-1}}\,ds. \tag{2.11}$$

С помощью метода последовательных приближений, повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в первом параграфе, при $H_2\le x<\infty$ можно получить оценку

$$|\varphi(x,C+\Delta C)-\varphi(x,C)|\le\Delta C\cdot\beta_{2\ell}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell}e^{1-x}. \tag{2.12}$$

Величина H_2 находится из условия $\sigma_2(H_2)=1$, где

$$\sigma_2(x)=\frac{4\beta_{1\ell}\beta_{2\ell}^{K}K}{K-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell(K-1)+1}\left[\frac{(C+\Delta C)(e^{\frac{K}{2}}+K-1)}{Kxe^{x}}\right]^{K-1}, \tag{2.13}$$

причем $\sigma_2(x)\le 1$, если $H_2\le x<\infty$.

Из (2.12) следует, что при $H_2\le x<\infty$ решение $\varphi(x,C)$ непрерывно зависит от параметра C. Действительно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при $\Delta C<\delta$ решения $\varphi(x,C+\Delta C)$ и $\varphi(x,C)$ отличаются меньше, чем на ε.

Выбирая теперь $H=\max(H_1,H_2)$, видим, что при $H\le x<\infty$ утверждения I^0 и 2^0 леммы 2 справедливы.

3^0. Доказательство третьего утверждения леммы 2.

Допустим, что существует другое решение $\bar\varphi(x,C)$, определенное и непрерывное при $\bar H\le x<\infty$, где $H\le\bar H<\infty$, удовлетворяющее условию $\bar\varphi(x,C)=0$ и обладающее свойством (2.1).

Тогда, повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в пункте 3^0 первого параграфа, можно получить оценки

$$|\varphi_n(x,C)-\bar\varphi(x,C)|\le 2^{K-1}\beta_{2\ell}C\,\frac{(e^{\frac{K}{2}}+K-1)^{nK}}{K^{n(K+1)}}\cdot\frac{[K\sigma_1(x)]^{n}}{n!}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell}\cdot e^{-x}, \tag{2.14}$$
$$n=1,2,3,\ldots$$

Правые части неравенств (2.I4) стремятся к нулю при $n \to \infty$ как общий член сходящегося ряда. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x,C) - \bar{\varphi}(x,C)| = 0. \tag{2.I5}$$

Учитывая (2.7), из (2.I5) получаем

$$\bar{\varphi}(x,C) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,C) = \varphi(x,C).$$

Это показывает, что при $H \leq x < \infty$ решение уравнения (I) единственно.

Лемма 2 доказана.

§ 3. В этом параграфе доказывается

<u>Теорема.</u> Краевая задача (I)-(2) при $K \geqslant 5$ не имеет положительного частицеподобного решения.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если $\varphi(x)$ — решение уравнения (I), то выполняется следующее соотношение

$$\frac{d}{dx}\left[x\dot{\varphi}^2(x) - \varphi(x)\dot{\varphi}(x) - x\,Q_\ell(x)\varphi^2(x) + \frac{2}{K+1}\,\frac{\varphi^{K+1}(x)}{x^{K-2}}\right] =$$

$$= -2\left\{\left[Q_\ell(x) + \frac{x}{2}\dot{Q}_\ell(x)\right]\varphi^2(x) - \frac{5-K}{2(K+1)}\cdot\frac{\varphi^{K+1}(x)}{x^{K-1}}\right\}. \tag{3.I}$$

Интегрируя последнее равенство по x от x_1 до x_2, получим

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi^2(x)dx = \frac{5-K}{2(K+1)}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi^{K+1}(x)}{x^{K-1}}dx + \frac{1}{2}\left[W(x_1) - W(x_2)\right], \tag{3.2}$$

где

$$W(x) = x\dot{\varphi}^2(x) - \varphi(x)\dot{\varphi}(x) - xQ_\ell(x)\varphi^2(x) + \frac{2}{K+1}\cdot\frac{\varphi^{K+1}(x)}{x^{K-2}}. \tag{3.3}$$

Теперь предположим, что существует положительное частицеподобное решение $\varphi(x)$ задачи (I)-(2). Тогда, с учетом результатов лемм I и 2, из (3.2) при $x_1 \to 0$ и $x_2 \to \infty$ будем иметь

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)dx = \frac{5-K}{2(K-1)}\int_0^\infty \frac{\varphi^{K+1}(x)}{x^{K-1}}dx. \tag{3.4}$$

Если $K \geqslant 5$, то в равенстве (3.4) слева - положительная величина, а справа - отрицательная величина или ноль. Противоречие. Значит, наше предположение о том, что $\varphi(x)$ - положительное частицеподобное решение, неверно.

Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что все регулярные решения $\varphi(x,C)$ уравнения (I) при $x \to 0$ удовлетворяют оценке (I.I), а в случае $x \to \infty$ удовлетворяют оценке (2.I).

I$^{\circ}$. Используя оценки (I.5), уравнение (I.2) перепишем в виде

$$|\psi(x,c)| \leqslant c + \int_0^x \left[2\beta_{1\ell}^K \beta_{2\ell}\, e^{(K-1)} s^{\ell(K-1)+1}\right] |\psi(s,c)|^K ds, \tag{П.I}$$

где

$$|\psi(x,c)| = \frac{|\varphi(x,c)|}{\beta_{1\ell}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1} e^x}, \quad K > 1. \tag{П.2}$$

Применяя к неравенству (П.I) лемму Бихари[8] и учитывая (П.2), получим

$$|\varphi(x,c)| \leqslant c\beta_{1\ell}\left[1 - \frac{K-1}{2}\cdot\gamma_1(x)\right]^{-\frac{1}{K-1}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\ell+1} e^x, \quad 0 \leqslant x \leq h_3. \tag{П.3}$$

Величина h_3 находится из условия $\gamma_1(h_3) = \frac{2}{K-1}\left(1 - 2^{-\frac{1}{K-1}}\right)$. Ясно, что при $0 \leq x \leq h_o$, где $h_o = min(h, h_3)$, оценки (П.3) и (I.I) совпадают.

2^0. Аналогично, переписывая уравнение (2.2) с учетом (I.5) и применяя лемму Бихари /8/, получим

$$|\varphi(x,c)| \leq c\beta_{/2\ell}\left[1-\frac{k-1}{2}\cdot\sigma_1(x)\right]^{-\frac{1}{k-1}}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\ell}e^{-x},\quad H_3 \leq x < \infty,$$
$$k>1,\quad \ell(k-1)>1. \qquad \text{(II.4)}$$

Величина H_3 находится из условия $\sigma_1(H_3)=\frac{2}{k-1}\left(1-2^{-\frac{1}{k-1}}\right)$.

Ясно, что при $H_0 \leq x < \infty$, где $H_0 = max(H, H_3)$, оценки (II.4) и (2.I) совпадают.

Авторы признательны П.Г.Акишину, И.Л.Боголюбскому, Г.А.Емельяненко и Б.Н.Хоромскому за полезные обсуждения.

Литература

I. R.Finkelstein, R.Lelevier and Ruderman, Phys.Rev.83,326(1951); R.Finkelstein, C.Fronsdal and P.Kaus, Phys.Rev.103,1572(1956)
2. В.Б.Гласко, Ф.Лерюст, Я.П.Терлецкий, С.Ф.Шушурин. ЖЭТФ 35, 452, (I958).
3. R.Friedberg, T.D.Lee and A.Sirlin, Nucl.Phys.B115, 1(1976).
4. И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко. ОИЯИ, Р5-II705, Дубна, I978.
5. Е.П.Жидков, В.П.Шириков. ОИЯИ, Р-I3I9, Дубна, I963; ЖВМ и МФ, 4, 804 (I964).
6. Z.Nehari, Proc. R.Irish. Acad. A62, 117 (1963).
7. Дж. Тейлор. Теория рассеяния. Изд-во "Мир", М., I975.
8. Э.Беккенбах, Р.Беллман. Неравенства. Изд-во "Мир", М., I965.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 сентября I978 года.